

## 2

# Funktioner och gränsvärden



## Centralt innehåll

- Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp
- Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad
- Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde

## Inledning

En stor del av kurs 3b handlar om att med olika hjälpmedel studera och förstå funktioner. Ibland är vi intresserade av att veta om funktioner växer eller avtar och hur snabbt dessa förändringar i så fall sker. I andra sammanhang kan vi söka efter optimala värden. Med det menar vi exempelvis värden hos en variabel som ger ett så stort eller så litet värde som möjligt hos en funktion. Detta kan exempelvis användas för att bestämma hur en förpackning ska utformas för att få en given volym med så lite material som möjligt. Inom ekonomi kan det vara intressant att avgöra hur priset på en produkt påverkar försäljningen och därmed inkomsterna och beräkna det pris som ger den största inkomsten.

För att underlätta förståelsen av sådana problemställningar behandlar detta kapitel sambandet mellan funktioners uttryck och egenskaper. Vilka faktorer påverkar funktionernas egenskaper och på vilket sätt? Vi studerar även hur aritmetikens lagar används för att hantera funktioner och lösa ekvationer samt begreppet gränsvärde, som vi återkommer till i kapitel 3.

## Din första uppgift

Rita följande grafer med hjälp av räknare eller dator. Besvara därefter frågorna som följer.

A:  $y = x + 1$       B:  $y = x^2 - 1$       C:  $y = x^3 - 3x - 1$       D:  $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

Hur många nollställen har kurvorna A–D?

Hur många extrempunkter har kurvorna A–D?

Hur många gånger byter kurvorna A–D riktning?

Sammanfatta dina svar i en tabell med tabellhuvud enligt figuren:

Formulera dina slutsatser i ord.

| Exponent med<br>högst värde | Antal<br>nollställen | Antal extrem-<br>punkter | Antal riktnings-<br>ändringar |
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|-------------------------------|
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|-------------------------------|

De slutsatser du förhoppningsvis kommit fram till är maximalt tänkbara värden. För fallen B–D kan slutsatserna delvis se annorlunda om funktionsuttrycken ges ett annat utseende. Du får möjlighet att undersöka den här typen av funktioner mer i detta kapitel.

# 2.1 Polynom



Ett polynom är en funktion av typen  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Koefficienterna  $a_n$  till  $a_0$  är reella tal och  $n$  är ett naturligt tal, det vill säga ett ickenegativt heltal. Exempel på polynom är följande:

$p_1(x) = -5x^4$        $p_2(x) = 4x^2 - 2,5x + \pi$        $p_3(x) = 2x + 3$        $p_4(x) = -6$

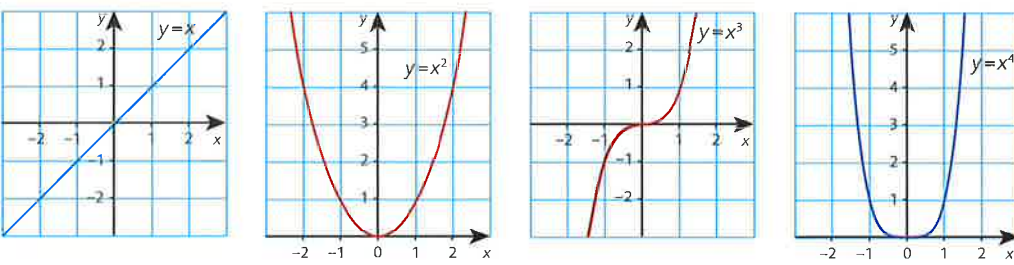
Exponenterna är i samtliga fall naturliga tal. En funktions grad avgörs av den term, vars variabel har högst exponent. Polynomen  $p_1$  till  $p_4$  ovan har graderna 4, 2, 1 respektive 0. Polynomet  $p(x) = 0$ , *nollpolynomet*, har emellertid inte grad 0. Dess grad är odefinierad och saknar därmed värde.

Exempel på funktioner som inte är polynom är  
 $f_1(x) = 4x^{1,5} - 3x + 2$        $f_2(x) = 5x^{-1}$        $f_3(x) = \sqrt{x}$        $f_4(x) = 5^x$

Exponenterna hos dessa funktioner är inte naturliga tal (exempelvis är kvadratroten ur  $x$  det samma som  $x$  upphöjt till  $\frac{1}{2}$ ). De enklaste polynomen består bara av en enda term. Ett polynom med en term är samtidigt en potensfunktion, en funktion av typen  $p(x) = a \cdot x^n$ . För potensfunktioner finns det inga begränsningar för exponenten  $n$  men om potensfunktionen samtidigt ska vara ett polynom måste  $n$  vara ett naturligt tal. Vi ska börja med att studera sådana polynom.

## Polynom med en term

I kurs 1c behandlades potensfunktioner. Här följer en kort repetition av potensfunktioner där exponenten är ett naturligt tal. Det innebär som sagt att dessa potensfunktioner samtidigt är polynom. Vi börjar med att studera graferna till  $y = x^n$ , där exponenten  $n$  har heltalsvärden mellan ett till fyra.



Figurerna visar i tur och ordning en *proportionalitet*, en *parabel*, en *tredjegrads-* och en *fjärdegradskurva*. Gemensamt för potensfunktioner med positiv heltalsexponent är att deras grafer går genom origo, dvs.  $x = 0$  är ett *nollställe* till varje sådan funktion.

Att lösa en potensekvation av typen  $x^n = a$  innebär att vi söker de  $x$ -värden som uppfyller likheten. Sådana ekvationer kan lösas *algebraiskt* eller *grafiskt*.

När man löser en potensekvation algebraiskt används en av potenslagarna,  $(x^n)^m = x^{nm}$  för att få variabeln  $x$  ensam i ekvationens ena led.

$x^n = a$       Upphöj båda leden till  $1/n$ .  
 $(x^n)^{1/n} = a^{1/n}$       Förenkla vänsterledet enligt  $(x^n)^{1/n} = x^{n \cdot 1/n} = x^1 = x$ .  
 $x = a^{1/n}$       Då  $n$  är ett positivt jämnt tal finns även roten  $x = -a^{1/n}$

En *grafisk* lösning av  $x^n = a$  innebär att man ritar funktionen  $y = x^n$  och den horisontella linjen  $y = a$  i samma koordinatsystem och läser av  $x$ -koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvan och linjen. En titt på graferna ovan antyder att om  $n$  är ett udda tal finns det precis en rot (lösning) till ekvationen  $x^n = a$ . Om  $n$  istället är ett jämnt tal kan det finnas upp till två rötter men det händer också att rot saknas. Exempelvis saknar ekvationen  $x^2 = -1$  rot medan ekvationen  $x^4 = 1$  har två rötter. Detta gäller under förutsättning att vi endast studerar reella tal och inte komplexa. Detta gäller hela kapitlet.

EXEMPEL

## Algebraisk lösning av potensekvation

Lös ekvationerna

a)  $4x^2 = 196$       b)  $x^7 = 777$       c)  $3x^4 = 48$

### LÖSNING:

a)  $4x^2 = 196$       Dividera båda leden med 4.  
 $x^2 = 49$       Ta kvadratroten ur båda leden. Glöm inte den negativa lösningen.  
 $x = \pm \sqrt{49}$       Förenkla.  
 $x = \pm 7$

b)  $x^7 = 777$       Upphöj båda leden till  $\frac{1}{7}$ .  
 $(x^7)^{\frac{1}{7}} = 777^{\frac{1}{7}}$       Förenkla vänsterledet.  
 $x = 777^{\frac{1}{7}}$       Beräkna ett närmevärde med räknaren.  
 $x \approx 2,59$

Det finns ett alternativt sätt att skriva  $777^{\frac{1}{7}}$  som visas nedan.

$x^7 = 777$       Lösningen fås genom att ta sjunde roten ur 777.  
 $x = \sqrt[7]{777}$       Skriv 7 Math  $\sqrt[7]{777}$  på räknaren.  
 $x \approx 2,59$

c)  $3x^4 = 48$       Dividera båda leden med 3.  
 $x^4 = 16$       Upphöj båda leden till  $\frac{1}{4}$ . Observera att det också finns en negativ lösning då exponenten är ett jämnt tal.  
 $(x^4)^{\frac{1}{4}} = \pm 16^{\frac{1}{4}}$       Förenkla vänsterledet och beräkna högerledet.  
 $x = \pm 2$

**SVAR:** a)  $x = \pm 7$       b)  $x = 777^{\frac{1}{7}} \approx 2,59$       c)  $x = \pm 2$

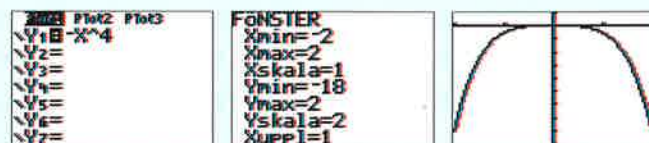
# Grafisk lösning av potensekvation

En funktion ges av  $y = -x^4$ . Använd grafitande räknare för att

- rita funktionens graf i intervallet  $-2 \leq x \leq 2$ ,
- bestämma rötterna till ekvationen  $y = -12$ .

## LÖSNING:

- Skriv in funktionen  $y = -x^4$ , välj lämplig skala och låt räknaren rita grafen enligt de steg som visas i figurerna.



- För att bestämma rötterna till ekvationen  $-x^4 = -12$  görs i tur och ordning följande:

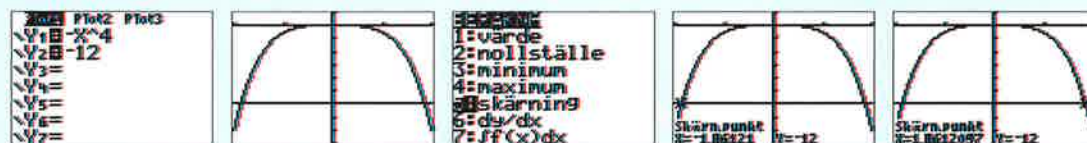
Skriv in funktionen  $y = -12$ .

Låt räknaren rita linjen.

Välj skärning (intersect eller skärning) i beräkningsmenyn (calculate eller beräkna).

Välj en startpunkt till vänster om origo för att få den negativa roten.

Upprepa valet av skärning och välj en startpunkt till höger om origo för att få den positiva roten.



**SVAR:** a) Se ovan b)  $x \approx -1,9$  eller  $x \approx 1,9$

## ÖVA I

**2001** Lös ekvationerna utan räknare.

- $x^3 = 64$
- $2x^3 - 5 = 49$
- $x^4 = 625$

**2002** Lös ekvationerna och ge svaren med tre gällande siffror.

- $x^5 = 550$
- $3x^3 - 5 = 520$
- $x^4 = 6\,250$

**2003** Lös ekvationerna (helst utan räknare).

- $x^{100} = 2^{100}$
- $x^{100} = 2^{200}$
- $x^6 = 10^{24}$

**2004** Med en passare kan cirklar ritas för radier upp till 10,0 cm. Låt  $x$  cm vara radiens längd och  $y$  cm<sup>2</sup> cirkelns area.

- Rita en graf för hur arean beror av radien.

- Vilken area har en cirkel med radien 8,0 cm?
- Vilken radie har en cirkel med arean 275 cm<sup>2</sup>?

**2005** En förvaringslåda ska rymma 27 dm<sup>3</sup>. Vilken sidlängd ska den ha om den ges formen av en kub?



**2006** Hastigheten  $v$  m/s hos ett föremål som fallit  $x$  m ges av sambandet  $v^2 = 19,6x$ . Hur stor hastighet har ett föremål som fallit 25 m?

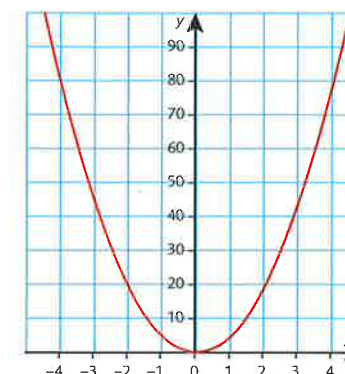
**2007** En rätvinklig triangel har kateterna  $a$  och  $b$  och hypotenusan  $c$ . Bestäm den okända sidan då

- $a = 5,0$  cm och  $b = 12$  cm
- $a = 15$  cm och  $c = 17$  cm

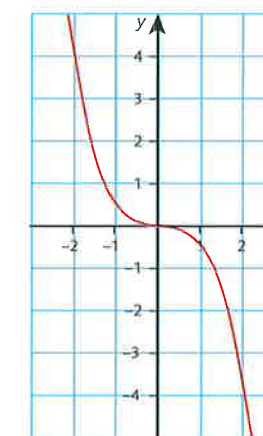
## ÖVA II

**2008** Sidorna hos en låda, som är formad som ett rätblock, har proportionerna 3:4:5. Lådans volym är 7,5 l. Beräkna lådans sidor.

**2009** Grafen visar en funktion som kan skrivas  $y = kx^2$ . Vilket värde har konstanten  $k$ ?



**2010** Grafen visar en funktion som kan skrivas  $y = kx^3$ . Vilket värde har konstanten  $k$ ?



**2011** a) Beskriv gemensamma drag hos graferna till

$$y = x, y = x^3, y = x^5 \text{ och } y = x^7.$$

b) Beskriv gemensamma drag hos graferna till

$$y = x^2, y = x^4, y = x^6 \text{ och } y = x^8.$$

c) Hur många rötter har ekvationen  $x^n = a$  om  $n$  är ett udda tal.

d) Hur många rötter har ekvationen  $x^n = a$  om  $n$  är ett jämnt tal.

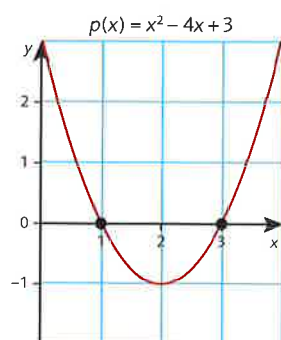
## Polynom av grad två



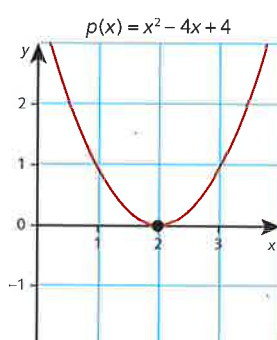
Andragradspolynom har formen  $p(x) = ax^2 + bx + c$ . Sådana polynom har du arbetat med i kurs 2b. Här följer en sammanfattning av det viktigaste.

Ett polynoms nollställen fås genom att algebraiskt lösa ekvationen  $p(x) = 0$  eller genom att avläsa grafens skärningspunkter med  $x$ -axeln.

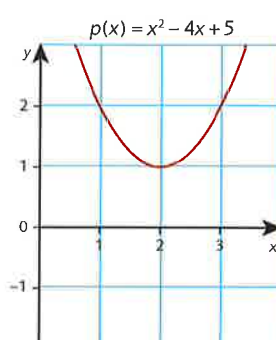
Studera graferna till de tre andragradspolynomen nedan och jämför med lösningarna av de ekvationer man får då man sätter  $p(x) = 0$



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \\ x &= 2 \pm \sqrt{1} \\ x &= 2 \pm 1 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4} \\ x &= 2 \pm \sqrt{0} \\ x &= 2 \pm 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 5} \\ x &= 2 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ekvationen saknar lösning.

De tre exemplen illustrerar att polynom av grad två kan ha två, ett eller inget nollställe.

Polynom av typen  $p(x) = ax^2 + bx + c$  har ett *lokalt minimum* om koefficienten  $a$  framför  $x^2$ -termen är positiv. Om  $a$  däremot är negativ har polynomet ett *lokalt maximum*. Det finns två vanliga algebraiska metoder för bestämning av ett andragradspolynoms *extrempunkt*, det vill säga dess minimi- eller maximipunkt. En metod grundar sig på formeln för lösning av en andragradsekvation av typen  $x^2 + px + q = 0$ .

$$\text{Lösningen ges av } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

På grund av en andragradskurvas symmetriska utseende anger termen  $-\frac{p}{2}$  kurvans symmetri-

linje eftersom de två lösningarna ligger på samma avstånd,  $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ , från denna. En extrempunkt hos en andragradskurva ligger alltid på symmetrilinjen.

En annan metod använder sig av kvadratkomplettering. Dessa båda metoder visas i varsitt exempel.

EXEMPEL

### Bestämning av extrempunkt och nollställen med pq-formeln

Bestäm nollställen och extrempunkten för polynomet  $p(x) = 2x^2 + 8x - 10$ . Avgör också om extrempunkten är ett lokalt maximum eller minimum.

#### LÖSNING:

Använd  $pq$ -formeln för att lösa ekvationen  $p(x) = 0$ .

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm 3$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Det innebär att symmetrilinjen ges av  $x = -2$

Insättning av  $x = -2$  i  $p(x) = 2x^2 + 8x - 10$  ger

$$p(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) - 10 = -18$$

Eftersom koefficienten framför  $x^2$ -termen är positiv, är det ett lokalt minimum.

**SVAR:** Polynomet har nollställen  $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$  och ett lokalt minimum i punkten  $(-2, -18)$ .

### Bestämning av extrempunkt genom kvadratkomplettering

Bestäm extrempunkten för polynomet  $p(x) = -3x^2 + 6x - 9$ .

Avgör också om det är ett lokalt maximum eller minimum.

#### LÖSNING:

Faktorisera först genom att bryta ut värdet  $-3$ .

$$p(x) = -3x^2 + 6x - 9 = -3(x^2 - 2x + 3)$$

Kvadratkomplettera  $x^2 - 2x + 3$  genom att utnyttja att  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$  (kvadreringsregeln).

$$p(x) = -3(x^2 - 2x + 3) = -3(x^2 - 2x + 1 + 2) = -3((x - 1)^2 + 2) = -3(x - 1)^2 - 6$$

Eftersom kvadratuttryck som  $(x - 1)^2$  inte kan vara negativa måste det, oavsett värde på  $x$ , gälla att  $-3(x - 1)^2 \leq 0$

Polynomets maximivärde är därför  $-6$  och det inträffar då

$$-3(x - 1)^2 = 0, \text{ dvs. då } x = 1$$

**SVAR:** Polynomet har ett lokalt maximum i punkten  $(1, -6)$ .

|   |
|---|
| 1 |
| 2 |
|   |
|   |
|   |
|   |

## ÖVA I

**2012** Bestäm polynomens nollställen.

- $f(x) = x^2 + 8x + 7$
- $g(x) = x^2 - 6x + 5$
- $h(x) = x^2 - 4x - 5$

**2013** Bestäm polynomens nollställen.

- $f(x) = x^2 + 3x - 4$
- $g(x) = -x^2 + 5x - 4$
- $h(x) = 2x^2 + 3x - 2$

**2014** Bestäm extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

- $f(x) = x^2 + 5$
- $g(x) = -2x^2 + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 5$

**2015** Bestäm extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

- $f(x) = 2x^2 - 8x - 5$
- $g(x) = -2x^2 - 4x - 6$
- $h(x) = -3x^2 + 9x - 8$

**2016** Bestäm extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

- $f(x) = (x - 3)^2 - 4$
- $g(x) = -2(x + 3)^2 + 2$
- $h(x) = 2((x + 3)^2 + 3)$

## ÖVA II

**2017** Håanna säger: "Jag tänker på ett positivt tal, lägger till tre, kvadrerar resultatet och drar ifrån det tal jag först tänkte på. Då har jag resultatet 113." Vilket tal tänkte Hanna på?

**2018** Vid kast med en liten boll anger  $y$  m dess höjd och  $x$  m dess vågräta avstånd från kastaren. Funktionen  $y = -0,025(x^2 - 38x - 80)$  ger sambandet mellan  $y$  och  $x$ . Hur högt når bollen?



**2019** Ett affär säljer CD-skivor. Antalet sålda skivor per dag ( $x$ ) beror på priset ( $p$  kr) enligt sambandet  $x = 600 - 2p$ .

- Teckna ett samband för dagsinkomsten  $y$  kr som funktion av priset  $p$  kr. **T**
- Bestäm det pris som ger den högsta dagsinkomsten.

**2020** Affären som säljer skivor enligt övning 2019, har även inköpskostnader på 50 kr för varje CD-skiva. Bestäm det pris som ger den högsta dagsvinsten för affären om sambandet mellan antalet sålda skivor per dag,  $x$ , och priset  $p$  kr fortfarande är  $x = 600 - 2p$ . **T**

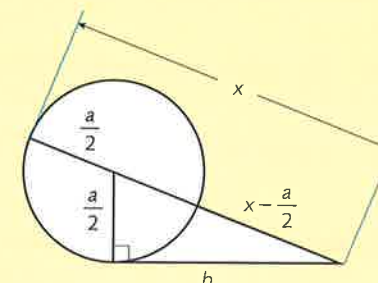
**2021** I ett koordinatsystem är linjen  $y = -4x + 8$  ritad. En rektangel är placerad så att den har två sidor på de positiva koordinataxlarna, ett hörn i origo, och det motsatta hörnet på en punkt på linjen.

- Teckna en funktion som beskriver rektangelns area. Låt  $x$ -koordinaten för punkten på linjen vara din variabel. **T**
- Bestäm var punkten ska placeras för att rektangelns area ska bli så stor som möjligt.

## UTMANING

### GEOMETRISK LÖSNING AV ANDRAGRADSEKVATION

René Descartes visade på 1600-talet hur man geometriskt kan lösa en andragradsekvation. För att lösa en ekvation av typen  $x^2 - ax - b^2 = 0$  ritade han en rätvinklig triangel med kateterna  $b$  och  $a/2$  tillsammans med en cirkel enligt figuren. Med hjälp av Pythagoras sats tecknade han ett samband som han sedan använde för att geometriskt bestämma en rot till ekvationen. Förklara varför sträckan  $x$  (den förlängda hypotenusan i figuren) motsvarar den positiva roten till ekvationen  $x^2 - ax - b^2 = 0$ . Negativa rötter var på den tiden ointressanta.



|   |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 5 |
|   |
|   |

## Räknelagar för polynom

Polynom kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras med hjälp av samma räknelagar som du är van vid. Vi utgår från två polynom och studerar resultaten av tre av räkneoperationerna. Division ingår inte i kursen.

$$q(x) = x^2 + 3x$$

$$r(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$p_1(x) = q(x) + r(x) = (x^2 + 3x) + (x^2 - 2x + 4) = x^2 + 3x + x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + x + 4$$

$$p_2(x) = q(x) - r(x) = (x^2 + 3x) - (x^2 - 2x + 4) = x^2 + 3x - x^2 + 2x - 4 = 5x - 4$$

$$p_3(x) = q(x) \cdot r(x) = (x^2 + 3x)(x^2 - 2x + 4) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x^3 - 6x^2 + 12x = x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x$$

Lägg märke till följande:

- Vid addition och subtraktion av två polynom får summan och differensen högst samma grad som polynomet med högst grad ( $\text{grad}(p) \leq \max(\text{grad}(q), \text{grad}(r))$ ).
- Vid multiplikation av två polynom multipliceras varje term i det första polynomet med varje term i det andra polynomet. En följd av det är att graden hos produkten av två polynom är summan av graderna hos de två polynomen ( $\text{grad}(p) = \text{grad}(q) + \text{grad}(r)$ ). Regeln gäller dock inte om ett av polynomen är nollpolynomet ( $p(x) = 0$ ) eftersom detta polynom saknar grad.

# Förenkla och bestäm graden

Förenkla polynomen och bestäm dess grader.

- $(x^3 - 6x^2 - 4x) + (6x^2 - x^3)$
- $(x^3 - 6x^2 - 4x) - (6x^2 - x^3)$
- $(x^3 - 6x^2 - 4x)(6x^2 - x^3)$

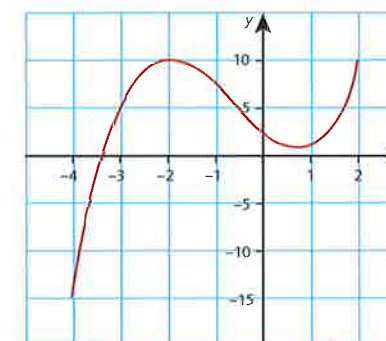
## LÖSNING:

- $(x^3 - 6x^2 - 4x) + (6x^2 - x^3) = x^3 - 6x^2 - 4x + 6x^2 - x^3 = -4x$   
Grad: 1
- $(x^3 - 6x^2 - 4x) - (6x^2 - x^3) = x^3 - 6x^2 - 4x - 6x^2 + x^3 = 2x^3 - 12x^2 - 4x$   
Grad: 3
- $(x^3 - 6x^2 - 4x)(6x^2 - x^3) = 6x^5 - x^6 - 36x^4 + 6x^5 - 24x^3 + 4x^4 = -x^6 + 12x^5 - 32x^4 - 24x^3$   
Grad: 6

**SVAR:** se ovan

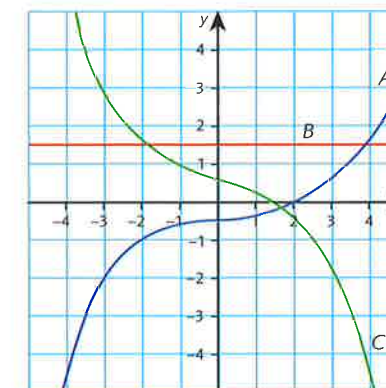
# Polynom av högre grad

Funktionen  $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$  är en polynomfunktion av grad tre. Dess graf visas i figuren. Den har ett nollställe och två extrempunkter. Koefficienterna framför de termer som innehåller variabeln  $x$  avgör grafens form och om dessa ändras kan grafen få ett helt annat utseende. I det kommande avsnittet ska vi titta närmare på polynom av högre grad och undersöka hur utseende, antalet nollställen och extrempunkter beror av dess funktionsuttryck. För att kunna ge grafers utseende en tydlig beskrivning, behövs ett antal begrepp. Vi ska därför börja med att definiera några sådana begrepp.



## Växande och avtagande funktioner

En funktion är *växande* om dess graf växer från vänster till höger. På motsvarande sätt är en funktion *avtagande* om dess graf avtar från vänster till höger. En *vågrät* funktion är både växande och avtagande. I figuren är grafen A växande, grafen B både växande och avtagande och grafen C avtagande.



Om en funktion är växande i ett intervall och vi här godtyckligt väljer två punkter  $x_1$  och  $x_2$  gäller:

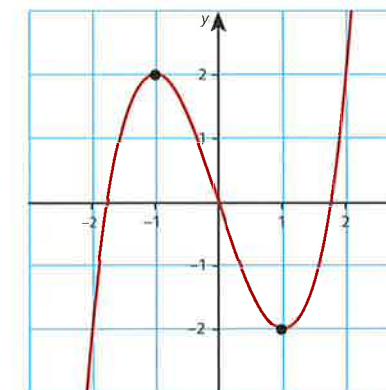
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

På motsvarande sätt gäller för avtagande funktioner:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

## Extrempunkter

Betrakta grafen i figuren. Den är omväxlande växande och avtagande. Den innehåller också *extrempunkter*. En extrempunkt kan vara antingen ett *lokalt maximum* eller ett *lokalt minimum*. I figuren finns det ett lokalt maximum i punkten  $(-1, 2)$  och ett lokalt minimum i punkten  $(1, -2)$ .



Med ett lokalt maximum menas ett funktionsvärde som är större än eller lika med alla andra funktionsvärden i den närmaste omgivningen. Motsvarande definition för ett lokalt minimum är ett funktionsvärde som är mindre än eller lika med alla andra funktionsvärden i den närmaste omgivningen.

## ÖVA I

**2022** Förenkla och bestäm graden.

- $(3x^2 - 4x) + (2x^2 - 5)$
- $(4x^2 - 1) + (5x^2 + 4x - 3)$
- $(2x^3 - 3x^2 + 4x) + (5 - 3x^2 - 2x^3)$

**2023** Förenkla och bestäm graden.

- $(x^2 + 3x - 4) - (x^2 - 4)$
- $(x^4 - x^2 - x) - (x^2 + x^4)$
- $(x^3 + 8x^2 + 3) - (7x^2 - x^3)$

**2024** Förenkla och bestäm graden.

- $(3x^2 - 2x)(x^2 - 5)$
- $(2x^3 + x^2 + 3)(x^2 - x)$
- $(1 - x^2)(6x^2 + 3x - 1)$

**2025** Förenkla och bestäm graden då  $q(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$  och  $r(x) = x^3 - 2x^2 - 4$ .

- $p_1(x) = q(x) + r(x)$
- $p_2(x) = q(x) - r(x)$
- $p_3(x) = q(x) \cdot r(x)$

## ÖVA II

**2026** Förenkla och bestäm graden.

- $(x^3 + x^2 - x + 1)(x^2 - x)$
- $(x^2 - 5x + 8)(2x^2 + 2x - 2)$
- $(x - 3)(3x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$  **T**

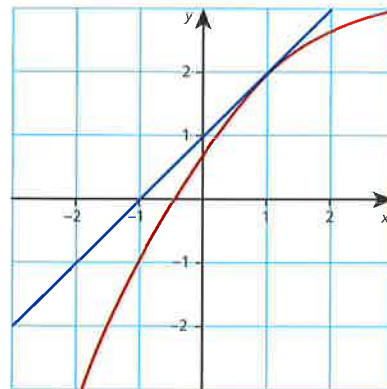
**2027**  $p(x)$  och  $q(x)$  är två polynom, där inget av dem är nollpolynomet och där  $\text{grad}(p) = m$  och  $\text{grad}(q) = n$ . Dessutom gäller olikheten  $m \geq n$ . Vad kan man säga om graden hos

- $p(x) + q(x)$
- $p(x) - q(x)$
- $p(x) \cdot q(x)$

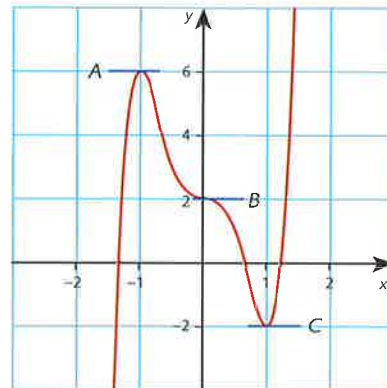
**2028** För polynomen  $p(x)$  och  $q(x)$  gäller att  $\text{grad}(p(x) + q(x)) < \text{grad } p(x)$ . Kan man dra någon slutsats av det vid en jämförelse av  $\text{grad}(p(x))$  och  $\text{grad}(q(x))$ ?

## Tangenter och terrasspunkter

En *tangent* är en rät linje som tangerar en kurva i en punkt. Det innebär att den har en punkt gemensam med kurvan och att kurvans riktning i tangeringspunkten sammanfaller med riktningen hos tangenten. I figuren tangerar den blå linjen kurvan i punkten (1, 2) och är därmed en tangent.



En tangent till ett lokalt maximum eller minimum hos ett polynom är alltid en vågrät linje (A och C i figuren). I figuren finns dessutom den vågräta tangenten B. Den tangerar kurvan i en *terrasspunkt*. I den närmsta omgivningen till en terrasspunkt är en kurva antingen enbart växande eller enbart avtagande. I figuren är kurvan avtagande på båda sidor om terrasspunkten.



## Växande och avtagande

Rita funktionen  $f(x) = 2x^3 + 3x^2$  med hjälp av dator och undersök i vilka intervall den är växande respektive avtagande.

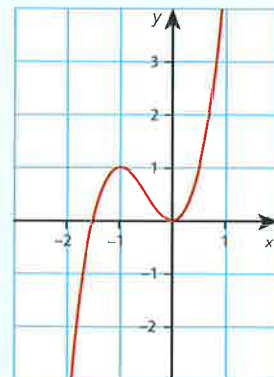
### LÖSNING:

Skriv in funktionen i t.ex. GeoGebra och låt programmet rita grafen enligt figuren.

Kurvan byter riktning då  $x = -1$  och  $x = 0$ . Det ger slutsatserna i svaret nedan.

### SVAR:

Funktionen är växande för  $x \leq -1$  eller  $x \geq 0$  samt avtagande för  $-1 \leq x \leq 0$ .



## EXEMPEL

## Extrem- och terrasspunkter

Bestäm terrass- och extrempunkter för funktionen  $y = 6x^5 - 10x^3 + 2$ .

### LÖSNING:

Grafen har vågräta tangenter för punkterna  $(-1, 6)$ ,  $(0, 2)$  och  $(1, -2)$ . Punkternas y-koordinater kan även beräknas med hjälp av respektive x-koordinat:

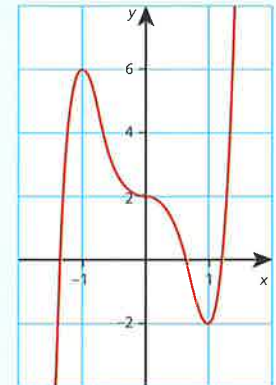
$$x = -1 \Rightarrow y = 6(-1)^5 - 10(-1)^3 + 2 = 6$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \cdot 0^5 - 10 \cdot 0^3 + 2 = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 6 \cdot 1^5 - 10 \cdot 1^3 + 2 = -2$$

### SVAR:

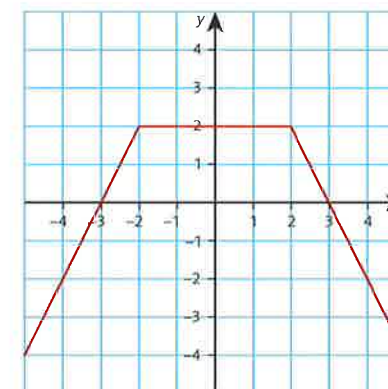
Maximipunkt i  $(-1, 6)$ , terrasspunkt i  $(0, 2)$  och minimipunkt i  $(1, -2)$ .



## ÖVA 1

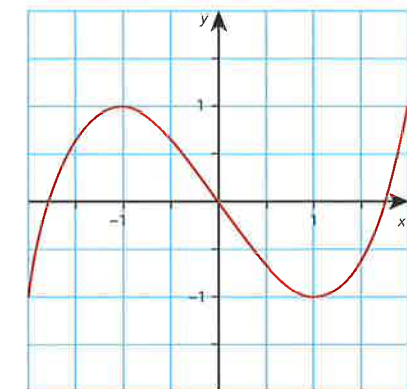
**2029** Ange för den funktion som illustreras av grafen om den är avtagande eller växande i följande intervall:

- $2 \leq x \leq 5$
- $-2 \leq x \leq 5$
- $-2 \leq x \leq 2$
- $-5 \leq x \leq -2$
- $-5 \leq x \leq 2$
- $-5 \leq x \leq 5$



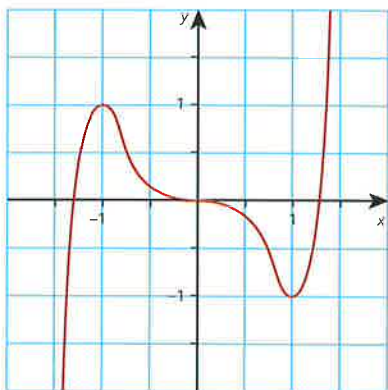
**2030** Grafen i figuren har två extrempunkter, en i  $(-1, 1)$  och en i  $(1, -1)$ . Ange de intervall för vilka gäller att funktionen i figuren är

- avtagande
- växande



**2031** Vilka punkter på grafen från övning 2030 ger vågräta tangenter?

- 2032** Figuren visar grafen till ett polynom. Den har tre punkter med vågräta tangenter. Ange maximi-, minimi- och terrasspunkter för grafen.



- 2033** Ange för varje polynom om det är växande eller avtagande.

- a)  $p_1(x) = -2x + 3$
- b)  $p_2(x) = 2x^3$
- c)  $p_3(x) = -x^4, x > 0$
- d)  $p_4(x) = -x^4, x < 0$

- 2034** Rita funktionen  $f(x) = x^3 - 12x$  och bestäm dess extrempunkter.

### UTMANING

#### VÄXANDE POLYNOM

Polynomet  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , där  $a \neq 0$ , är givet. Ange för vilka intervall polynomet är växande och om dessa intervall gäller under några särskilda villkor. Motivera dina svar.



### ÖVA II

- 2035** För vilka värden på  $x$  är polynomet växande?

- a)  $f(x) = x^2 + 4x - 4$
- b)  $g(x) = -x^2 + 6x + 4$
- c)  $h(x) = 2x^2 - 8x - 2$

- 2036** Ge ett andragradspolynom som har en lokal minimipunkt i  $(1, 3)$ . **T**

- 2037** Funktionerna  $g(x) = x^3$  och  $h(x) = x$  är växande för samtliga  $x$ -värden. Vilka av följande funktioner kan vara avtagande i något intervall? Motivera och försök att svara utan att rita kurvorna.

- a)  $f(x) = g(x) + h(x)$
- b)  $f(x) = 2g(x) + 3h(x)$
- c)  $f(x) = g(x) - h(x)$  **T**

- 2038** Kan man dra några slutsatser om funktionen  $g(x) = (p(x))^2$  då följande förutsättningar gäller? **T**

- a)  $p(x)$  är växande för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- b)  $p(x)$  är växande och positiv för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- c)  $p(x)$  är växande och negativ för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- d)  $p(x)$  är avtagande för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- e)  $p(x)$  är avtagande och positiv för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- f)  $p(x)$  är avtagande och negativ för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.

## Polynom av grad två i faktorerad form

I vissa sammanhang finns det fördelar med att skriva polynom i faktorerad form. Det kan exempelvis underlätta ekvationslösning och förenkling av uttryck. Faktorisering av andragrads-polynom gjorde vi i kurs 2 med de metoder som visas nedan.

| Metod                       | Exempel                    |
|-----------------------------|----------------------------|
| Bryta ut en faktor          | $8x^2 + 6x = 2x(4x + 3)$   |
| Använda konjugatregeln      | $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ |
| Använda en kvadreringsregel | $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ |

Ofta kan ingen av dessa tre metoder användas. En metod som alltid fungerar är att beräkna polynomets nollställen och använda dessa vid faktoriseringen. Om nollställen saknas kan polynomet inte faktoriseras.

Ekvationerna  $x^2 - 6x + 5 = 0$  och  $(x - 1)(x - 5) = 0$  har samma rötter,  $x = 1$  och  $x = 5$ .

Det beror på att följande omskrivning är möjlig:  $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$

Om ekvationen  $x^2 + px + q = 0$  har lösningarna  $x_1$  och  $x_2$  beror det alltså på att ekvationen kan skrivas i faktorerad form:  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Detta kan användas för att faktorisera polynom.

### FÖR ETT ANDRAGRADSPOLYNOM GÄLLER

Om polynomet  $p(x) = ax^2 + bx + c$  har två nollställen,  $x_1$  och  $x_2$ , kan polynomet skrivas om i faktorerad form:  $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

### EXEMPEL

#### Faktorisering av polynom

Skriv polynomen i faktorerad form.

- a)  $p(x) = x^2 + 8x + 16$
- b)  $q(x) = 2x^2 + 8x - 10$

#### LÖSNING:

- a) Eftersom polynomet har tre termer och  $16 = 4^2$  undersöker vi först om en kvadreringsregel kan användas. Då alla termer dessutom är positiva väljer vi att undersöka kvadraten av  $x + 4$ :  
 $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

Polynomet överensstämmer med det givna och kan därmed skrivas  $p(x) = (x + 4)^2$

- b) I det här fallet verkar det inte fungera med någon kvadreringsregel.  
Beräkna därför polynomets nollställen.

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$2(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{9}$$

$$x = -2 \pm 3$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Det innebär att polynomet kan skrivas

$$2x^2 + 8x - 10 = 2(x^2 + 4x - 5) = 2(x - (-5))(x - 1) = 2(x + 5)(x - 1)$$

**SVAR:** a)  $p(x) = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

b)  $q(x) = 2x^2 + 8x - 10 = 2(x + 5)(x - 1)$

## ÖVA I

- 2039** Faktorisera genom att bryta ut lämpliga faktorer.

a)  $p(x) = 2x^2 + 5x$

b)  $p(x) = 3x^2 - 6x$

c)  $p(x) = 2x^2 + 10$

- 2040** Faktorisera med konjugatregeln.

a)  $p(x) = x^2 - 25$

b)  $p(x) = 9x^2 - 16$

c)  $p(x) = 3x^2 - 12$

- 2041** Faktorisera med någon av kvadreringsreglerna.

a)  $p(x) = x^2 + 6x + 9$

b)  $p(x) = 9x^2 - 6x + 1$

c)  $p(x) = 3x^2 - 30x + 75$

- 2042** Faktorisera.

a)  $p(x) = 5x^2 - 15x$

b)  $p(x) = 5x^2 - 80$

c)  $p(x) = 2x^2 - 16x + 32$

- 2043** Faktorisera.

a)  $p(x) = x^2 - 6x + 8$

b)  $p(x) = x^2 + 2x - 3$

c)  $p(x) = 3x^2 + 9x - 12$

## ÖVA II

- 2044** a) Är  $(x - 2)$  en faktor i polynomet

$$p(x) = 2x^2 + 6x - 20?$$

- b) Kan du svara på frågan i a-uppgiften

utan att lösa ekvationen

$$2x^2 + 6x - 20 = 0 \text{ och i så fall hur?}$$

- 2045** Är  $(x - 1)$  en faktor i polynomet

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x?$$

- 2046** Innehåller polynomet  $p(x) = x^4 - x^2$

faktorerna  $(x - 1)$  och  $(x + 1)$ ?

- 2047** Faktorisera polynomet

$$p(x) = x^3 - 81x.$$

- 2048** Faktorisera polynomet  $p(x) = x^4 - 81$

med hjälp av konjugatregeln.

## FINN FEM FEL

## UTMANING

### EXEMPEL 1

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2 \cdot 1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Varför blir  $-1$  lika med  $1$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 2

$$\frac{6}{9} = \frac{3+3}{3 \cdot 3} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{3}{3}}{\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{1+1}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

Varför blir  $\frac{6}{9}$  lika med  $2$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 3

$$x = 2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x(x - 2) = x \cdot 0$$

$$\frac{x(x-2)}{x-2} = \frac{x \cdot 0}{x-2}$$

$$x = 0$$

Varför ändras  $x = 2$  till  $x = 0$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 4

$$2 = \sqrt{4} = \pm 2$$

Varför blir  $2$  lika med  $\pm 2$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 5

Studera följande omskrivningar av en ekvation.

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$a = 0$$

Varför medför likheten  $a = b$  att  $a = 0$ ? Vad är fel?

Subtrahera med 2 på båda sidor.

Multiplitera med  $x$  på båda sidor.

Dividera med  $(x - 2)$  på båda sidor.

Förkorta i vänsterledet. Förenkla i högerledet.

Multiplitera båda sidor med  $a$ .

Subtrahera båda sidor med  $b^2$ .

Faktorisera båda sidor.

Dividera båda sidor med  $(a - b)$ .

Subtrahera båda sidor med  $b$ .

## Nollställen till polynom samt ekvationslösning



Teorigenomgång

Nollställen till andragradspolynom, dvs. polynom på formen  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , har du bestämt tidigare. Det är ofta komplicerat att bestämma nollställen till polynom av högre grad än två. Det finns emellertid några undantag. Om ett polynom är skrivet i faktorerad form, är det vanligtvis lätt att bestämma dess nollställen. Med faktorerad form menas att det är skrivet som en produkt av faktorer. Ett polynom av tredje graden i faktorerad form kan exempelvis se ut så här:

$$p(x) = x(x-1)(x+3)$$

Om polynomet ska ha värdet 0, krävs det att en av faktorerna  $x$ ,  $(x-1)$  och  $(x+3)$  är 0. Detta används för att hitta polynomets nollställen. Tekniken visas i ett exempel nedan.

På motsvarande sätt löses ekvationer i faktorerad form. Ibland kan man utföra en faktorisering själv för att lösa ekvationen. Det finns även en annan teknik som kallas variabelsubstitution. Dessa metoder visas i två exempel.

### Nollställen till en faktorerad polynomfunktion

Bestäm samtliga nollställen till polynomet  $p(x) = x(x-1)(x+3)$ .

#### LÖSNING:

$$p(x) = 0 \text{ ger oss ekvationen } x(x-1)(x+3) = 0$$

Minst en av faktorerna i vänsterledet måste ha värdet 0. Det ger följande tre ekvationer:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x - 1 = 0 & x + 3 = 0 \\ & x = 1 & x = -3 \end{array}$$

**SVAR:**  $x = 0$ ,  $x = 1$  och  $x = -3$

### Nollställen genom faktorisering

Lös ekvationen  $2x^3 + 12x^2 - 14x = 0$

#### LÖSNING:

Vi har ingen modell för lösning av en tredjegrads ekvation och måste därför hitta ett sätt att skriva om ekvationen så att vi kan lösa den. Den här ekvationen kan faktoriseras eftersom faktorn  $2x$  finns i samtliga termer. Vi börjar därför med att bryta ut faktorn  $2x$ .

$$2x^3 + 12x^2 - 14x = 0$$

$$2x(x^2 + 6x - 7) = 0$$

Minst en av faktorerna i vänsterledet måste ha värdet 0. Det ger följande två ekvationer:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x^2 + 6x - 7 = 0 \\ & x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7} \\ & x = -3 \pm 4 \\ & x = -7 \text{ eller } x = 1 \end{array}$$

**SVAR:**  $x = -7$ ,  $x = 0$  eller  $x = 1$

## EXEMPEL

### Nollställen genom variabelsubstitution

Lös ekvationen  $x^4 - 2x^2 - 63 = 0$

#### LÖSNING:

Om en fjärdegradsekvation bara innehåller jämna potenser av  $x$ , i det här fallet  $x^4$  och  $x^2$ , kan vi ersätta  $x^2$  med  $t$  och få en andragradsekvation eftersom  $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ . Det kallas variabelsubstitution.

Sätt  $t = x^2$ . Det ger

$$x^4 - 2x^2 - 63 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2x^2 - 63 = 0$$

$$t^2 - 2t - 63 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 63}$$

$$t = 1 \pm 8$$

$$t = -7 \text{ eller } t = 9$$

Nu återstår att lösa ekvationen  $x^2 = t$ , för  $t = -7$  och  $t = 9$ :

$$x^2 = -7$$

Reell rot saknas eftersom kvadrater inte är negativa.

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

**SVAR:**  $x = -3$  eller  $x = 3$

## ÖVA 1

**2049** Bestäm polynomets nollställen.

a)  $p(x) = (x+3)(x-5)(x-2)$

b)  $p(x) = (x+1)(x-4)(x+2)$

c)  $p(x) = x(x-8)(x+8)$

**2050** Lös ekvationerna

a)  $x(x-1)(x+5) = 0$

b)  $x(x^2 + 4x - 5) = 0$

c)  $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

**2051** Bestäm polynomets nollställen.

a)  $p(x) = (x-3)^2(x-5)^3$

b)  $p(x) = (x+4)(2x-4)^6$

c)  $p(x) = x^2(x+7)(x-7)$

**2052** Lös ekvationerna

a)  $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$

b)  $2x^3 + 4x^2 - 6x = 0$

c)  $x^4 - 10x^3 + 9x^2 = 0$

**2053** Bestäm polynomets nollställen.

a)  $p(x) = x(x-1)^2$

b)  $p(x) = x(x^2 - 1)$

c)  $p(x) = x^2(x^2 - 1)^2$

**2054** Lös ekvationerna

a)  $(x-3)(x-2)(x+1)(x+4) = 0$

b)  $x(x-5)(2x-4) = 0$

c)  $2x(x-4)(3x+6)(x+3)^2 = 0$

**2055** a) Lös ekvationen  $(x-1)(x-5) = 0$ .

b) Lös ekvationen  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

c) Utför parentesmultiplikationen  $(x-1)(x-5)$ .

d) Varför har ekvationerna i a- och b-uppgifterna samma lösning?

e) Hur kan funktionen  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  skrivas om i faktorerad form, som en produkt av två parenteser?

## ÖVA II

2056 Lös ekvationerna

- $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$
- $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$
- $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

2057 Produkten av tre på varandra följande heltal har värdet 0. Vilka är de tre möjliga heltalen?

2058 Då ett tal multipliceras med summan av talet och 5 blir produkten 0. Bestäm talet.

2059 Produkten av tre tal,  $a$ ,  $b$  och  $c$ , är 0. Talet  $b$  är dubbelt så stort som  $a + 1$ . Talet  $c$  fås genom att subtrahera  $b$  med 4. Vilka är talen?

- 2060 a) Ekvationen  $x^2 - 6x + 5 = 0$  har lösningarna  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 5$ . Försök att hitta ett sätt att kombinera lösningarnas värden 1 och 5 så att du får koefficienterna  $-6$  och  $5$  i ekvationen.
- b) Undersök därefter om din metod fungerar på ekvationen  $x^2 + 8x + 12 = 0$  som har lösningarna  $x_1 = -2$  och  $x_2 = -6$ .
- c) Uttryck ett möjligt samband mellan koefficienterna  $p$  och  $q$  och lösningarna  $x_1$  och  $x_2$  i ekvationen  $x^2 + px + q = 0$ .
- d) Undersök om detta samband alltid gäller.



