

3 Derivata



Centralt innehåll

- Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion
- Härledning och användning av deriveringsregler för potensfunktioner samt summor av funktioner
- Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion

Inledning

Under 1600-talet studerade många fysiker och astronomer kroppars rörelser. Italienaren Galileo Galilei (1564–1642) var övertygad om att dessa rörelser kunde beskrivas matematiskt och hans arbete ledde fram till matematiska beskrivningar av kulors lägen vid fritt fall eller i lutande plan. När han studerade skrifter av den polske astronomen Nicolaus Copernicus (1473–1543), blev han övertygad om att planeterna kretsade runt solen och att även dessa rörelser kunde få sina matematiska beskrivningar. Som en följd av att han stödde Copernicus världsbild fick han husarrest av den katolska kyrkan för resten av sitt liv eftersom han ifrågasatte att världssalltets medelpunkt var jorden.

Johannes Kepler (1571–1630) från Tyskland studerade också planeternas banor och fann att dessa var elliptiska. Han gav dessa rörelser matematiska beskrivningar. Detta arbete lade grunden för ett revolutionerande arbete inom matematiken av den engelske vetenskapsmannen Isaac Newton (1642–1727). Han nöjde sig inte med att beskriva kroppars positioner utan ville också hitta metoder för att bestämma deras hastigheter. Det var problematiskt eftersom hastigheter hos de allra flesta kroppar inte är konstanta. När han ville bestämma hastigheten vid en tidpunkt, blev det en svår uppgift eftersom en hastighetsbestämning krävde både en sträcka och ett tidsintervall. Följden blev att det bara gick att bestämma medelhastigheter under dessa intervall. Newton löste detta problem genom att införa derivata. