

INNEHÅLL

① Geometrisk summa och linjär optimering 10

Inledning, 11

1.1 Geometrisk summa 12

Geometrisk talföljd, 12

Geometrisk summa, 15

1.2 Kontinuerligt sparande och annuitetslån 19

Kontinuerligt sparande, 19

Nuvärde, slutvärde och annuitetslån, 22

1.3 Linjär optimering 27

Områden i planet, 27

Största och minsta värde i ett område, 31

② Funktioner och gränsvärden 44

Inledning, 45

2.1 Polynom 46

Polynom med en term, 46

Polynom av grad två, 50

Räknelagar för polynom, 53

Polynom av högre grad, 55

Polynom av grad två i faktorerad form, 59

Nollställten till polynom samt

ekvationslösning, 62

2.2 Rationella uttryck 66

Förenkling av rationella uttryck, 66

Lösning av rationella ekvationer, 70

2.3 Diskreta och kontinuerliga funktioner samt gränsvärden 73

Diskreta och kontinuerliga funktioner, 73

Gränsvärden, 76

③ Derivata 90

Inledning, 91

3.1 Ändringskvot 92

3.2 Derivata 97

Grafisk tolkning av derivata, 97

Uppskattning av derivata

med symmetrisk ändringskvot, 101

Linjära funktioner, 103

Derivata hos icke linjära funktioner, 106

3.3 Deriveringsregler för potensfunktioner 111

Deriveringsregel för potensfunktioner med positiv heltalsexponent, 111

Deriveringsregler för polynomfunktioner, 114

Deriveringsregel för potensfunktioner, 116

3.4 Tangenter 120

Tangent och derivata, 120

Tangentens ekvation, 123

④ Användning av derivata 136

Inledning, 137

4.1 Extremvärdesproblem 138

Växande och avtagande funktioner, 138

Lokala extrempunkter, 142

Största och minsta värde, 146

Tillämpningar, 149

Andraderivata, 153

Extrempunktsbestämning med andraderivata, 154

Andraderivatan och konkavitet, 156

4.2 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata 160

Derivatans graf, 160

4.3 Deriveringsregler för exponentialfunktioner 165

Derivata av exponentialfunktioner och talet e , 165

Talet e och den naturliga logaritmen, 169

Derivatan av a^x , 171

Tillämpningar, 173

⑤ Primitiva funktioner och enkla integraler 186

Inledning, 187

5.1 Primitiva funktioner 188

Primitiva funktioner med villkor, 193

5.2 Integraler 195

Samband mellan integral och derivata, 199

Beräkning av bestämda integraler med primitiva funktioner, 200

5.3 Tillämpningar 203

Tips 210

Lösningar 212

Facit 215

1

Geometrisk summa och linjär optimering

Centralt innehåll

- Begreppet geometrisk summa
- Linjär optimering

Inledning

I många tester ingår att se mönster. Det kan ske genom att bestämma nästa tal i en serie av tal, t.ex. 1, 4, 7, 10, ...? Talen är ordnade efter någon regel. Här får vi nästa tal genom att addera tre till det föregående. Talen bildar en talföljd, i detta exempel en aritmetisk. I talföljden 1, 4, 16, 64, ...? får vi nästa tal genom att multiplicera det föregående med fyra. En sådan talföljd kallas *geometrisk*. Att känna till den och hur man summerar tal i en sådan följd har ekonomiska tillämpningar. Regelbundna insättningar på ett bankkonto med konstant räntesats ger upphov till en sådan följd.

Ett annat område som har ekonomiska tillämpningar är *linjär optimering*. Här gäller det att under givna förutsättningar söka största eller minsta värde för en funktion.

Din första uppgift

Lisa sparar under ett år 1 000 kr per månad på ett konto med årsräntan 2,0 %. Hur mycket pengar finns på kontot efter den 12:e insättningen?



1.1 Geometrisk summa



Teorigenomgång

Geometrisk talföljd

Enligt en gammal legend lovade en rik furste att uppfinnaren av schackspelet skulle få önska sig vad han ville. Uppfinnaren begärde då att få 1 vetekorn på schackbrädets första ruta, 2 på den andra, 4 på den tredje, 8 på den fjärde osv. Ett schackbräde har 64 rutor.

Talen 1, 2, 4, 8 osv är uppställda i en bestämd ordning enligt en given regel och kallas för en talföljd. Talen i följden brukar benämnas *element*. Om *kvoten* mellan ett element och det närmast föregående är konstant är det en *geometrisk talföljd*.

$1, 1 \cdot 2^1, 1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^3, \dots$ är en geometrisk talföljd med kvoten 2 och första element 1. Om vi betecknar kvoten med k och elementen med $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ kan vi allmänt skriva talföljden

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot k \\ a_3 &= a_2 \cdot k = a_1 \cdot k \cdot k = a_1 \cdot k^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot k = a_1 \cdot k^2 \cdot k = a_1 \cdot k^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot k = a_1 \cdot k^{n-1} \end{aligned}$$

Vi kan ange det n -te elementet på två sätt, antingen genom formeln $a_n = a_{n-1} \cdot k$ eller genom formeln $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$.

Den första formeln är en *rekursionsformel* där det n -te elementet bestäms med hjälp av det närmaste föregående. För att kunna använda den måste vi känna till något element i talföljden samt kvoten.

Den andra formeln är en *sluten formel* där det n -te element direkt kan bestämmas med hjälp av det första. Vi måste i så fall känna till det första elementet a_1 och följdens kvot k .

GEOMETRISK TALFÖLJD

För en geometrisk talföljd gäller att $a_n = k \cdot a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Talet k kallas följdens kvot. En sluten formel för det n -te elementet är $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$.

EXEMPEL

Geometrisk talföljd

Bestäm en rekursionsformel och en sluten formel för talföljden 54, 36, 24, 16, ...

LÖSNING:

Vi bestämmer kvoten mellan elementen för att övertyga oss om att det är en geometrisk talföljd.

$$\frac{36}{54} = \frac{2}{3}, \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Alltså är } k = \frac{2}{3}$$

$$\text{En rekursionsformel är } a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1}, a_1 = 54.$$

$$\text{En sluten formel är } a_n = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{SVAR: } a_n = \frac{2}{3} \cdot a_{n-1}, a_1 = 54 \text{ och } a_n = 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Element i geometrisk talföljd

Vilket är det femte elementet i en geometrisk talföljd där $a_1 = 8$ och $k = 3$?

LÖSNING:

Vi använder formeln $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ med $n = 5$, $a_1 = 8$ och $k = 3$.

$$a_5 = 8 \cdot 3^4 = 648$$

SVAR: Det femte elementet är 648.

Kvot i geometrisk talföljd

Vilken kvot har en talföljd där första elementet är 5 och det sjunde elementet är 320?

LÖSNING:

Kvoten kan bestämmas med formeln $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ med $a_7 = 320$ och $a_1 = 5$. Det ger potensekvationen

$$320 = 5 \cdot k^6 \quad \text{Dividera i båda led med 5.}$$

$$k^6 = 64 \quad \text{Upphöj båda led i 1/6.}$$

$$k = \pm 64^{1/6} \quad \text{Eftersom potensen är jämn finns det både en positiv och en negativ rot.}$$

$$k = \pm 2$$

SVAR: Kvoten är 2 eller -2.

ÖVA I

- 1001** I en geometrisk talföljd är första elementet $a_1 = 6$ och kvoten $k = 4$. Bestäm
- det andra elementet
 - det tredje elementet
 - det sjunde elementet
 - det tionde elementet
- 1002** Ange en rekursionsformel och en sluten formel för talföljden 4, 6, 9, ...
- 1003** Bestäm de fem första elementen i en geometrisk talföljd som beskrivs av formeln
- $a_n = \frac{3}{4} \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 2$
 - $a_n = 5 \cdot 0,1^{n-1}$
- 1004** Vilken kvot k har en talföljd där
- $a_1 = 2$ och $a_3 = 18$
 - $a_1 = 2$ och $a_5 = 1250$
 - $a_1 = 4$ och $a_4 = 0,5$
 - $a_1 = 3$ och $a_6 = -729$
- 1005** Undersök om följande talföljder är geometriska? Ange i så fall kvot och nästa element i talföljden.
- 2, 18, 162, ...
 - 2, 4, 6, 8, ...
 - 1, -4, 16, -64, ...
 - $12, 3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \dots$
- 1006** Bestäm de fem första elementen i talföljden som beskrivs av formeln $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
- 1007** Bestäm a_{10} i talföljden
- $a_n = 3^{n-1}$
 - $a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ÖVA II

- 1008** Antal vetekorn på varje ruta i legenden om schackspelet utgör en geometrisk talföljd.
- Ange följdens första element.
 - Vilken är kvoten k ?
 - Bestäm en sluten formel för följdens n -te element.
 - Bestäm antal vetekorn på den sista rutan.
- 1009** Vilket är det åttonde elementet i en geometrisk talföljd om $a_3 = 36$ och $a_5 = 324$? **T**
- 1010** Vilket är det sjätte elementet i en geometrisk talföljd om $a_5 = 24$ och $a_8 = 3$?
- 1011** Ange de tre första elementen i den geometriska talföljd där $a_8 = 243$ och $a_9 = 729$. **T**
- 1012** Formulera ett problem som kan lösas med formeln $a_n = a \cdot k^n$ där $a = 5\,000$, $k = 1,03$ och $n = 5$.
- 1013** För en geometrisk talföljd gäller rekursionsformeln $a_n = (-3) \cdot a_{n-1}$, $a_1 = -2$. Bestäm en sluten formel för den följd som bildas av elementen $a_2, a_4, a_6, \dots$
- 1014** I en geometrisk talföljd är $a_1 = 1$ och $k = 1,05$. För vilka n blir $a_n > 2$?

Geometrisk summa

Vi återgår till legenden om schackspelet. Hur många vetekorn sammanlagt skulle uppfinnaren ha fått om han hade fått sin önskan uppfylld? Schackbrädet har 64 rutor och vi kan beräkna det totala antalet genom att summera alla 64 elementen i den geometriska talföljden 1, 2, 4, 8, ..., 2^{63} . Om vi betecknar summan med s_{64} där s står för summa och 64 för antal element i summan, får vi $s_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$

En summa som fås genom att addera elementen i en geometrisk talföljd kallas en *geometrisk summa*. Allmänt kan den skrivas som

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \dots + a_1 \cdot k^{n-1}$$

Är det få termer i summan är det ganska lätt att addera dem för hand.

Är det många termer behövs det en formel för att beräkna summan.

Vi ska härleda formeln för en geometrisk summa.

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \dots + a_1 \cdot k^{n-1} \quad (1)$$

Multipluera båda leden med k .

$$ks_n = a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + a_1 \cdot k^4 + \dots + a_1 \cdot k^n \quad (2)$$

Subtraherar vi ekvation (2) och ekvation (1) ledvis ser vi att flertalet termer i högra ledet tar ut varandra. Kvar blir den sista termen i ekvation (2) och första termen i ekvation (1).

$$ks_n - s_n = a_1 \cdot k^n - a_1$$

Bryt ut s_n i VL och a_1 i H.L.

$$s_n(k - 1) = a_1(k^n - 1)$$

Dividera med $k - 1$, $k \neq 1$.

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}, \quad k \neq 1$$

GEOMETRISK SUMMA

I en geometrisk talföljd med första elementet a_1 och kvoten k kan summan av de n första elementen beräknas med formeln

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}, \quad k \neq 1$$

EXEMPEL

Antal vetekorn på schackbrädet

Bestäm totala antalet vetekorn i legenden om schackbrädet.

LÖSNING:

Totala antalet vetekorn är $s_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$.

Vi tillämpar formeln med $a_1 = 1$, $k = 2$ och $n = 64$.

$$s_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

SVAR: Totala antalet vetekorn är ungefär $1,8 \cdot 10^{19}$.



Beräkna geometrisk summa

Beräkna summan av de nio första elementen i den geometriska talföljden

- a) 3, 15, 75, ... b) 24, 12, 6, ...

LÖSNING:

- a) Första termen $a_1 = 3$

$$\text{kvoten } k = \frac{15}{3} = 5$$

$$\text{antal termer } n = 9$$

$$\text{Formeln } s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \text{ ger}$$

$$s_9 = \frac{3(5^9 - 1)}{5 - 1} = \frac{3(5^9 - 1)}{4} = 1464843$$

- b) Första termen $a_1 = 24$

$$\text{kvoten } k = \frac{12}{24} = 0,5$$

$$\text{antal termer } n = 9$$

$$s_9 = \frac{24(0,5^9 - 1)}{0,5 - 1}$$

Eftersom både täljare och nämnare är negativa kan vi bryta ut -1 och skriva om summan som

$$s_9 = \frac{24(0,5^9 - 1)}{0,5 - 1} = \frac{24(1 - 0,5^9)}{1 - 0,5} = 47,90625$$

SVAR: a) $s_9 = 1\,464\,843$ b) $s_9 = 47,90625$

- 1020** Bestäm summan av de tolv första elementen i talföljden

$$a_n = 1,1 \cdot a_{n-1}, \quad a_1 = 500.$$

ÖVA II

- 1021** Avgör om summan är geometrisk och i så fall beräkna den.

a) $2 + 4 + \dots + 20$

b) $1 + 0,1 + \dots + 0,00001$

c) $2368 - 1184 + \dots + 37$

d) $25 + 50 + 100 + 175 + 275$

- 1022** Lös ekvationen

$$x + x \cdot 1,04 + x \cdot 1,04^2 + \dots + x \cdot 1,04^8 = 2000. \quad \text{T}$$

- 1023** Beräkna summan av de åtta första elementen i en geometrisk talföljd där $a_4 = 108$ och $a_8 = 8748$, $k > 0$.

- 1024** $a_1, a_1 \cdot k, a_1 \cdot k^2, \dots, a_1 \cdot k^{n-1}$ är den n första elementen i en talföljd.

- a) Bestäm summan av elementen i följden om $k = 1$.

- b) Visa att för $-1 < k < 1$ kan summan beräknas med formeln $s_n = \frac{a_1(1 - k^n)}{1 - k}$

- 1025** Beräkna $4 + 1,2 + 0,36 + \dots + 0,0000236196$. T

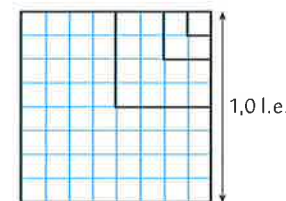
- 1026** Hur många element innehåller en geometrisk talföljd som har första elementet 5, kvoten 4 och summan 109 225?

Problemlösning Här följer några uppgifter för dig som vill träna problemlösning med fokus på geometriska talföljder och summor.

ÖVA II

- 1027** För en geometrisk talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ gäller att $a_3 < a_2 < a_4$. Vad kan man säga om kvoten k ?

- 1028** Mindre och mindre kvadrater bildas enligt figuren. Beräkna summan av de första nio kvadraternas omkrets.



- 1029** Bestäm summan av de tio första elementen i den geometriska talföljden där det första elementet är $\frac{2x}{5}$ och det fjärde elementet är $\frac{2x}{5^4}$

- 1030** I en aritmetisk talföljd är differensen d mellan två varandra följande element konstant. I summan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 920$ bildar termerna en aritmetisk talföljd. De tre termerna a_2, a_3 och a_5 bildar en geometrisk talföljd. Bestäm deras summa. L

- 1031** Två lysande punkter befinner sig på avståndet 2,00 meter från varandra. Punkterna förflyttar sig varje minut mot varandra. Rörelsen beskrivs av den geometriska talföljden $a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$, $a_1 = \frac{1}{2}$. Bestäm avståndet mellan punkterna efter 10 minuter.

ÖVA I

- 1015** Beräkna summan av de åtta första elementen i den geometriska talföljden där $a_1 = 4$ och kvoten $k = 2$.

- 1016** Beräkna summan av de tolv första elementen i den geometriska talföljden där $a_1 = 250$ och kvoten $k = 0,2$. Svara med tre gällande siffror.

- 1017** Beräkna summan av de sju första elementen i den geometriska talföljden där det första elementet är 400 och kvoten är 1,03. Svara med heltal.

- 1018** Beräkna summan av de tio första elementen i de geometriska talföljderna. Svara med heltal.

- a) 2, 4, 8, ... b) 48, 84, 147, ...
c) 12, 3, $\frac{3}{4}$, ... d) -5, 15, -45, ...

- 1019** Beräkna och svara med heltal

- a) $5000 + 5000 \cdot 1,04 + 5000 \cdot 1,04^2 + \dots + 5000 \cdot 1,04^{10}$
b) $100 + 100 \cdot 0,9 + 100 \cdot 0,9^2 + \dots + 100 \cdot 0,9^{15}$
c) $200 \cdot 1,05 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05^3 + \dots + 200 \cdot 1,05^{10}$
d) $1 + 0,8 + 0,8^2 + \dots + 0,8^{24}$

UTMANING

FANTASIHOPP

I ett dataspel hoppar en groda mellan olika platser på jordklotet. Grodan hoppar på sådant sätt att varje nytt hopp är dubbelt så långt som det föregående. Hur många hopp behöver grodan för att komma runt ekvatorn om det första hoppet är 1 m? Ekvatorns längd är 40 076 m.

1
3
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 I en geometrisk talföljd är skillnaden mellan två på varandra följande element alltid lika stor.
- 2 $500 + 500 + 500 + \dots + 500$ är en geometrisk summa.
- 3 En geometrisk summa kan aldrig vara negativ.
- 4 Kvoten i en geometrisk summa kan aldrig vara mindre än 1.
- 5 En geometrisk summa kan aldrig vara mindre än det första elementet.
- 6 En geometrisk summa kan innehålla ett oändligt antal element.
- 7 Om det för en oändlig geometrisk summa gäller att kvoten k uppfyller $-1 < k < 1$ så har summan gränsvärdet $\frac{a_1}{1-k}$



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

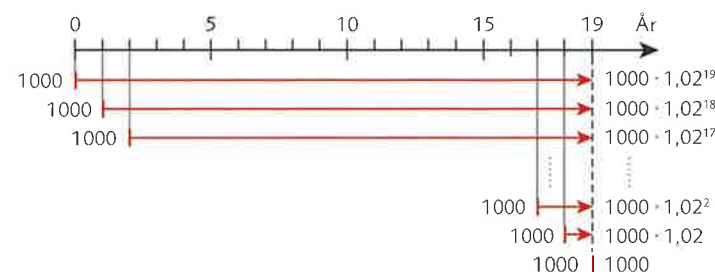
1.2 Kontinuerligt sparande och annuitetslån

Både vid sparande och vid återbetalningar på lån är det vanligt att insättningar görs regelbundet. Om man vill beräkna hur mycket det finns efter en längre tids regelbundet sparande eller hur mycket man ska betala i ränta och amortering har man ofta nytta av *geometrisk summa*.

Kontinuerligt sparande

Låt oss studera ett exempel där man sätter in 1 000 kr varje årsskifte 20 gånger. Vi antar att årsräntesatsen hela tiden är 2,0 % efter skatt och att vi ska beräkna hur mycket som finns på kontot direkt efter den sista insättningen. Ett omständigt sätt är att ta ett år i taget, beräkna räntan och därefter ett nytt belopp inklusive ränta och nyinsatta pengar och upprepa det 20 gånger. Det tar lång tid!

Ett effektivare sätt är att använda en tidsaxel och föra in vad som händer år för år och därefter använda en geometrisk summa för att beräkna värdet efter den sista insättningen. För att teckna värdet efter exempelvis 19 år används den sammanlagda förändringsfaktorn $1,02^{19}$.