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## PASCALS TRIANGEL

Blaise Pascal (1623–62) var en fransk filosof, matematiker och författare. Hans berömda triangel används framför allt inom sannolikhetsläran, en gren av matematiken som till stor del Pascal och Pierre de Fermat (1601–65) ligger bakom. De sex första raderna i triangeln ser du i figuren.

■ Hur bör den sjunde raden se ut enligt det mönster som finns?

■ Den tredje raden visar koefficienterna för kvadreringsregeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

På motsvarande sätt kan man ur triangeln utläsa att

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Hur kan  $(a + b)^4$  utvecklas med hjälp av triangeln?

■ Hur bör motsvarande uttryck för  $(a - b)^2$ ,  $(a - b)^3$  och  $(a - b)^4$  se ut?

■ Då man bygger tresidiga pyramider med kulor innehåller varje lager olika antal kulor. I det översta lagret finns det bara en kula, i nästa finns det tre och i det tredje lagret från ovan finns det sex kulor. Hur många finns det i det fjärde lagret? Kan Pascals triangel hjälpa dig att få fram det värdet? På vilket sätt? Hur många kulor blir det i nästa lager?

■ Kan du även använda Pascals triangel för att beräkna det sammanlagda antalet kulor i en tresidig pyramid om du vet höjden på den?

|   |   |   |   |    |   |    |   |   |   |   |
|---|---|---|---|----|---|----|---|---|---|---|
|   |   |   |   | 1  |   |    |   |   |   |   |
|   |   |   |   | 1  |   | 1  |   |   |   |   |
|   |   |   | 1 |    | 2 |    | 1 |   |   |   |
|   |   | 1 |   | 3  |   | 3  |   | 1 |   |   |
|   | 1 |   | 4 |    | 6 |    | 4 |   | 1 |   |
| 1 |   | 5 |   | 10 |   | 10 |   | 5 |   | 1 |

## UTMANING

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- En konstant är ett polynom av grad 0.
- Grafer till polynom med en term går alltid genom origo.
- Uttrycket  $x^3 + 2x^2 - 4x^{-1} + 2$  är ett exempel på ett polynom.
- Vid addition av två polynom av grad  $m$  och  $n$ , får det nya polynomet grad  $(m + n)$ .
- Vid multiplikation av två polynom av grad  $m$  och  $n$ , får det nya polynomet grad  $(m + n)$ .
- Polynomfunktioner av andra graden kan ha en terrasspunkt.
- Om en polynomfunktion av tredje graden har ett lokalt maximum, måste den också ha ett lokalt minimum.
- En funktion kan inte både vara växande och avtagande.
- En tangent kan inte skära en kurva (dvs. korsa den).
- Med ett nollställe menas en punkt, där en kurva skär y-axeln.



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## POLYNOM MED DUBBELROT

Ett polynom kan i faktorerad form skrivas  $p(x) = (x - a)(x - b)^2$ , där  $b > a > 0$ .

- Hur många nollställen har polynomet?
- Hur många extrempunkter har polynomet?
- Vad kan man säga om extrempunkternas typ och x-koordinater?

## 2.2 Rationella uttryck

En *rationell funktion* är en funktion som kan skrivas på formen:  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  där  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom. Kvoten i högerledet kallas för ett *rationellt uttryck*.

I det här avsnittet ska vi förenkla rationella uttryck och bestämma nollställan till rationella funktioner.

### Förenkling av rationella uttryck

Ett rationellt uttryck är en kvot av två polynom. Ett exempel är

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, x \neq 3$$

Eftersom nämnaren inte får vara 0, lägger vi till villkoret  $x \neq 3$ . Man kan dock låta bli att skriva villkoret. Det gäller oavsett det skrivs eller inte.

Vi strävar alltid efter att ge matematiska uttryck en så enkel form som möjligt. Om vi vill förenkla ett rationellt uttryck, måste täljare och nämnare skrivas som produkter av faktorer. Vi kan nämligen förkorta som i följande exempel

$$\frac{a \cdot b^2 \cdot c}{b \cdot c} = a \cdot b$$

Däremot är det inte tillåtet att göra några förkortningar om uttrycket har följande utseende

$$\frac{a + b^2 + c}{b + c}$$

Här följer några exempel som illustrerar hur rationella uttryck kan förenklas.

EXEMPEL

### Förenkling av rationella uttryck

Förenkla så mycket som möjligt.

$$\text{a) } \frac{2x^3y}{4x^2y^2} \quad \text{b) } \frac{2x^2+y}{4x^2+y^2}$$

#### LÖSNING:

a) Eftersom både täljaren och nämnaren enbart består av faktorer är det möjligt

$$\text{att göra förkortningar enligt potenslagarna: } \frac{2x^3y}{4x^2y^2} = \frac{x}{2y}$$

b) Det saknas faktorer i både täljaren och nämnaren. Dessa uttryck kan heller inte faktoriseras. Därmed är det omöjligt att förenkla uttrycket.

**SVAR:** a)  $\frac{x}{2y}$  b) Uttrycket kan inte förenklas.

### Förenkling genom ekvationslösning

Förenkla  $\frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 9}$  så mycket som möjligt.

#### LÖSNING:

Nämnaren faktoriseras enligt konjugatregeln

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

För att kunna faktorisera täljaren löser vi ekvationen  $2x^2 - 8x + 6 = 0$ .

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$x = 2 \pm 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Det ger oss följande förenkling:

$$\frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 9} = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{2(x - 1)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{2(x - 1)}{(x + 3)}$$

**SVAR:**  $\frac{2(x - 1)}{(x + 3)}$

### Förenkla genom att göra liknämning

Förenkla  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)}$  så mycket som möjligt.

#### LÖSNING:

Eftersom vi har tre rationella uttryck, inleder vi med att göra dessa liknämninga för att kunna skriva uttrycken på ett gemensamt bråkstreck. Därefter förenklar vi

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{x+2}{x(x+2)} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{3x+x+2-2}{x(x+2)} = \frac{4x}{x(x+2)} = \frac{4}{x+2}$$

**SVAR:**  $\frac{4}{x+2}$

# Förenkla dubbla rationella uttryck

Förenkla  $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y}$

## LÖSNING:

För att förenkla uttrycket gör vi i tur och ordning följande steg:

- 1 Gör täljaren liknämning. 2 Skriv täljaren på ett gemensamt bråkstreck.
- 3 Skriv nämnaren som ett rationellt uttryck. 4 Gör om division till en multiplikation.
- 5 Skriv på ett bråkstreck. 6 Bryt ut  $-1$  ur täljaren. 7 Förkorta.

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y} = \frac{\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}}{x - y} = \frac{\frac{y - x}{xy}}{x - y} = \frac{y - x}{xy} \cdot \frac{1}{x - y} = \frac{y - x}{xy(x - y)} = \frac{-(x - y)}{xy(x - y)} = -\frac{1}{xy}$$

**SVAR:**  $-\frac{1}{xy}$

## Villkor för att förenkling är möjlig

- a) Undersök om det går att förenkla uttrycket  $\frac{x-5}{x^2+2x-35}$  utan att faktorisera andragradspolynomet.  
b) Förenkla uttrycket.

## LÖSNING:

- a) Om det går att förenkla ett rationellt uttryck måste samma faktor finnas i täljaren och nämnaren. Det innebär att de har ett gemensamt nollställe. Täljaren har värdet 0 för  $x = 5$ . Sätt därför in  $x = 5$  i nämnarens uttryck.

$$x^2 + 2x - 35 = 5^2 + 2 \cdot 5 - 35 = 0$$

Nämnaren har också ett nollställe för  $x = 5$  och innehåller därför faktorn  $(x - 5)$ .

Slutsats: Det går att förenkla uttrycket.

- b) Nämnaren kan skrivas på formen  $(x - 5)(x + a)$ . Eftersom konstanttermen är  $-35$  måste produkten av  $-5$  och  $a$  ha värdet  $-35$ . Det innebär att  $a = 7$ .

$$\text{Kontroll: } (x - 5)(x + 7) = x^2 + 7x - 5x - 35 = x^2 + 2x - 35$$

Om vi har den ena faktorn till ett andragradspolynom är den här tekniken för att få den andra faktorn oftast snabbare än att lösa motsvarande andragradsekvation.

$$\frac{x-5}{x^2+2x-35} = \frac{x-5}{(x-5)(x+7)} = \frac{1}{x+7}$$

**SVAR:**  $\frac{1}{x+7}$

## ÖVA I

2061 Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{6x^3}{4x^2}$  b)  $\frac{3x}{9x^3}$  c)  $\frac{4x^2y}{2xy}$

2062 Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{8x^3y^2z}{4x^2y}$  b)  $\frac{x^2y^2z^2}{x^3y^2z}$  c)  $\frac{x+y}{xy}$

2063 Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{x+x}{xy}$  b)  $\frac{x+x}{y+y}$  c)  $\frac{x-y}{y-x}$

2064 Beräkna uttryckets värde genom att först göra förkortningar.

$$\frac{7 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 22}{9 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 20}$$

2065 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt genom att bryta ut faktorer.

a)  $\frac{x^2-3x}{2x-6}$  b)  $\frac{4x^2+8x}{4x^2-4x}$   
c)  $\frac{2x^2y-4xy^2}{2xy^2-x^2y}$

2066 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt med hjälp av konjugat- eller kvadreringsreglerna.

a)  $\frac{x^2-36}{2x-12}$  b)  $\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$   
c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

2067 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{2x+4}$   
b)  $\frac{3}{3x-9} - \frac{2}{2x^2-6x}$   
c)  $\frac{8}{x^2-4} - \frac{2}{x-2}$

## ÖVA II

2068 a) Visa att  $\frac{3-2x}{2x-3} = -1$

b) Förenkla  $\frac{1-4x}{4x-1} - \frac{9-5x}{5x-9}$

c) Förenkla  $\frac{8-6x}{3x-4}$

2069 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2-2x}$  b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4}$   
c)  $\frac{x^2+16x+15}{x^2+x}$

2070 Undersök om faktorn  $(x + 5)$  ingår i båda polynomen i dessa uttryck.

a)  $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$  b)  $\frac{x^2+4x-5}{x^2+25}$   
c)  $\frac{x^2-5x}{x^2+2x-15}$  **T**

2071 Förenkla de uttryck i uppgift 2070, där båda polynomen innehåller faktorn  $(x + 5)$ .

2072 Förenkla uttrycket  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{x(x-1)^2}{x^4}$  så mycket som möjligt.

2073 Faktorisera nämnarna, skriv på ett bråkstreck och förenkla.

$$\frac{1}{x^3-4x} + \frac{1}{x^3+4x^2+4x}$$

2074 Förenkla uttrycket  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$  **T**

2075 Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
 **L**

## Lösning av rationella ekvationer



Då ekvationer som innehåller uttryck på formen  $\frac{p(x)}{q(x)}$  ska lösas måste följande beaktas:

Polynomet i nämnaren får inte ha värdet 0. Om någon av rötterna ger ett värde som innebär att nämnaren blir 0, måste den roten uteslutas.

Rationella ekvationer på formen  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  löses genom att sätta  $p(x) = 0$ . Kvoten kan aldrig bli 0 om inte täljaren har värdet 0.

Rationella ekvationer på formen  $\frac{p(x)}{q(x)} = h(x)$  löses genom att multiplicera med  $q(x)$  på båda sidor, vilket ger ekvationen  $p(x) = h(x) \cdot q(x)$ . Fortfarande gäller dock att  $q(x) \neq 0$ .

Tre exempel får illustrera ekvationslösning med rationella uttryck.

### Exempel Ekvationslösning med rationellt uttryck (I)

Lös ekvationen  $\frac{x^2 - 2x}{4x - 8} = 0$

**LÖSNING:**

Eftersom nämnaren inte får ha värdet 0 gäller att  $x \neq 2$ .

Vi löser följande ekvation:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 2$$

Den andra roten är inte tillåten. Då återstår endast  $x = 0$ .

Kommentar: Om lösningen hade inletts med faktorisering av polynomen, hade vi endast fått den godkända roten:

$$\frac{x^2 - 2x}{4x - 8} = 0$$

$$\frac{x(x - 2)}{4(x - 2)} = 0$$

$$\frac{x}{4} = 0$$

$$x = 0$$

**SVAR:**  $x = 0$

### Exempel Ekvationslösning med rationellt uttryck (II)

Lös ekvationen  $\frac{x^2 - 2x}{4x - 5} = 1$

**LÖSNING:**

Eftersom nämnaren inte får ha värdet 0 gäller att  $x \neq \frac{5}{4}$ .

$$\frac{x^2 - 2x}{4x - 5} = 1$$

Multiplicera med  $4x - 5$  på båda sidor.

$$x^2 - 2x = 4x - 5$$

Samla alla termer i vänsterledet.

$$x^2 - 2x - 4x + 5 = 0$$

Förenkla.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Lös ekvationen.

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 3 \pm 2$$

$$x = 1 \text{ eller } x = 5$$

**SVAR:**  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Båda rötterna är tillåtna.

### Exempel Ekvationslösning med rationellt uttryck (III)

Lös ekvationen  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} = 4$

**LÖSNING:** Först undersöker vi förbjudna värden, dvs. sådana som innebär att något av polynomen i nämnarna får värdet 0.

$$x = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Alltså gäller villkoren  $x \neq 0$  och  $x \neq -2$ .

För att slippa rationella uttryck multiplicerar vi båda leden med  $x(x+2)$ .

$$x(x+2) \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} \right) = 4x(x+2)$$

Multiplicera in  $x(x+2)$ .

$$\frac{3x(x+2)}{x+2} + \frac{x(x+2)}{x} - \frac{2x(x+2)}{x(x+2)} = 4x^2 + 8x$$

Förkorta.

$$3x + (x+2) - 2 = 4x^2 + 8x$$

Förenkla.

$$4x = 4x^2 + 8x$$

$$0 = 4x^2 + 4x$$

Faktorisera.

$$4x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = -1$$

Roten  $x = 0$  är inte tillåten enligt undersökningen ovan.

**SVAR:**  $x = -1$

## ÖVA I .....

2076 Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-9}{2x-12} = 0$  b)  $\frac{2x^2-8x}{x+4} = 0$

c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 0$

2077 Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-2} = 0$

b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4} = 0$

c)  $\frac{x^2+16x+15}{x^2+x} = 0$

2078 Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-2} = 1$

b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4} = 2$

c)  $\frac{x^2+16x}{x^2+x} = x$

2079 Lös ekvationerna

a)  $\frac{1}{x} - x = 0$  b)  $\frac{x-2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$

c)  $\frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = 0$

## ÖVA II .....

2080 Lös ekvationerna

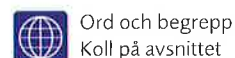
a)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$  b)  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{2x+4} = 0$

c)  $\frac{3}{3x-9} - \frac{2}{2x^2-6x} = 0$  T

2081 Lös ekvationen  $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2} = 0$ 

2082 Lös ekvationen

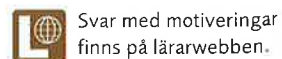
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$
 L

2083 Undersök om det finns några värden på  $x$  som medför att kvoten mellan polynomen  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  och  $g(x) = x^2 - 4x + 3$  har värdet 1.Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Uttrycket  $\frac{1}{p(x)}$  är ett rationellt uttryck.
- 2 En variabel i ett rationellt uttryck kan ha ett värde som inte är definierat.
- 3 En variabel i ett rationellt uttryck har alltid minst ett värde som inte är definierat.
- 4 Om polynomen i ett rationellt uttryck har ett gemensamt nollställe kan uttrycket förenklas.
- 5  $(x+2)^3(x^3-8)^{-2}$  är ett rationellt uttryck.
- 6 Ekvationen  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  har samma rötter som ekvationen  $p(x) = 0$ .

Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## 2.3 Diskreta och kontinuerliga funktioner samt gränsvärden



Teorigenomgång

Diskreta och kontinuerliga funktioner har du mött många gånger utan att använda just dessa benämningar medan gränsvärde är ett helt nytt begrepp. Gränsvärde introduceras i detta kapitel och används i kapitel 3 för att definiera derivata, en av grundpelarna inom matematik och fysik.

## Diskreta och kontinuerliga funktioner

Betrakta talserien 1, 3, 6, 10, ... Kan du se ett mönster? Kan du bestämma en formel för värdet hos tal nr  $n$ ? Talföljden kan illustrera antalet cirklar som bildar trianglarna i figuren.

Förmodligen är det lättare att se mönstret än att bestämma formeln. Genom att kopiera den fjärde figuren, rotera den 180° och placera den intill den ursprungliga, kan vi se att det blir  $4 \cdot 5$  cirklar i den.

I triangel nr fyra finns det då  $\frac{4 \cdot 5}{2}$  cirklar. På motsvarande sätt kan man visa att triangel nr 3 innehåller  $\frac{3 \cdot 4}{2}$  cirklar. En formel (eller en funktion) för antalet cirklar,  $N$ , i triangel nr  $n$  ges därför generellt av  $N = \frac{n(n+1)}{2}$ , där  $n$  är ett positivt heltal.

Definitionsmängden till funktionen  $N(n)$  består av alla positiva heltal och funktionen är därmed ett exempel på en *diskret funktion*. En diskret funktion är en funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden. I det aktuella fallet är avståndet mellan varje värde ett.

Studera nu istället funktionen  $y = x^2 + x$ . Om man inte anger någon definitionsmängd, tolkas det som att alla reella tal ingår i mängden. Funktionen kan därför illustreras grafiskt av en sammanhängande kurva. Detta är ett exempel på en *kontinuerlig funktion*. En kontinuerlig funktion är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

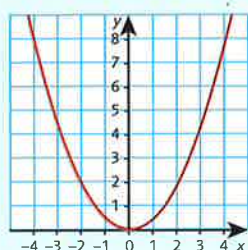
DISKRET FUNKTION En funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden.

KONTINUERLIG FUNKTION En funktion som är sammanhängande (utan avbrott eller hopp) i samtliga intervall i definitionsmängden.

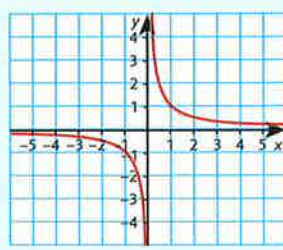
Nedan följer exempel på både diskreta och kontinuerliga funktioner. Det finns även ett exempel på en funktion som varken är diskret eller kontinuerlig.

# Grafer

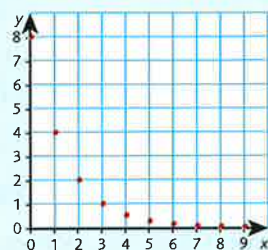
Bestäm för varje funktion om den är diskret, kontinuerlig eller inget av dessa alternativ.



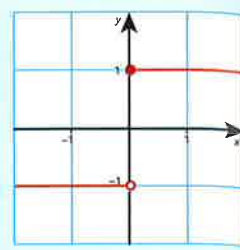
$$f_1(x) = \frac{x^2}{2}, D_f = \mathbb{R}$$



$$f_2(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



$$f_3(x) = \frac{8}{2^x}, D_f = \mathbb{N}$$



$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

## LÖSNING:

$f_1(x)$  är kontinuerlig eftersom den är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

$f_2(x)$  är kontinuerlig eftersom den är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

Hoppet sker då  $x = 0$  men den punkten ingår inte i definitionsmängden.

$f_3(x)$  är diskret eftersom avståndet mellan varje värde i definitionsmängden är ett.

$f_4(x)$  är varken diskret eller kontinuerlig. Definitionsmängden består av hela det reella talplanet och ett hopp sker vid ett värde som ingår i definitionsmängden.

**SVAR:** Kontinuerliga:  $f_1(x)$  och  $f_2(x)$ . Diskret:  $f_3(x)$ .

## ÖVA I

Avgör i 2084–2087 om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

2084 a)  $f(x) = 2x + 3, D_f = \mathbb{R}$

b)  $g(x) = x^2, D_g = \mathbb{R}$

c)  $h(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

2085 a)  $f(x) = -x^3, D_f = \mathbb{R}$

b)  $g(x) = 10^x, D_g = \mathbb{R}$

c)  $h(x) = \lg x, x > 0$

2086 a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

b)  $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$

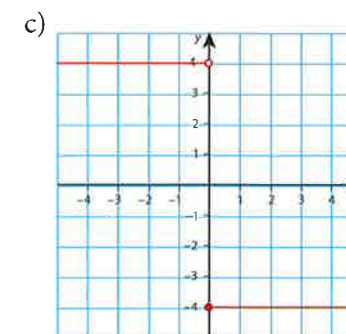
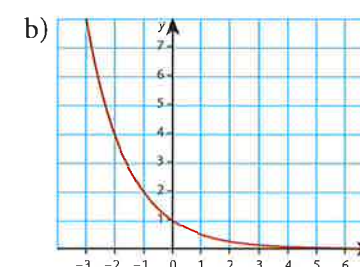
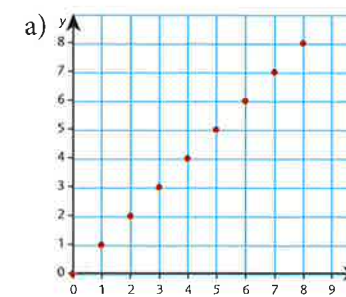
c)  $h(x) = 2x, D_h = \mathbb{N}$

2087 a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, D_f = \mathbb{N}$

2088 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.



## ÖVA II

2089 Inkomsterna  $I(x)$  kr vid försäljning av  $x$  pocketböcker på torget en lördag förmiddag ges av  $I(x) = 29x$ . Kostnaderna vid försäljningen ges av  $K(x) = 400 + 12x$ .

a) Bestäm en funktion för resultatet av försäljningen.

b) Avgör om funktionen är diskret eller kontinuerlig.

2090 I en fyrsidig pyramid av kulor finns det en kula i översta lagret, fyra kulor i lagret under och nio kulor i nästa.

- Hur många kulor finns det i det fjärde lagret uppifrån?
- Hur många kulor finns det i lager nr  $n$  uppifrån?
- Vilken typ av funktion, diskret eller kontinuerlig, är det som beskriver antalet kulor i lager nr  $n$ ?



2091 I den fyrsidiga pyramiden i uppgift 1134 kan man istället räkna det sammanlagda antalet kulor.

- Hur många kulor finns det i en pyramid med ett, två, tre respektive fyra lager?
- Formeln  $N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  anger antalet kulor  $N$  i en pyramid med  $n$  lager. Undersök om formeln stämmer med dina värden.
- Vilken typ av funktion, diskret eller kontinuerlig, är det som beskriver antalet kulor i en pyramid med  $n$  lager?

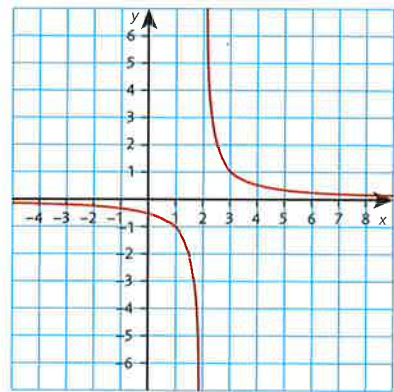
2092 Förklara varför  $f(x)$  är kontinuerlig och  $g(x)$  inte är kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

## Gränsvärden

I figuren visas grafen av den kontinuerliga funktionen  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ .



För  $x$ -värden långt från noll ligger funktionens graf nära  $x$ -axeln. Då  $x = 12$  får vi

$$f(12) = \frac{1}{12-2} = 0,1.$$

Ju större värde  $x$  får, ju mindre värde får funktionen. Funktionen värde kan komma hur nära 0 som helst men värdet blir aldrig 0 oavsett hur stort  $x$  är. Vi säger då att funktionens värde *går mot* 0 då  $x$  *går mot* oändligheten eller att *gränsvärdet* av  $f(x)$  är 0 då  $x$  *går mot* oändligheten. Det finns ett skrivsätt för att uttrycka detta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Skrivsättet läses "limes av  $f(x)$  då  $x$  går mot  $\infty$  är 0". Ordet *limes* kommer från latinet och betyder "gräns" och symbolen  $\infty$  betyder oändligheten.

Ibland ser man även skrivsättet  $f(x) \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow \infty$ , vilket läses " $f(x)$  går mot noll då  $x$  går mot oändligheten".