Observera följande väsentliga punkter:

- I figuren ritas inte samtliga pilar ut men det finns 20 insättningar à 1 000 kr.
- Om man gör 20 insättningar har det gått 19 år mellan den första och den sista insättningen.
- Vi betraktar insättningarna var för sig och bestämmer hur värdet av varje insättning har förändrats under aktuellt antal år.
- Den sista insättningen har inte resulterat i någon ränta eftersom vi bestämmer det sammanlagda värdet direkt efter den insättningen.
- Till höger om den streckade linjen står samtliga värden som ska summeras.
- Summan av alla insättnings värde blir en geometrisk summa med 20 värden, 1 000 kr som startvärde och 1,02 som kvot.

Vi beräknar värdet med formeln för geometrisk summa, där startvärdet $a = 1\,000$, kvoten $k = 1,02$ och antalet värden $n = 20$:

$$s = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

$$s = 1\,000 + 1\,000 \cdot 1,02 + 1\,000 \cdot 1,02^2 + \dots + 1\,000 \cdot 1,02^{18} + 1\,000 \cdot 1,02^{19} = \frac{1\,000(1,02^{20} - 1)}{1,02 - 1} \approx 24\,297$$

De 20 insättningar på sammanlagt 20 000 kr har växt till ungefär 24 300 kr på 19 år om räntesatsen hela perioden är 2,0 %.

Ett annat sätt att illustrera samma exempel är att använda en tabell. Den illustrerar också hur varje tusenlapp växer som mest upp till 19 år. I tabellen skrivs inte samtliga värden ut men det finns (precis som i figuren med pilarna) 20 insättningar à 1 000 kr. I den högra kolumnen står de värden som ska summeras.

Insättning nr	Insatt belopp (kr)	Slutvärde (kr)
1	1 000	$1000 \cdot 1,02^{19}$
2	1 000	$1000 \cdot 1,02^{18}$
3	1 000	$1000 \cdot 1,02^{17}$
...	...	...
18	1 000	$1000 \cdot 1,02^2$
19	1 000	$1000 \cdot 1,02$
20	1 000	1000

EXEMPEL

Kontinuerligt sparande

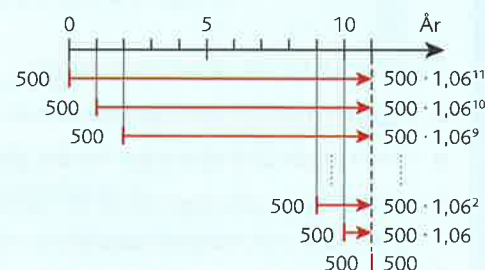
Klas sparar 500 kr varje årsskifte under 12 år på ett fondsparande med en årsränta på 6 %. Hur mycket har han på sitt fondkonto direkt efter den tolfte och sista inbetalningen?

LÖSNING:

Klas gör sammanlagt tolv insättningar. Årsräntesatsen är 6 %. Förändringsfaktorn blir 1,06.

Vi ritar en tidsaxel (men det går bra med en tabell också) och markerar insättningarna och deras värden vid det sista årsskiftet. Den första insättningen har funnits på kontot i elva år.

Summan av insättningarnas värde tecknas och formeln för geometrisk summa används för att bestämma det sammanlagda värdet.



$$s = 500 + 500 \cdot 1,06 + 500 \cdot 1,06^2 + \dots + 500 \cdot 1,06^{10} + 500 \cdot 1,06^{11} = \frac{500(1,06^{12} - 1)}{1,06 - 1} \approx 8\,435$$

SVAR: Klas har 8 435 kr på kontot.

ÖVA I

1032 Lucias föräldrar inleder ett sparande för sin dotter på hennes ettårsdag som infaller vid nyår. De sätter vid varje årsskifte in 2 000 kr på ett konto som förväntas ge 4 % ränta efter skattekostnader. Hur mycket finns det på kontot efter insättningen på hennes 19-årsdag?

1033 Hur mycket finns det på ett konto om man sparar 1 000 kr varje årsskifte i 65 år? Beräkna värdet direkt efter den 65:e inbetalningen och med en årsräntesats på 3 % efter skatt.

1034 Peter sparar varje årsskifte 1200 kr av sitt studiebidrag under gymnasietiden. Årsräntesatsen är 2,2 % efter skatt. Hur mycket har han inklusive ränta direkt efter den 3:e insättningen?

1035 Ett fondsparande ger årsräntan 4,8 % efter skatt. Hur mycket finns det på kontot efter den sista insättningen inklusive ränta om man sätter in 5 000 kr varje år i 18 år?

1036 Mariam, som är 19 år, vill ha ett kapital på 100 000 kr till sin 50-årsdag. Hon gör en beräkning och kommer fram till att hon ska sätta in 2 200 kr på ett konto varje år från det året hon fyller 20 år till och med det året hon fyller 50 år. Mariam räknar med att årsräntesatsen hela tiden är 2,5 %. Kommer Mariam att lyckas med sin målsättning?

ÖVA II

1037 Hur mycket hade Klas i exemplet *Kontinuerligt sparande* på s. 20 haft på kontot om han hade satt in hela beloppet på 6 000 kr samtidigt och vid en tidpunkt precis 5 år efter den första inbetalningen? Jämför med resultatet från exemplet.

1038 Mona har ett bankkonto, där hennes mormor har satt in 1 000 kr varje årsskifte från det att Mona föddes till dess att hon är 19 år. Sammanlagt har mormor hunnit med 20 insättningar. När Mona är 25 år, det vill säga sex år efter den sista insättningen, behöver hon pengarna till en ny lägenhet. Hur mycket har hon på sitt konto då om årsräntesatsen hela tiden varit 3,5 % efter skatt? **T**

1039 Hur mycket måste Johan spara varje år för att ha 50 000 kr efter den tjugonde insättningen om årsräntesatsen hela sparperioden är 4 % efter skatt?

1040 Johan funderar på vad han skulle behöva sätta in vid ett enda tillfälle för att ha 50 000 kr tio år senare med samma räntesats som i föregående uppgift. Hjälp honom att beräkna det.

1041 Ge ett problem som kan lösas med hjälp av ekvationen $\frac{1500(1,03^x - 1)}{0,03} = 50\,000$.

Nuvärde, slutvärde och annuitetslån

För att göra beräkningar på annuitetslån är det bra att känna till begreppen *nuvärde* och *slutvärde*. Ett nuvärde beräknas genom att korrigera ett kommande värde med en procentuell nedräkning som kan motsvara inflationen (penningvärdets försämring) eller ränta. Ett slutvärde är det värde som fås i slutet av den period man studerar.

Ett exempel som illustrerar begreppen kan se ut så här. Mia är tio år och hennes föräldrar har lovat att ge henne 5 000 kr på hennes femtonårsdag för att hon ska kunna köpa en moped eller spara pengarna till sitt körkort när hon fyller 18 år. Om pengarna skulle placeras på ett sparande skulle räntan hela perioden vara 3 %.

Nuvärdet är det belopp som behövs idag för att växa till 5 000 kr inom fem år.

Om beloppet idag är x kr får vi ekvationen

$$x \cdot 1,03^5 = 5\,000$$

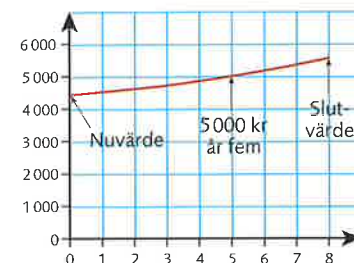
Nuvärdet fås alltså genom att dividera 5 000 kr med förändringsfaktorn $1,03^5$.

$$\frac{5\,000 \text{ kr}}{1,03^5} \approx 4\,313 \text{ kr}$$

Om Mia bestämmer sig för att spara pengarna till sitt körkort kan hon beräkna slutvärdet av 5 000 kr under perioden från 15-årsdagen till 18-årsdagen. Då ska hon multiplicera beloppet med förändringsfaktorn $1,03^3$.

$$5\,000 \text{ kr} \cdot 1,03^3 \approx 5\,464 \text{ kr}$$

Diagrammet illustrerar begreppen.



Exempel Beräkna nuvärdet

Ulrik har lånat pengar av Per-Olof och har lovat att betala 20 000 kr om två år men Ulrik har oväntat lyckats tjäna lite extra pengar och vill betala skulden med detsamma. Hur mycket ska han betala för att värdet ska motsvara 20 000 kr om två år om man räknar med en inflation på 2,5 %?

LÖSNING:

Beräkningsmässigt är det ingen skillnad om det är en inflation eller en kalkylerad ränta på 2,5 %. Inflationen motsvarar en förändringsfaktor på 1,025.

Ulrik ska betala nuvärdet av 20 000 kr:

$$\frac{20\,000 \text{ kr}}{1,025^2} \approx 19\,036 \text{ kr}$$

SVAR: Ulrik ska betala 19 036 kr till Per-Olof.

Ett *annuitetslån* innebär att varje inbetalning är lika stor. Det betyder att summan av amortering och ränta är konstant. I början, när skulden är hög, är amorteringarna lägre eftersom man har högre räntekostnader men efterhand som skulden minskar ökar amorteringarna eftersom räntekostnaderna minskar.

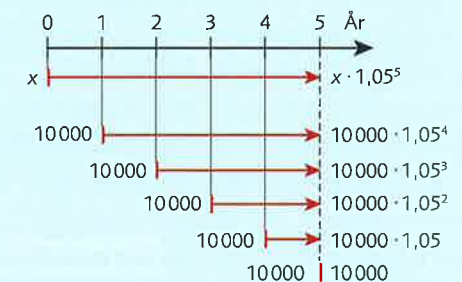
Vid beräkningar av delbetalningar av ett annuitetslån, tecknas värdet av lånet på slutbetalningsdagen, det vill säga slutvärdet. Detta värde ska vara lika stort som motsvarande slutvärde av samtliga inbetalningar på lånet. I de två följande exemplen visas hur beräkningarna utförs.

Exempel Annuitetslån med givna inbetalningar

Kerstin ska låna pengar till att köpa en häst. Hon bedömer att hon kan betala 10 000 kr varje år och vill betala av hela lånet på fem år. Räntesatsen är 5 %. Hur mycket har Kerstin råd att låna?

LÖSNING:

Eftersom Kerstin vill betala lika mycket varje år är annuitetslån lämpligt. Vi ritar en tidsaxel och låter den översta pilen motsvara slutvärdet av lånet efter fem år och de andra pilarna motsvara inbetalningarnas värde vid samma tidpunkt. Eftersom lånets storlek är obekant sätter vi värdet till x kr.



Värdet av lånet på x kr är fem år senare $x \cdot 1,05^5$.

Värdet av alla inbetalningar efter fem år kan enligt figuren skrivas

$$10\,000 + 10\,000 \cdot 1,05 + 10\,000 \cdot 1,05^2 + 10\,000 \cdot 1,05^3 + 10\,000 \cdot 1,05^4 = \frac{10\,000(1,05^5 - 1)}{1,05 - 1} \approx 55\,256$$

Eftersom inbetalningarnas värde ska motsvara lånets värde efter fem år får vi ekvationen

$$x \cdot 1,05^5 = 55\,256$$

$$x = \frac{55\,256}{1,05^5}$$

$$x \approx 43\,295$$

Observera att räntekostnaden blir 50 000 kr – 43 295 kr = 6 705 kr.

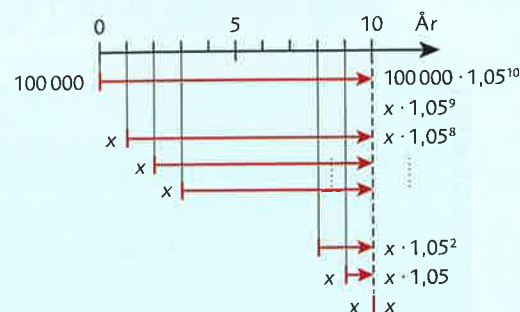
SVAR: Kerstin kan låna 43 295 kr.

Annuitetslån med given slutsumma

Amanda ska låna 100 000 kr med en inbetalning per år tio år framåt. Hon vill att räntekostnaderna och amorteringarna tillsammans ska vara lika mycket vid varje inbetalningstillfälle och väljer därför ett annuitetslån. Hur mycket ska Amanda betala per år?

LÖSNING:

Vi ritar en tidsaxel och låter den översta pilen motsvara slutvärdet av lånet tio år senare och de andra pilarna motsvara inbetalningarnas värde vid samma tidpunkt. Eftersom inbetalningarnas storlek är obekant sätter vi värdet av dessa till x kr.



Värdet av lånet efter tio år är $100\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 162\,889$
 Värdet av alla inbetalningar då det gått tio år kan skrivas
 $x + x \cdot 1,05 + x \cdot 1,05^2 + x \cdot 1,05^3 + \dots + x \cdot 1,05^9 =$

$$= \frac{x(1,05^{10} - 1)}{1,05 - 1} \approx x \cdot 12,5779$$

Eftersom inbetalningarnas värde ska motsvara lånets värde vid samma tidpunkt får vi ekvationen
 $x \cdot 12,5779 = 162\,889$

$$x = \frac{162\,889}{12,5779} \approx 12\,950$$

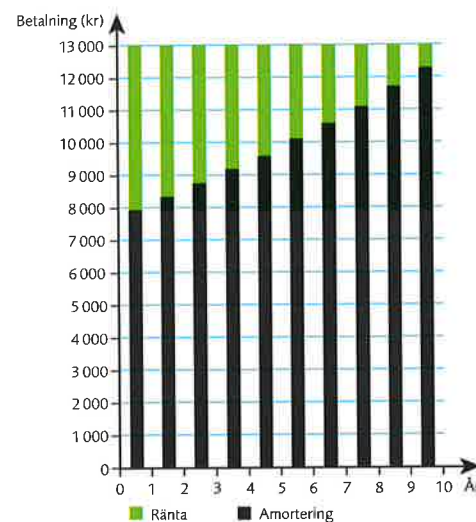
Observera att den sammanlagda kostnaden på tio år blir 129 500 kr och att räntekostnaden därmed är 29 500 kr.

SVAR: Amanda ska betala 12 950 kr per år.

Eftersom 5 % ränta på 100 000 kr är 5 000 kr kommer Amanda det första året amortera 12 950 kr – 5 000 kr = 7 950 kr.

Därefter har skulden minskat till 92 050 kr, vilket innebär att räntekostnaden nästa år blir lägre. Därmed blir amorteringen högre eftersom summan hela tiden är 12 950 kr.

Diagrammet visar andelen amortering och ränta vid varje betalning. Summan av de röda staplarna är 100 000 kr medan summan av de gröna staplarna är den totala räntekostnaden. Den är 29 500 kr eftersom Amanda sammanlagt betalar 129 500 kr.



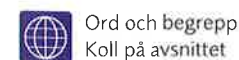
ÖVA I

I uppgifterna 1042–1045 ska du räkna med en förändringsfaktor på 1,05 per år på de aktuella kapitalen.

- 1042** a) Vad är slutvärdet under en tioårsperiod om nuvärdet är 5 000 kr?
 b) Vad är nuvärdet under en tioårsperiod om slutvärdet är 5 000 kr?
- 1043** Om fem år ska Adrian få ett engångsbelopp på 15 000 kr i pension.
 a) Vad är värdet av beloppet idag?
 b) Vad är värdet av beloppet om tio år?
- 1044** Gustaf är skyldig Katarina 25 000 kr som ska betalas om tre år. Vad bör Gustaf betala idag om han vill göra sig skuldfri?
- 1045** Valdemar har lovat att betala sin bror 10 000 kr år 2015 och 20 000 kr år 2020. Vad är det sammanlagda värdet av hans betalningar år 2025?

ÖVA II

- 1046** Randi har lånat pengar och har avtalat om att betala 1 000 kronor per år fem gånger med den första inbetalningen om ett år. Räntesatsen kan antas vara 4 %.
 a) Vad är värdet av inbetalningarna om fem år (slutvärdet)?
 b) Vad är värdet av betalningarna idag (nuvärdet)? **L**



- 1047** Karim vill låna pengar för att kunna köpa en liten studentlägenhet. Han bedömer att han kan betala 30 000 kr varje år och vill betala av hela lånet på tio år med den första inbetalningen efter ett år. Årsräntesatsen är 6 %. Hur mycket har Karim råd att låna om han betalar ränta och amortering en gång per år?
- 1048** Alina vill låna 250 000 kr med en inbetalning per år tjugo år framåt. Hon vill att räntekostnaderna och amorteringarna tillsammans ska vara lika mycket vid varje inbetalningstillfälle och väljer därför ett annuitetslån. Hur mycket ska Alina betala per år om den första inbetalningen görs efter ett år? Årsräntesatsen är 5 %.
- 1049** Karolina tar ett annuitetslån på fem år med årsvisa inbetalningar, den första efter ett år. Lånebeloppet är 200 000 kr och med årsräntesatsen 4,8 %.
 a) Hur mycket ska Karolina betala per år?
 b) Hur mycket har hon betalat i ränta sammanlagt

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Då ett belopp sätts in på ett konto vid ett barns födelse och får växa med årlig ränta till dess barnet är myndig, beräknas slutvärdet av beloppet med hjälp av geometrisk summa.
- 2 Med nuvärde menas att framtida kostnader eller inkomster omräknas till ett värde just nu.
- 3 Med slutvärde menas ett framtida värde på ett belopp efter en eventuell ökning på grund av t.ex. ränta.
- 4 Ett annuitetslån har samma amortering vid varje betalningstillfälle.
- 5 Ett annuitetslån har samma räntekostnad vid varje betalningstillfälle.
- 6 Under avbetalning av ett annuitetslån sjunker inbetalningarnas storlek med tiden.



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

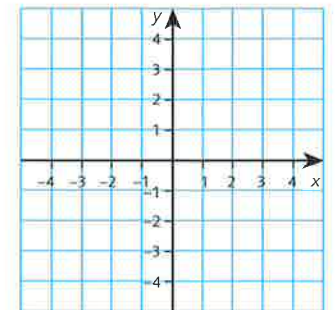
1
5
6
7

1.3 Linjär optimering

Ett företag erbjuder två typer av tjänster A och B. Respektive tjänst inbringar olika vinst men tar även olika lång tid att utföra. Företaget vill nu se över hur de kan effektivisera sin verksamhet för att öka vinsten. Det här är ett exempel på linjär optimering. Linjär optimering är en matematisk modell som användas för att lösa denna typ av problem och förutsätter att de faktorer som påverkar lösningen kan beskrivas med linjära funktioner.

Områden i planet

Det koordinatsystem som vi använder är ett exempel på ett plan som spänns upp av de två vinkelräta axlarna. Eftersom vi benämner axlarna med x respektive y kommer vi i fortsättning att kalla koordinatsystemet för ett xy -plan. Med hjälp av funktioner kan du rita in grafer. En graf delar in planet i områden. I detta avsnitt kommer du bland annat lära dig hur du med hjälp av olikheter kan beskriva områden i planet skapade av räta linjer.



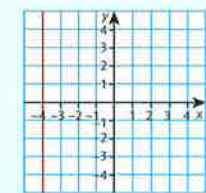
I kurs 2b har du bland annat arbetat med räta linjens ekvation och dess graf samt löst linjära ekvationssystem där räta linjer ingår.

Räta linjens ekvation på k -form är $y = kx + m$ där k anger linjens lutning och m är y -koordinaten för linjens skärningspunkt på y -axeln.