Vi ska även studera vad som händer nära  $x = 2$ . Som framgår av grafen avtar funktionen snabbare och snabbare då vi närmar oss  $x = 2$  från vänster. Om vi däremot närmar oss samma värde från höger, växer funktionens värde alltmer. Det finns ingen gräns för hur stort eller litet funktionsvärdet kan bli. Exempelvis får funktionen värdet 100 000 då  $x = 2,00001$  eftersom  $f(2,00001) = \frac{1}{2,00001-2} = \frac{1}{0,00001} = 100\,000$ . Då  $x = 1,999\,99$  blir funktionsvärdet istället  $-100\,000$ .

Det saknas därför ett gränsvärde då  $x$  närmar sig värdet 2.

Detta uttrycker vi genom att skriva att  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  inte existerar.



Teorigenomgång

Låt oss också studera funktionen  $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ . Grafen av  $g(x)$  visas i figuren.

Funktionen saknar gränsvärde då  $x$  går mot oändligheten eftersom den växer konstant mot allt högre värden. Däremot ser det ut som att  $g(2) = 4$  trots att nämnaren blir 0 då  $x = 2$ . Varför växer eller avtar inte funktionen alltmer då  $x$  närmar sig värdet 2 som i föregående exempel?

Det som skiljer den här funktionen från den förra är att även täljaren närmar sig värdet 0 då  $x$  närmar sig 2. Faktorn  $(x-2)$  ingår alltså även i täljaren. Enligt konjugatregeln kan täljaren faktoriseras så att funktionen skrivs

$$g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Vi får emellertid inte förkorta bort uttryck som har värdet 0. Om det vore tillåtet, skulle exempelvis följande omskrivningar leda fram till en orimlighet.

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| $a = 0$                      | Skriv $a$ som $2a - a$        |
| $2a - a = 0$                 | Addera $a$ till båda leden.   |
| $2a = a$                     | Dividera båda leden med $a$ . |
| $\frac{2a}{a} = \frac{a}{a}$ | Förenkla                      |
| $2 = 1$                      |                               |

Däremot får vi förkorta bort  $(x-2)$  då  $x \neq 2$ . Genom att inte tillåta att  $x$  har värdet 2 men att det får komma hur nära 2 som helst är förkortningen tillåten. Det löser vi genom att studera gränsvärdet av funktionen då  $x$  närmar sig 2:

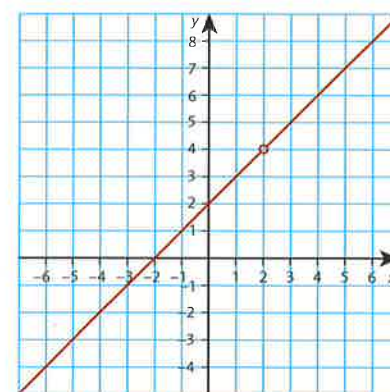
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

Detta tolkas alltså som att  $g(x)$  går mot värdet 4 då  $x$  går mot värdet 2. Vi kan också uttrycka samma sak med skrivsättet

$$g(x) \rightarrow 4 \text{ då } x \rightarrow 2.$$

Däremot kan vi inte skriva att  $g(x) = 4$  då  $x = 2$ , dvs.  $g(2) = 4$ . Den ursprungliga funktionen är ju inte definierad för  $x = 2$ .

Om faktorn  $(x-a)$  ingår i nämnaren hos en rationell funktion, kan ett gränsvärde endast existera då  $x \rightarrow a$ , om faktorn  $(x-a)$  även ingår i täljaren. Polynomen i täljaren och nämnaren måste med andra ord ha ett gemensamt nollställe för  $x = a$ .



### Gränsvärden då $x$ går mot oändligheten

Beräkna gränsvärdet då  $x$  går mot oändligheten för funktionerna

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2} \quad b) g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} \quad c) h(x) = \frac{2x}{x - 1}$$

#### LÖSNING:

- a) Eftersom både täljaren och nämnaren går mot oändligheten måste vi avgöra vilken av dem som växer snabbast då  $x$  går mot oändligheten. Vi börjar därför med att skriva om funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \frac{x^2}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

Det innebär att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

- b) Även här går både täljaren och nämnaren mot oändligheten. För att avgöra vilken av dem som växer snabbast använder vi en metod där man dividerar alla termer med den dominerande faktorn. Det innebär i det här fallet att man söker den potens av  $x$  som har störst exponent och dividerar både täljare och nämnare med den potensen.

$$g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = \frac{\frac{2x - 3x^2}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Det innebär att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 3}{1 + 0} = -3$$

- c) Här ska vi visa två alternativa lösningar (förutom en tredje, som görs på samma sätt som ovanstående):

Metod 1:

Om  $x$  är mycket stort (vilket brukar skrivas  $x \gg 0$ ) kan vi göra approximationen  $x - 1 \approx x$ .

Det innebär att  $h(x) = \frac{2x}{x - 1} \approx \frac{2x}{x} = 2$  för stora värden på  $x$ . Slutsatsen blir då att  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$

Metod 2:

Vi skriver om  $f(x)$  enligt följande, där vi delar upp det rationella uttrycket i två delar:

$$\frac{2x}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 2}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} + \frac{2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} + \frac{2}{x - 1} = 2 + \frac{2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{2}{x - 1} \right) = 2 + 0 = 2$$

$$\text{SVAR: } a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2} = 0 \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = -3 \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

### Gränsvärden då $x$ går mot ett bestämt värde

Undersök om gränsvärden existerar då  $x$  går mot 1 och bestäm i så fall dessa.

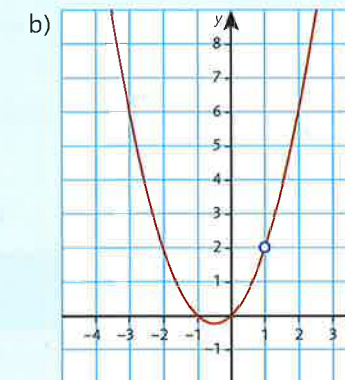
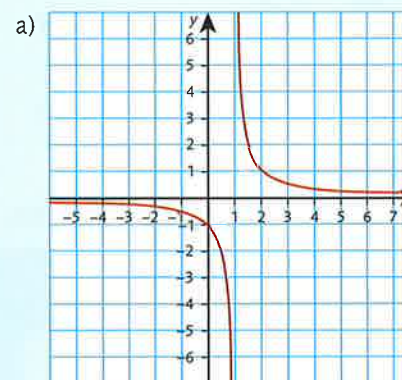
$$a) f(x) = \frac{1}{x - 1} \quad b) g(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$$

#### LÖSNING:

- a) Eftersom täljaren har värdet 1 och nämnaren har värdet 0 då  $x = 1$ , existerar inte något gränsvärde då  $x$  går mot 1.
- b) Eftersom både täljaren och nämnaren har värdet 0 då  $x = 1$ , kan det existera ett gränsvärde då  $x$  går mot 1. Vi faktorerar täljaren, förkortar och beräknar gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x + 1) = 1 \cdot 2 = 2$$

En studie av graferna bekräftar våra slutsatser.



SVAR: a) Det existerar inget gränsvärde då  $x$  går mot 1.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} = 2$$

Om  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  är en rationell funktion, existerar gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$  om  $\text{grad } p(x) \leq \text{grad } q(x)$  och är lika med noll om  $\text{grad } p(x) < \text{grad } q(x)$ . Om  $g(a) = 0$  kan gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  endast existera om  $f(a) = 0$ .

## ÖVA I

**2093** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x+2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}$

**2094** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

**2095** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-18}{x-3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{x-4}$

**2096** Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2-4}{x-2} + \frac{4x-8}{x^2-4} \right)$$

**2097**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$  och  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ .

Bestäm

a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$

a)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$

c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

## ÖVA II

**2098** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+3x-5}{x^2-4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+x}{100x^2+1}$

**2099** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$

**2100** Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h}$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2-(2-h)^2}{2h}$

c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3-2^3}{h}$

**2101** Bestäm gränsvärdet

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h}$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(3+h)^2} - \frac{1}{3^2}}{h}$

c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 En funktion är antingen diskret eller kontinuerlig.
- 2 Om det finns ett avstånd mellan varje värde i en funktions definitionsområde är funktionen diskret.
- 3 Om en funktion är diskret, finns det ett avstånd mellan varje värde i funktionens värdemängd.
- 4 Funktionen  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , är inte kontinuerlig eftersom funktionen gör ett hopp vid y-axeln.
- 5 Gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  kan existera om  $f(a) = 0$  då  $g(a) = 0$ .
- 6 Gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  kan existera om  $f(a) \neq 0$  då  $g(a) = 0$ .



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## KONJUGATTRIX

## UTMANING

Vad blir värdet av  $\left( \sqrt{x+1000000} - \sqrt{x} \right)$  för stora  $x$ ?

■ Undersök först vad som händer med differensen för olika  $x$ -värden med hjälp av räknare eller dator.

■ Bestäm  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x+1000000} - \sqrt{x} \right)$  genom att förlänga med konjugatet till uttrycket  $\left( \sqrt{x+1000000} - \sqrt{x} \right) \cdot \left( \sqrt{x+1000000} + \sqrt{x} \right)$ .

2.1 POLYNOM

- För vilka värden på  $x$  gäller att följande funktioner är växande?  
a)  $y = 2x$       b)  $y = 2x^2$       c)  $y = -2x^2$
- Bestäm extrempunkterna och avgör om de är maximi- eller minimipunkter för funktionerna.  
a)  $y = x^2$       b)  $y = x^2 + 2x - 8$       c)  $y = -3(x - 2)^2 - 4$
- Lös ekvationerna.  
a)  $x^2 + 2x = 8$       b)  $2(x - 2)(2x + 2) = 0$       c)  $x(x - 2) = 3$
- Lös ekvationerna  
a)  $x^3 - 4x = 0$       b)  $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$       c)  $x^4 - 16x^2 = 0$
- Avgör och motivera om det finns polynom av andra graden som  
a) saknar nollställe  
b) har ett nollställe  
c) har två nollställen
- a) Kontrollera att  $(x + 2)$  är en faktor i polynomet  $3x^2 + 4x - 4$ .  
b) Vilken är den andra faktorn?
- Höjden  $h(t)$  m av ett simhopp ges av funktionen  $h(t) = 10 + 5,0t - 5,0t^2$ . Tiden  $t$  är angiven i sekunder.  
Bortse från simhopparens längd vid beräkningarna.  
a) På vilken höjd startar hoppet?  
b) Hur högt når hopparen?  
c) Efter hur lång tid når hopparen vattenytan?
- Lös ekvationen  $x^6 + 2x^4 - 24x^2 = 0$ .

2.2 RATIONELLA FUNKTIONER

- Förenkla om möjligt uttrycken  
a)  $\frac{4x^3y^5}{2xy^2}$       b)  $\frac{4+x^3+y^5}{2+x+y^2}$
- Förenkla om möjligt uttrycken  
a)  $\frac{x^3+x^2+x}{2x^2+x}$       b)  $\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+x}$
- Förenkla uttrycken  
a)  $\frac{x^2-100}{2x-20}$       b)  $\frac{x^2-6x+9}{4x-12}$
- Förenkla uttrycken  
a)  $\frac{2x^2-8x-10}{4x^2-4}$       b)  $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{1-2x}{x(x-1)}$
- Lös ekvationerna  
a)  $\frac{x^2-16}{2x-12} = 0$       b)  $\frac{x^2+4x+3}{2x+6} = 0$
- Lös ekvationerna  
a)  $\frac{x^2-9}{x-3} = 2$       b)  $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{18}{5x}$
- Ett tal kvadreras och subtraheras därefter med produkten av 3 och talet. Resultatet divideras med skillnaden mellan 3 och talet. Resultatet blir 1. Vilket är talet?
- Vad är fel i denna ekvationslösning?  
 $\frac{x^2-2x}{4x-8} = 0$   
 $x^2 - 2x = 0(4x - 8)$   
 $x(x - 2) = 0$   
 $x = 0$  eller  $x = 2$

## 2.3 DISKRETA OCH KONTINUERLIGA FUNKTIONER SAMT GRÄNSVÄRDEN

1 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = x^2, D_f = N$       b)  $g(x) = \sqrt{1-x}, x < 1$

2 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$       b)  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } x \geq 1 \\ 1 & \text{då } x < 1 \end{cases}$

3 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{2x^2 - 6}$

4 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + x}$

5 Antalet sätt,  $A$ , att placera  $n$  personer i en kö beskrivs av funktionen

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 2 \cdot 1.$$

Vilken typ av funktion, kontinuerlig eller diskret, är det? Motivera.