Räta linjen

Rita i ett xy -plan linjen

a) $x = -4$ b) $y = 3$ c) $y = -2x + 5$

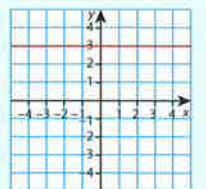
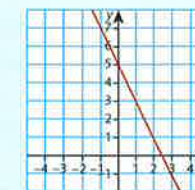


LÖSNING OCH SVAR:

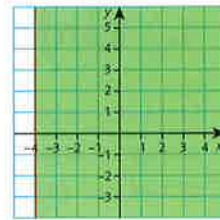
a) För linjen $x = -4$ gäller att y -koordinaten kan anta alla reella värden. Alltså är linjen parallell med y -axeln med x -koordinat -4 .

b) För linjen $y = 3$ gäller att x -koordinaten kan anta alla reella värden. Alltså är linjen parallell med x -axeln med y -koordinaten 3 .

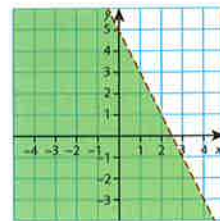
c) Linjen skär y -axeln i punkten $(0, 5)$. Vi utgår från den när vi markerar några punkter för att dra linjen. Lutningen $k = -2$, innebär att för ett steg i x -led åt höger, ändrar sig linjen två steg nedåt i y -led.



Vi har hittills betraktat linjer ritade i ett koordinatsystem. En linje delar planet i två områden. Olikheten $x \geq -4$ beskriver området till höger om linjen $x = -4$ där även linjen är inkluderad. Det markeras genom att dra en heldragen linje.



Olikheten $y < -2x + 5$ beskriver området till vänster om linjen $y = -2x + 5$ där linjen inte ingår (linjen är exkluderad). Det markerar vi med en streckad linje.



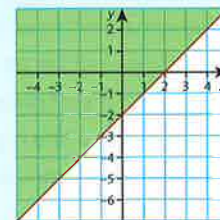
Område i planet I

Beskriv det markerade området med en olikhet.

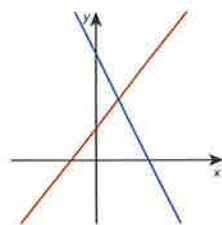
LÖSNING:

Området till vänster om linjen $y = x - 2$ inklusive linjen är markerad. För alla punkter inom området gäller $y \geq x - 2$.

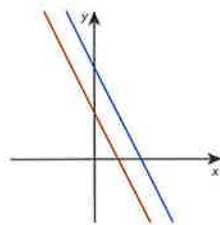
SVAR: $y \geq x - 2$



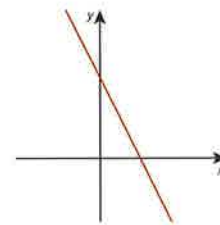
Två linjer inritade i ett koordinatsystem kan skära varandra i en punkt, vara parallella eller sammanfalla.



Två linjer som skär varandra i en punkt.



Två parallella linjer.



Två sammanfallande linjer.

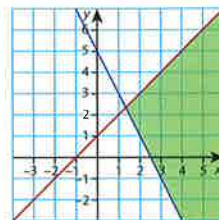
När vi vill bestämma skärningspunkten mellan två linjer ställer vi upp ett ekvationssystem.

Ekvationssystemet $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$ ger två linjer som skär varandra i en punkt

och är åskådliggjort i den vänstra bilden. Skärningen mellan de två linjer ger upphov till fyra områden. Vill vi beskriva de här områdena får vi ställa upp

ett system av olikheter. Olikhetssystemet $\begin{cases} y \geq -2x + 5 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$ beskriver området

som är längst till höger i figuren, dvs. området som är till höger om linjen $y = -2x + 5$ och till höger om linjen $y = x + 1$, inklusive linjerna.



EXEMPEL

Område i planet II

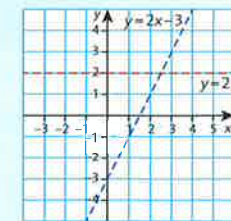
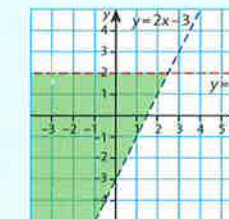
Markera i ett xy -plan det område som beskrivs av följande olikhetssystem.

$$\begin{cases} y > 2x - 3 \\ y < 2 \end{cases}$$

LÖSNING:

Vi ritar ett koordinatsystem och ritar in linjerna $y = 2x - 3$ och $y = 2$. Eftersom det endast är olikhetstecken (öppen olikhet) streckmarkerar vi linjerna. $y > 2x - 3$ beskriver området till vänster om linjen $y = 2x - 3$ och $y < 2$ området nedanför linjen $y = 2$.

Lösningen på olikhetssystemet är de punkter som uppfyller båda olikheterna, dvs. området nedanför linjen $y = 2$ och till vänster om linjen $y = 2x - 3$. Vi skuggar området.

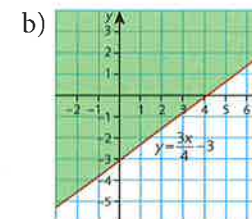
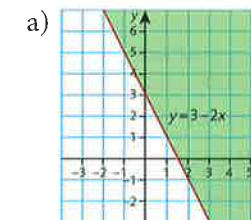


ÖVA 1

1050 Rita ett xy -plan och lös grafiskt olikheten

- a) $x \leq 3$ b) $y > 0$
c) $y \geq x - 1$ d) $y - 2x < 0$

1051 Beskriv med en olikhet det markerade området

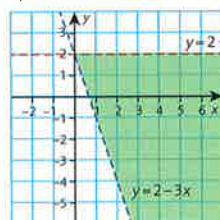


1052 Markera i ett koordinatsystem följande områden

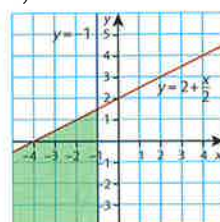
- a) $\begin{cases} x > 3 \\ y < -1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y < x - 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y > 3x \\ y < -x \end{cases}$
d) $\begin{cases} y \leq 3 - x \\ y \geq -1 \end{cases}$

1053 Beskriv det markerade området med ett system av olikheter

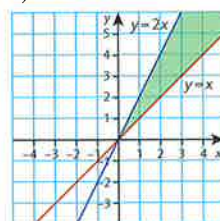
a)



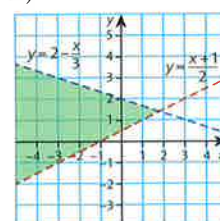
b)



c)



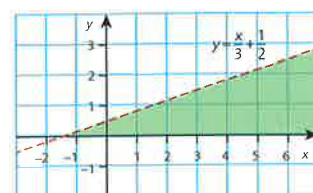
d)



1054 I teoritexten på s. 28 är ett av de fyra områden som skärningen mellan linjerna $y = -2x + 5$ och $y = x + 1$ ger upphov till angivet med ett olikhetssystem. Beskriv de övriga områdena med olikhetssystem.

ÖVA II

1055 Beskriv med ett system av olikheter det markerade området.



1056 a) Rita ett xy -plan och dra de fyra linjerna $y = -2$, $y = 3$, $x = -1$ och $x = 4$.

b) Beskriv med ett olikhetssystem området som begränsas av de fyra linjerna.

1057 Markera i ett xy -plan området
$$\begin{cases} y < 3 \\ y > x \\ y > -x \end{cases}$$

1058 Beskriv med ett system av olikheter området som begränsas av linjerna $x = -2$, $y = 2x + 1$ och $y = 4 - x$.

1059 Lös grafiskt
$$\begin{cases} y > x - 2 \\ y < 2x + 1 \\ y < -x - 1 \end{cases}$$

Största och minsta värde i ett område

Att lösa ett linjärt optimeringsområde innebär ofta att man söker största eller minsta värde för en funktion i två variabler under vissa *bivillkor*. Vi börjar med att titta på ett exempel för att förstå vad en funktion av två variabler är.

Skolans cafeteria säljer tuggummi för 1 krona styck och små chokladbitar för 2 kr styck. Anta att de säljer x tuggummi och y chokladbitar per dag. Deras intäkt blir då $x \cdot 1 + y \cdot 2 = x + 2y$. Detta är en linjär funktion i två variabler. Låt oss beteckna den med $F(x, y)$. I detta exempel är $F(x, y) = x + 2y$. Värdet av $F(x, y)$ beror både på x och y . För $x = 10$ och $y = 8$ är $F(10, 8) = 10 + 2 \cdot 8 = 26$. När x och y växer kommer också värdet av $F(x, y)$ växa.

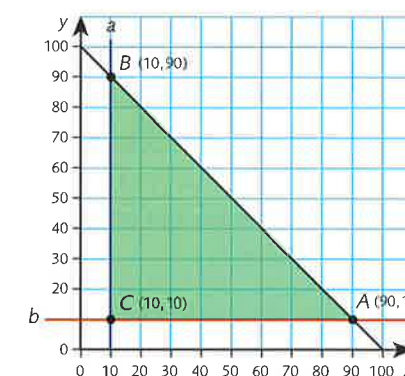
Cafeterian har inte plats för ett obegränsat lager av tuggummi och chokladbitar. De har plats för sammanlagt 100 tuggummin och chokladbitar.

De har också minst 10 av varje sort i lager. Vi har alltså begränsning på det sammanlagda antalet x och y , dvs. $x + y \leq 100$. Vi vet också att $x \geq 10$ och $y \geq 10$.

Detta är funktionens *bivillkor*. Vi kan ställa upp följande olikhetssystem för bivillkoren:

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 10 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

De tre olikheterna ger upphov till ett område, begränsat av tre linjer. Ritar vi in området i ett koordinatsystem kan vi konstatera att det är en triangel.



Vi är intresserade av vilka värden funktionen $F(x, y) = x + 2y$ kan anta för punkter (x, y) som tillhör det slutna området. Vi börjar med funktionsvärdena i hörnpunkterna.

$$A = (90, 10) \text{ ger } F(90, 10) = 90 + 2 \cdot 10 = 110$$

$$B = (10, 90) \text{ ger } F(10, 90) = 10 + 2 \cdot 90 = 190$$

$$C = (10, 10) \text{ ger } F(10, 10) = 10 + 2 \cdot 10 = 30$$

Förflyttar vi oss från hörn C till hörn A utefter sidan AC är $y = 10$. Då är funktionen $F(x, y) = F(x, 10) = x + 20$, $10 \leq x \leq 90$. Det minsta värdet (30) får vi i punkten C och det största (110) i punkten A. Alltså är $30 \leq F(x, 10) \leq 110$.

Utefter sidan AB är $y = 100 - x$ och $F(x, y) = x + 2(100 - x) = 200 - x$, $10 \leq x \leq 90$. En förflyttning från hörn A till hörn B ger att värdet för funktionen $F(x, y)$ ökar från 110 till 190.

Utefter triangelns tredje sida BC är $x = 10$. Det ger att $F(10, y) = 10 + 2y$, $10 \leq y \leq 90$. En förflyttning från hörn B till hörn C ger att värdet för funktionen $F(x, y)$ minskar från 190 till 30, dvs. $30 \leq F(10, y) \leq 190$.

Vi kan konstatera att på områdets rand får funktionen $F(x, y)$ sitt största värde (190) i punkten B och sitt minsta värde (30) i punkten C.

Gruppaktivitet

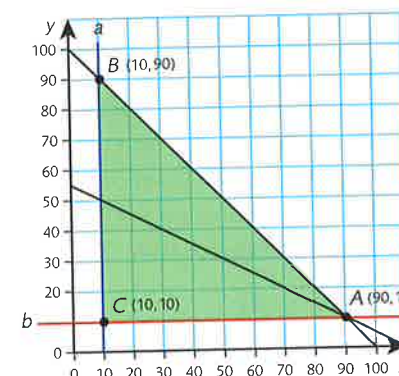
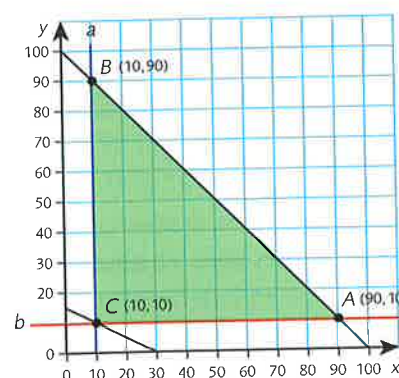
UTTRYCKS VÄRDE PÅ SLUTET OMRÅDE

I den här övningen ska ni undersöka värdet av uttrycket $2x + 3y$ när (x, y) är punkter i xy -planet i ett område begränsat av en sluten polygon i form av trianglar, fyrhörningar och femhörningar. Vilka slutsatser kan ni dra?

För att undersöka värden på funktionen $F(x, y) = x + 2y$ för alla punkter med heltalskoordinater innanför randen löser vi ut y . Det ger $y = -\frac{x}{2} + \frac{F(x, y)}{2}$ vilket är en rät linje med riktningskoefficient $k = -\frac{1}{2}$ och som skär y -axeln i $m = \frac{F(x, y)}{2}$. Ritar vi in den i punkten $C = (10, 10)$ kommer den att skära y -axeln i $m = 15$, eftersom $F(10, 10) = 30$.

Ritar vi in linjen i punkten A ser vi att den skär för $m = 55$. Alla punkter på den linjen ger samma intäkt. Fortsätter vi att parallellförskjuta linjen mot hörnet B får vi för varje läge en intäkt som är lägre än den maximala intäkten 190 kr.

För att bestämma största respektive minsta värde för en linjär funktion $F(x, y)$ på ett slutet område som är en månghörning räcker det att beräkna funktionsvärdet i hörnpunkterna.



Största och minsta värdet

Bestäm största och minsta värde av funktionen $F(x, y) = 3x + 2y$ i den markerade fyrhörningen.

LÖSNING:

Vi beräknar funktionsvärdet i fyrhörningens hörnpunkter.

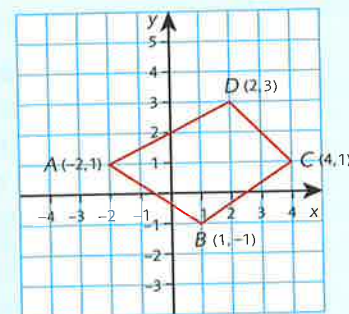
$A = (-2, 1)$ ger $F(-2, 1) = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4$

$B = (1, -1)$ ger $F(1, -1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1$

$C = (4, 1)$ ger $F(4, 1) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 12 + 2 = 14$

$D = (2, 3)$ ger $F(2, 3) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = 12$

SVAR: Funktionens största värde är 14 och minsta värde är -4.



Cateringföretag

Ett cateringföretag erbjuder två olika menyer A och B. De har kontrakt på att varje dag leverera minst 60 portioner av meny A och minst 15 portioner av meny B. De har resurser för att kunna leverera 300 portioner per dag varav som mest 225 av meny A och 180 av meny B. Anta att cateringföretaget kan leverera a menyer A och b menyer B, a och b positiva heltal. Vinsten för meny A är 7,50 kr och för meny B 15 kr. Hur ska a och b väljas för att ge maximal vinst per dag?

LÖSNING:

Vi börjar med att ställa upp ett uttryck för vinstfunktionen V . Den beror på variablerna a och b .

$V(a, b) = 7,50a + 15b$. Vi har också tre bivillkor. De är

$$60 \leq a \leq 225 \quad (1)$$

$$15 \leq b \leq 180 \quad (2)$$

$$a + b \leq 300 \quad (3)$$

Mellan a och b råder ett linjärt samband. Löser vi ut b , får vi olikheten $b \leq 300 - a$. Vi ritar in linjen $b = 300 - a$ i ett koordinatsystem och markerar de begränsningar som gäller för a och b . Alla punkter med heltalsvärden inne och på randen till femhörningen uppfyller de tre sambanden. Vi namnger samtliga hörn i femhörningen.

Vi söker den kombination (a, b) som under de givna villkoren ger maximal vinst.

Vi beräkna vinsten i de fem hörnpunkterna.

$A = (60, 15)$ ger $V(60, 15) = 7,50 \cdot 60 + 15 \cdot 15 = 675$

$B = (225, 15)$ ger $V(225, 15) = 7,50 \cdot 225 + 15 \cdot 15 = 1912,50$

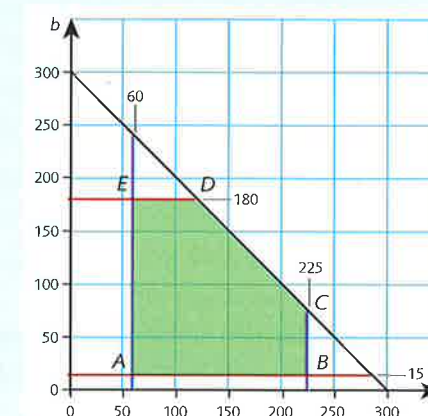
$C = (225, 75)$ ger $V(225, 75) = 7,50 \cdot 225 + 15 \cdot 75 = 2812,50$

$D = (120, 180)$ ger $V(120, 180) = 7,50 \cdot 120 + 15 \cdot 180 = 3600$

$E = (60, 180)$ ger $V(60, 180) = 7,50 \cdot 60 + 15 \cdot 180 = 3150$

För femhörningens rand får vi maximal vinst i hörnpunkten D.

SVAR: Maximal vinst fås när $a = 120$ och $b = 180$.



En linjär funktion $F(x, y)$ där bivillkoren utgör en sluten månghörning antar sitt största respektive minsta värde i något av månghörningens hörn.

ÖVA 1

1060 $F(x, y) = 5x - 2y$. Bestäm $F(x, y)$ då

a) $x = 1, y = 1$

b) $x = -1, y = 4$

c) $x = 10, y = -6$

d) $x = -2, y = -5$

1061 Bestäm det största och minsta värde för funktionen $F(x, y)$ i triangeln som har sina hörn i $(-3, 1)$, $(2, -5)$ och $(3, 4)$ då

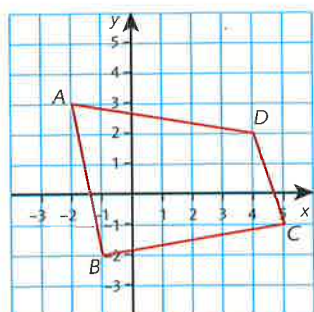
a) $F(x, y) = x + 5y$

b) $F(x, y) = -2x + 3y$

c) $F(x, y) = 4x - y$

d) $F(x, y) = 3x - 7y$

- 1062** Bestäm minsta värde för $F(x, y) = 2x + 9y$ inom den slutna månghörningen.



- 1063** Olikheterna $x \geq -1$, $y \geq 1$ och $y \leq 5 - 2x$ begränsar ett slutet område. Bestäm största och minsta värde för funktionen $F(x) = 10x + 6y$ i det slutna området.

- 1064** Christian och Erland har startat ett Ungt Företag som ska sälja julgranar. De har två sorters granar, rödgran R och kungsgran K. De kan som mest sälja 600 granar, varav minst 80 kungsgranar. De räknar med att sälja minst dubbelt så många rödgranar som kungsgranar. Priset för en rödgran är 200 kr och för en kungsgran 400 kr.

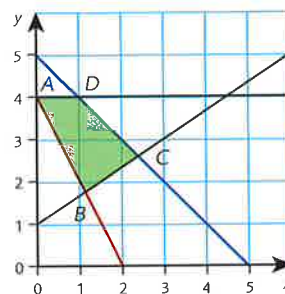
- Ställ upp en funktion $F(r, k)$ som beskriver deras intäkter om de säljer r rödgranar och k kungsgranar.
- Ställ upp bivillkoren.
- Åskådliggör i ett koordinatsystem det slutna område som bivillkoren bestämmer.
- Vilket antal rödgranar (r) och kungsgranar (k) ger störst intäkt?