6 Följande portotabell anger vad det kostar att skicka brev inom Sverige. Är portotabellen en funktion (och i så fall något av alternativen diskret och kontinuerlig) definierad för vikter upp till 2000 g? Motivera ditt svar.

| Vikt högst (gram) | Pris  |
|-------------------|-------|
| 20                | 5:30  |
| 100               | 10:60 |
| 250               | 21:20 |
| 500               | 31:80 |
| 1000              | 42:40 |
| 2000              | 63:60 |

7 Kostnaderna  $K(x)$  kr vid tillverkning av  $x$  pizzor ges per dag av  $K(x) = 8000 + 12x$ .

Intäkterna vid försäljningen ges av  $I(x) = 65x$ .

a) Bestäm en funktion för resultatet av försäljningen.

b) Avgör om funktionen är diskret eller kontinuerlig.

8 Undersök om följande gränsvärde existerar och bestäm i så fall dess värde.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

## ÖVA 1

1 Lös ekvationerna.

a)  $x^3 = 216$       b)  $2x^3 + 5 = 255$   
c)  $x^4 = 81$

2 Bestäm extrempunkten och avgör om den är en lokal maximi- eller minimipunkt för funktionen

a)  $y = -3x^2$       b)  $y = 2x^2 + 8x + 12$   
c)  $y = (x-4)^2 - 3$

3 Lös ekvationerna.

a)  $2x^2 + 6x - 8 = 0$   
b)  $-x^2 - 16x + 17 = 0$   
c)  $x(x+2)(x+1)(x-3) = 0$

4 Faktorisera

a)  $15x^3 - 5x^2$       b)  $3x^2 - 48$   
c)  $2x^2 - 20x + 18$

5 Undersök om  $x = -2$  är en lösning till följande ekvationer.

a)  $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$   
b)  $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$   
c)  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$

6 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{2x-8}{4-x}$       b)  $\frac{x}{x+3} - \frac{3x-9}{x^2-9}$   
c)  $\frac{2x^2-4x+2}{x^2-1}$

7 Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-10} = 0$       b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+1} = 2$   
c)  $\frac{4x^2+4x}{x^2+2} = 2x$

8 Lös ekvationerna

a)  $(x-10)(x-100)(x+1000) = 0$   
b)  $3x(4x-8)(2x+6) = 0$   
c)  $2x(x-5)(3x+12)^2 = 0$

9 Lös ekvationerna

a)  $x^3 - 25x = 0$   
b)  $x^3 - 16x^2 + 15x = 0$   
c)  $x^3 - 9x^2 = 0$

10 Lös ekvationerna

a)  $x^4 - 4x^2 = 0$   
b)  $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$   
c)  $x^4 - 100x^2 + 2304 = 0$

11 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1, D_f = R$   
b)  $g(x) = 1000 \cdot 1,05^x, D_g = R$   
c)  $h(x) = \frac{1}{x+1}, D_h = N$

12 Bestäm de gränsvärden som existerar.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x^2-16}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

13 Bestäm de gränsvärden som existerar.

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{2x+6}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

14 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x}{x^2-3}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25x+300}{x}$



- 15 En rektangulär hästhage har arean 1,00 tunnland. Staketet är sammanlagt 330 meter långt. Beräkna längden av hagens sidor. Areaenheten tunnland är vanlig inom lantbruket och motsvarar precis ett halvt ha (hektar). Dessutom gäller att 1 ha = 100 a (ar) och 1 a = 100 m<sup>2</sup>.

## ÖVA II

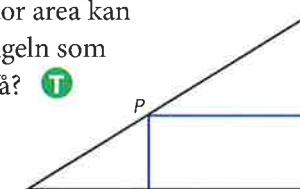
- 16 a) Visa att polynomet  $x^3 - 2x^2 - 15x$  har nollställena -3 och 5.  
b) Har polynomet fler nollställor?
- 17 a) Visa att polynomet  $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$  har nollställena -2, -1 och 1.  
b) Har polynomet fler nollställor?
- 18 Visa att ekvationen  $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$  saknar reella lösningar.
- 19 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.
- a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

- 20 Hur många rötter har ekvationen  $x^{n+2} - x^n = 0$  om  $n$  är ett positivt heltal?
- 21 I multiplikationstabellen för talet 3 finns en följd av tre tal. Låt värdet av det minsta talet betecknas med  $x$ .
- a) De tre talen subtraheras med 15. Skriv ett uttryck för produkten av de nya talen.  
b) Vilka är de tre ursprungliga talen om produkten av de nya talen blir 0?
- 22 En rektangulär låda, där sidorna har proportionerna 1:2:3, rymmer 7,5 dl. Beräkna lådans sidor.
- 23 Årsresultatet  $R(x)$  kr hos ett företag då  $x$  enheter produceras ges av funktionen  $R(x) = -x^2 + 20\,000x - 19\,000\,000$ .
- a) Hur många enheter ska företaget producera för att få så stor vinst som möjligt?  
b) Hur stor är den maximala vinsten per år?
- 24 Ett andragradspolynom  $p(x)$  har två nollställor,  $x = 3$  och  $x = -1$ . Dessutom gäller att  $p(2) = 1$ . Bestäm polynomet på formen  $p(x) = ax^2 + bx + c$ .
- 25 En vattenränna ska tillverkas av en rektangulär plåtbit som är 5,00 meter lång och 48 cm bred. Långsidorna viks upp på båda sidor för att inte vattnet ska rinna ut. De blir då vinkelräta mot botten.
- a) Hur ska rännan utformas för att maximera vattenflödet?  
b) Hur många liter vatten kan finnas samtidigt i rännan om lutningen och flödet gör att vattenytan når upp till kanten överallt?



- 26 Ge formeln för ett andragradspolynom som är avtagande för negativa  $x$ -värden, växande för positiva  $x$ -värden, som skär  $y$ -axeln i punkten (0, 3) och går genom punkten (1, 5).
- 27 Funktionen  $f(x) = x^3$  har en terrasspunkt i origo.
- a) Ge förslag på ett tredjegrads-polynom med terrasspunkt i punkten (0, 1).  
b) Ge förslag på ett tredjegrads-polynom med terrasspunkt i punkten (1, 1).
- 28 En funktion  $h(t)$  används för att beskriva mängden  $h$  mg av ett medicinskt preparat i en kropp  $t$  timmar efter medicinering.
- a) Vad är innebörden av beteckningen  $h(3)$ ?  
b) Vad får man svar på genom att lösa ekvationen  $h(t) = 0$ ?  
c) Under en begränsad tid beskrivs medicinmängden av funktionen  $h(t) = t^2 - 16t + 64$ . När har medicinen försvunnit ur kroppen?  
d) Vad finns det för begränsningar i tid avseende formelns giltighet?

- 29 En rektangel skrivs in i en rätvinklig triangel enligt figuren. Punkten  $P$  kan flyttas längs hypotenusan. Triangelns kateter har längderna 6,0 cm och 8,0 cm. Hur stor area kan rektangeln som mest få? **T**



- 30 En torghandlare säljer tulpaner varje lördag. Hon har upptäckt att priset påverkar efterfrågan så att antalet sålda buketter,  $x$ , beror av priset,  $p$  kronor, enligt sambandet  $x = 58 - p$ .
- a) Hjälp henne att bestämma ett pris så att hennes inkomster blir så stora som möjligt.  
b) Hur stora kan hennes inkomster maximalt bli?
- 31 Ett litet företag tillverkar fotoramar. Varje månad har företaget fasta kostnader på 280 000 kronor. Dessutom kostar tillverkningen av varje fotoram 45 kronor. Antalet sålda fotoramar per månad ( $x$ ) beror på priset ( $p$  kr) enligt sambandet  $x = 50(225 - p)$ .
- a) Inom vilket intervall ska priset ligga för att verksamheten ska gå med vinst?  
b) Vilket pris ger maximal vinst per månad?  
c) Hur stor kan vinsten bli som mest varje månad? **T**
- 32 Ge formeln för ett polynom av andra graden som har en minimipunkt i (1, -3) och som har ett nollställe för  $x = 2$ . **T**

- 33 I ett koordinatsystem är kurvan  $y = 7 - x^2$  ritad. En rektangel ska placeras med ett hörn i origo och ett hörn i en punkt på kurvan. Punktens koordinater ska båda vara positiva.

Om rektangelns hörn placeras i punkten (1, 6) blir arean hos rektangeln 6 a.e. Det finns ytterligare en punkt på kurvan som ger samma rektangelarea. Ange den punktens koordinater. **T**

### ÖVA III

- 34 I figuren visas grafen till  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ . Den streckade linjen är grafen till  $y = x + 1$ .

Som framgår av figuren närmar sig grafen till  $f(x)$  alltmer den räta linjen  $y = x + 1$ . Den streckade linjen kallas därför för *asymptot* till kurvan  $y = f(x)$ .

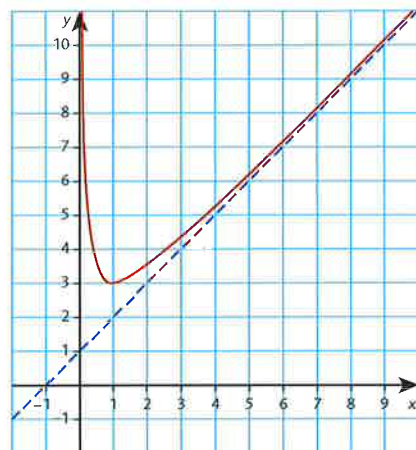
Om en funktion kan skrivas  $f(x) = kx + m + g(x)$ , där  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , kommer grafen till  $f(x)$  att närma sig asymptoten  $y = kx + m$  då  $x$  går mot oändligheten.

- Förklara varför  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$  närmar sig linjen  $y = x + 1$  då  $x \rightarrow \infty$ .

- Vilken linje kommer grafen till  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$  närma sig då  $x \rightarrow \infty$ ? Motivera ditt svar.

Ett sätt att visa att  $y = kx + m$  är asymptot till  $f(x)$  då  $x \rightarrow \infty$  är att visa gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$ .

- Visa att  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$  har linjen  $y = x + 3$  som asymptot då  $x \rightarrow \infty$ .
- Visa att  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$  har linjen  $y = x - 2$  som asymptot då  $x \rightarrow \infty$ .
- Vilken asymptot har grafen till  $f(x) = \frac{9x^2 - 6x + 2}{3x - 1}$  då  $x \rightarrow \infty$ ?



**Polynom.** Ett polynom är en funktion av typen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Koefficienterna  $a_n$  till  $a_0$  är reella tal och  $n$  är ett naturligt tal.

**Växande funktion.** En funktion som växer från vänster till höger.

( $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ ) då  $a$  och  $b$  väljs godtyckligt).

**Avtagande funktion.** En funktion som avtar från vänster till höger.

( $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ ) då  $a$  och  $b$  väljs godtyckligt).

**Extrempunkt.** Ett lokalt maximum eller minimum.

Ett polynom av grad  $n$  har högst  $(n - 1)$  extrempunkter.

**Lokalt maximum.** Ett funktionsvärde som är större än eller lika med alla andra värden i den närmaste omgivningen.

**Lokalt minimum.** Ett funktionsvärde som är mindre än eller lika med alla andra värden i den närmaste omgivningen.

**Tangent.** En rät linje som har en punkt gemensam med en kurva och som har samma riktning som kurvan i den punkten.

**Terrasspunkt.** En punkt på en kurva med vågrät tangent och där kurvan antingen är enbart växande eller avtagande på båda sidor om punkten.

**Nollställe.** De  $x$ -värden för vilka en graf skär  $x$ -axeln.

Ett polynom av grad  $n$  har högst  $n$  nollställen.

**Faktorisering.** Att skriva om ett uttryck som en produkt av ett antal faktorer.

**Rationellt uttryck.** Ett uttryck på formen  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , där  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom och  $q(x) \neq 0$ .

**Diskret funktion.** En funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden.

**Kontinuerlig funktion.** En funktion som är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

**Gränsvärde.** Gränsvärdet av  $f(x)$  kan t.ex. skrivas  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  eller  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  och anger i dessa fall de värden som funktionen går mot då  $x$  går mot oändligheten ( $\infty$ ) eller mot  $a$ .