ÖVA II

- 1065** En grupp studenter och lärare planerar att göra en studieresa. De har hos en resebyrå förhandlat till sig bra priser under förutsättningar att gruppen består av högst 48 personer. Ett annat villkor är att gruppen måste bestå av minst 28 personer. Lärarna måste vara minst 5 och de får inte vara fler än 12. Låt x vara antalet studenter och y antalet lärare i gruppen.

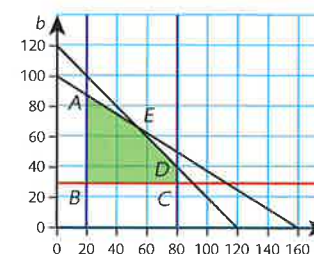
- Ställ upp alla olikheter.
- Vilket är det minsta antal lärare som måste åka med om 20 studenter deltar?
- Bestäm största antal studenter som kan delta i gruppresan om det är 6 lärare som åker med.
- Rita i ett koordinatsystem det område som olikheterna genererar.
- Kostnaden för resan ges av funktionen $K(x, y) = 2400x + 4000y$. Förklara med ord funktionen.
- Hur ska gruppen vara sammansatt för att kostnaden ska minimeras?
- Vilken grupsammansättning föredrar resebyrån?

- 1066** Figuren visar ett möjligt område ABCD för ett linjärt optimeringsproblem.



- Skriv ner de olikheter som beskriver området.
- Bestäm x och y så att funktionen $F(x, y) = x + 2y$ får ett största värde.
- I punkten B har funktionen $y = kx + m$ ett minimum. Bestäm möjliga värden på konstanterna k och m .

- 1067** En gatuförsäljare säljer två produkter M och N . Det skuggade området visar de bivillkor entreprenören har för sin dagliga försäljning.



Antag att gatuförsäljaren har m stycken av produkt M och n stycken av produkt N i lager.

- Skriv ner olikheterna som bivillkoren ger upphov till.
- Beskriv med ord bivillkoren.
- Bestäm vinstfunktionen $V(m, n)$ om produkt M ger en vinst på 14 kr och produkt N en vinst på 10 kr.
- För vilka värden på m och n får gatuförsäljaren maximal vinst? Ange även vinsten.
- Gatuförsäljaren får på produkt M vinsten k kronor och på produkt N vinsten 10 kr. Bestäm möjliga värden på k om vinstfunktionen V är maximal i punkten E .

- 1068** Ett chokladfabrik framställer två olika sorters choklad, L och M. De tillverkar dagligen x kg L och y kg M, varav minst 50 kg M. De kan högst framställa 700 kg och de måste framställa minst 450 kg. Antalet kg av choklad L måste vara minst dubbelt så många som antalet kg av choklad M.

- Ställ upp alla olikheterna.
- Rita in området i ett koordinatsystem
- Låt $F(x, y)$ vara den dagliga framställningskostnaden av x kg L och y kg M. Hur ska x och y väljas om framställningskostnaden för L är 16 kr/kg och för M 10 kr/kg och chokladfabriken vill ha så låg daglig framställningskostnad som möjligt?
- Bestäm vilken framställning av L och M som är mest ekonomisk om L och M säljs för samma pris.



UTMANING

STÖRSTA OCH MINSTA VÄRDE

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$F(x, y) = 3x + 4y \text{ när } 3x + 2y - 18 \geq 0,$$

$$x + 2y - 7 \geq 0, 2x + y - 10 \geq 0, x \geq 0 \text{ och } y \geq 0.$$

1
2
3
4
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Två räta linjer delar xy -planet i fyra områden
- 2 Grafen till en linjär olikhet i två variabler är ett begränsat område.
- 3 Lösningen till ett system av två linjära olikheter är ett slutet område.
- 4 Den linjära funktionen $F(x, y)$ har ett största och ett minsta värde.

1
2
3
4
5
6



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1.1 GEOMETRISK SUMMA

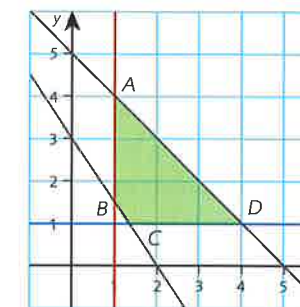
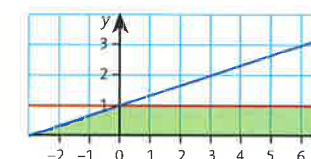
- 1 I en geometrisk talföljd är $a_1 = 2$ och $k = 3$.
 - a) Bestäm följdens tre första element.
 - b) Bestäm en rekursionsformel och en sluten formel för element n .
 - c) Använd en av formlerna för att bestämma a_{12} .
- 2 I en geometrisk talföljd är $a_1 = -1$ och $k = 2$.
 - a) Bestäm det tionde elementet.
 - b) Bestäm summan av de tio första elementen.
- 3 I en geometrisk talföljd är tredje element 120 och åttonde elementet $-15/4$.
 - a) Bestäm talföljdens kvot.
 - b) Bestäm talföljdens första element.
- 4 Vilket element i den geometriska följden $\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ har värdet $\frac{1}{108}$?
- 5 Beräkna summan $500 + 500 \cdot 1,1 + 500 \cdot 1,1^2 + \dots + 500 \cdot 1,1^{12}$. Svara med heltal.
- 6 Det allmänna elementet i en geometrisk talföljd beskrivs med formeln $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$.
 - a) Bestäm det 11:e elementet.
 - b) Bestäm summan av de elva första elementen.
 - c) För vilka värden på n blir summan s_n negativ?
 - d) För vilka värden på n blir summan s_n lägre än element a_n ?
- 7 I en bakterieodling delas bakterierna varannan minut. Hur många bakterier kommer det att finnas i odlingen efter en halvtimme om det från början finns 8 bakterier.
- 8 De tre första elementen i en geometrisk talföljd är $7x + 1$, $2x + 2$ och $x - 1$. Bestäm de tre elementen.

1.2 KONTINUERLIGT SPARANDE OCH ANNUITETSLÅN

- Emil påbörjar ett sparande när han är 20 år. Han sätter vid årsskiftet in 5 000 kr och tänker fortsätta att göra det till det året han är 25 år. Sparandet ger årsräntan 2,5 % efter skatt. Hur mycket förväntas Emil ha efter den femte och sista insättningen?
- Anna sätter varje årsskifte i 12 år in 500 kr på en fond med årsräntesatsen 3 %. Hur mycket har Anna inklusive ränta efter den tolfte och sista insättningen?
- Barack har lovat Michelle 10 000 kr när hon fyller 20 år så att hon kan köpa lite möbler till sin första lägenhet. När Michelle vill flytta redan vid 17 års ålder frågar hon om hon kan få pengarna i förskott. Barack svarar att hon kan få nuvärdet om man antar att räntesatsen är 5 %. Hur mycket kan Michelle få när hon är 17 år?
- Olivia sätter på sin 20-årsdag in 5 000 kr på ett konto som hon tänker sig ska få växa till hennes pension. Hon vill veta slutvärdet av beloppet om hon pensioneras vid 65 års ålder. Hjälp henne att räkna ut det. Anta då att årsräntan är 4 %.
- Louis vill ha 50 000 kr när han fyller 25 år. Han påbörjar därför ett sparande när han är 15 år och räknar med att hinna med 10 inbetalningar till sin 25-årsdag (han gör den sista inbetalningen på sin 24-årsdag). Årsräntesatsen är 3,6 % efter skatt. Hur mycket ska Louis sätta in varje år för att uppnå sitt mål?
- Louise har råd att betala 6 000 kr varje år på ett annuitetslån med räntesatsen 6,5 %. Hon vill vara skuldfri efter 20 inbetalningar och betalar en gång per år, första gången ett år efter att hon lånat pengarna. Hur mycket har Louise råd att låna?
- Karl-Gustaf lånar en halv miljon till en bostadsrättslägenhet. Annuitetslånet har räntesatsen 5,4 % med betalning en gång per år. Skulden ska betalas av på 25 år.
 - Hur mycket ska Karl-Gustaf betala varje år?
 - Hur mycket har han sammanlagt betalat i ränta när lånet är helt avbetalat?
- Fredrik ska betala underhållsbidrag till sin dotter till dess hon blir myndig med 21 600 kr per år. Det kommer att bli en inbetalning per år i tio år. Vad är nuvärdet av de kommande underhållsbidragen? Räkna med en ränta på 6 %.

1.3 LINJÄR OPTIMERING

- I vilken del av xy -planet är uttrycket $3x - 2y + 4$ negativt?
- Markera i ett koordinatsystem de punkter som uppfyller olikheterna $x - y + 2 > 0$ och $x + 2y - 2 > 0$.
- Bestäm $F(x, y) = 5x - 3y$ om
 - $(x, y) = (-2, 2)$
 - $(x, y) = (4, -1)$
 - $(x, y) = (a, 2a)$
- Beskriv det markerade området med olikheter
- Bestäm största och minsta värde för funktionen $F(x, y) = 2x + 3y$ där (x, y) är en punkt i den fyrhörning som har hörn i punkterna $A = (3, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (2, 5)$ och $D = (1, 2)$
- Fyrhörningen $ABCD$ begränsar ett område som kan beskrivas med hjälp av olikheter.
 - Ställ upp olikheterna.
 - Vilket största värde kan funktionen $F(x, y) = 3x + 5y$ anta i området begränsat av fyrhörningen $ABCD$.
 - I punkten C har funktionen $y = kx + m$ ett minsta värde. Bestäm möjliga värden k och m .
- Bestäm minsta och största värdet av funktionen $F(x, y) = 120x + 90y$ då $x \geq 10$, $y \geq 20$, $x + y \leq 84$ och $2y - x \geq 0$.
- En leksaksaffär ska sälja ut sitt lager av kulor. Det finns 300 större kulor och 200 mindre kulor i lager. Personalen gör i ordning påsar med kulor till försäljning. I påse I lägger de 10 större och 10 mindre kulor. I påse II lägger de 15 större och 5 mindre kulor. För påse I räknar de med en vinst på 15 kr och på påse II 10 kr. De gör minst 15 påsar varav minst 6 av varje sorts påse. Hur många påsar av varje slag ska de göra i ordning för maximal vinst? Anta att de säljer alla påsar som de gör i ordning.

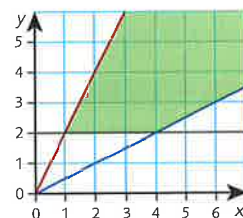


1
2
3
4
5
6
7

ÖVA I

- Bestäm de tre första termerna i en geometrisk talföljd där den tredje termen är 4 och den femte är 16.
- Bestäm de fem första elementen i talföljden $a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 162$
- Vilken kvot k har en talföljd där $a_1 = 64$ och $a_7 = 1$.
- Vilket element i den geometriska talföljden 2, 4, 8, ... har värdet 512.
- Bestäm i bråkform de fyra första termerna i den geometriska talföljd där den allmänna termen är $a_k = 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$
- Bestäm $5000 \cdot 1,035^2 + 5000 \cdot 1,035^3 + 5000 \cdot 1,035^4 + \dots + 5000 \cdot 1,035^{18}$
- I januari 2001 satte Karin in 3 000 kr på ett sparkonto. Räntan på kontot är 4%. Karin fortsätter sedan att sätta in 3 000 kr på kontot i januari varje år. Vilket av alternativen nedan beskriver hur mycket pengar det kommer att finnas på kontot direkt efter hennes insättning år 2010 om inga uttag sker?
A: $\frac{3000(1,04^9 - 1)}{1,04 - 1}$ B: $3000 \cdot 1,04^9$
C: $\frac{3000(1,04^{11} - 1)}{1,04 - 1}$ D: $3000 \cdot 1,04^{10}$
E: $3000 \cdot 1,04^{11}$ F: $\frac{3000(1,04^{10} - 1)}{1,04 - 1}$
(NP Ma C vt 02)

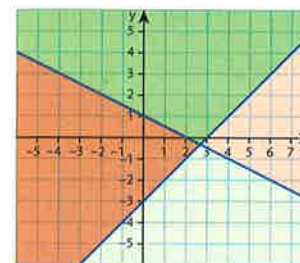
- Sam sätter i slutet av varje år in 2 000 kr på ett bankkonto med räntesatsen 2,5 %. Hur mycket kommer det att finnas på kontot direkt efter den femte insättningen? Avrunda svaret till hela kronor.
- Paul binder under tre år 100 000 kr på ett konto med fast räntesats 3,1 %. Hur mycket pengar har Paul på kontot efter 3 år.
- Lös grafiskt följande system av olikheter
a) $\begin{cases} x \geq -3 \\ y < 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y \geq 5 - x \\ y < 4x \end{cases}$
c) $\begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y \leq 2 - x/2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + y - 6 < 0 \\ x - y + 4 > 0 \end{cases}$
- Beskriv det skuggade området med olikheter.



- Bestäm värdet av $F(x, y) = 11x + 9y$ då $(x, y) = (1,8, 3,4)$

- Bestäm minsta och största värde av funktionen $F(x, y) = 12x + 5y$ då (x, y) är en punkt i femhörningen med hörn i punkterna (0,16), (1, 12), (2, 7), (4, 10) och (6, 13).

- Vilka områden i grafen uppfyller olikhetssystemen?

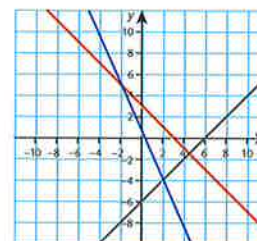


- $\begin{cases} x+2y-2 \leq 0 \\ x-y-3 \leq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+2y-2 \geq 0 \\ x-y-3 \leq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+2y-2 \leq 0 \\ x-y-3 \geq 0 \end{cases}$

- När Emilia föddes placerade hennes farföräldrar in ett belopp i en fond. På sin 18-årsdag ska Emilia ha minst 100 000 kr i fonden. Vilket är det lägsta belopp som farföräldrarna måste placera i fonden om de räknar med en årlig räntesats på 2,1%?

ÖVA II

- Vilket område i figuren beskrivs av olikhetssystemet $\begin{cases} x+y < 3 \\ 9x+4y < 2 \\ x-y < 6 \end{cases}$



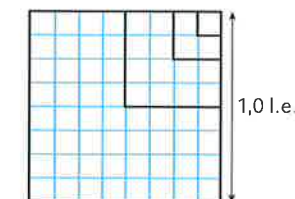
- En affär säljer potatis i 1 kg påsar och i 2 kg påsar. De förra ger en vinst på 3 kr/kg och de senare en vinst på 2 kr/kg. Affären önskar på morgonen ha ett lager på minst 100 kg, men har inte lagerutrymme för mer än sammanlagt 160 påsar. Vilken är den största dagliga vinst affären kan räkna med?



- I en geometrisk talföljd är det sjunde elementet 20 och det trettonde är 11. Bestäm det tionde elementet.

- $6 + 3 + 3/2 + \dots + a_n$ är en geometrisk talföljd. Bestäm det första element a_k i serien som är mindre än $1/100$.

- Mindre och mindre kvadrater bildas enligt figuren. Beräkna summan av de första åtta kvadraternas areor.



- Vilka punkter med heltalskoordinater finns i området som begränsas av $x+y-3 > 0$, $x+2y-6 < 0$ och $2x-y-6 < 0$ i xy -planet?

- Elsa är utlovad en gåva på 10 000 kr på sin 21-årsdag, men hon behövde pengarna tidigare och fick då 9 000 kr. När fick Elsa gåvan om man räknat med räntesatsen 2,8 % fram till 21-årsdagen?

- 23 Kalle har länge drömt om att köpa en segelbåt och behöver låna 100 000 kr för att förverkliga sina planer. Han tar ett annuitetslån med räntesatsen 7 % och ska göra en inbetalning per år under 20 år.
- Hur mycket ska han betala vid varje tillfälle?
 - Hur stor blir hans sammanlagda räntekostnad?
- 24 Victor tar ett lån på 115 000 kr för att köpa en bil. Lånet ska betalas tillbaka med lika stora varje belopp varje år under fyra år. Den första betalningen ska göras ett år efter det att lånet togs. Hur mycket ska Viktor betala varje år om årsräntan är 4,3 %?
- 25 Bestäm största och minsta värde av funktionen $F(x, y) = 11x + 15y$ under bivillkoren $x + y - 96 \leq 0$, $x - 2y + 6 \leq 0$, $x \geq 15$, $y \geq 24$.
- 26 En glasskiosk erbjuder två olika glassstrutar, Strut och Lyxstrut. Strut består av strut, en kula jordgubbsglass och två kulor vaniljglass. Lyxstrut består av strut, tre kulor jordgubbsglass och en kula vaniljglass. I kioskens lager finns det för dagens försäljning 100 strutar, glass till 210 kulor jordgubbsglass och till 170 kulor vaniljglass. Vilket antal
- Strutar och Lyxstrutar ger största dagsintäkt om intäkten för en strut är 15 kr och för en Lyxstrut 20 kr?
- 27 I den geometriska talföljden $a_1, a_2, a_3, \dots$ bildar elementen $a_1, a_4, a_7, \dots$ en ny geometrisk talföljd som har kvoten $\frac{8}{27}$. Vilken kvot har den ursprungliga följden?
- 28 En skola har i slutet av varje år från och med 2000 till och med 2012 betalat in 1 miljoner kronor till en fond. Bestäm fondens värde efter den sista inbetalningen. Under de första fem åren var räntesatsen 1,7 %, därefter ändrades den till 2,1 %.
- 29 Bertil har en pensionsförsäkring. Han kan välja mellan att 10 000 kr betalas ut i slutet av vart och ett av åren 2014 till 2020 eller att han får ett engångsbelopp i början av 2014. Bertil väljer det senare alternativet. Hur stort blir beloppet om försäkringsbolaget räknar med 2,4 % ränta?
- 30 Matilda har råd att avvara 12 000 kr per år för att låna pengar till en ny bil. Hon vill avbetala lånet färdigt innan bilen är skrotfärdig och tycker att femton år är en lämplig tid. Vad får bilen kosta om årsräntan för billånet är 9 %?

ÖVA III

- 31 Ett lån av storleken K och med räntesatsen p % återbetalas under t år med lika stora belopp m varje år. Den första betalningen görs ett år efter utbetalningen av lånet. Bestäm en formel för beloppet m . Du kan börja med att välja värden på K och p , t.ex. $K = 50\,000$ kr, $p = 5$ % och $t = 2$ år.



Kapitelprov

Geometrisk talföljd. En följd av tal där kvoten mellan ett element och närmast föregående element är konstant. Allmän formel för n :te elementet i en geometrisk talföljd är $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ där a_1 är följdens första element och k är kvoten.

Geometrisk summa. Summan av en geometrisk talföljd kan beräknas med formlerna $s_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$, $k > 1$, $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$, $k < 1$ där a_1 är summans första term, k är kvoten och n är antalet termer.

Nuvärde. Ett värde i framtiden som är korrigerat till motsvarande värde idag beroende på kalkylerad ränta.

Slutvärde. Ett värde i slutet av en tidsperiod där ett tidigare värde har korrigerats beroende på kalkylerad ränta.

Annuitetslån. Lån där amorteringarnas storlek anpassas så att den totala inbetalningen inklusive ränta per tillfälle är konstant.

Linjär optimering. Metod för att bestämma största och minsta värde av funktionen $F(x, y)$ utifrån givna bivillkor. $F(x, y) = ax + by$ är en linjär funktion i två variabler.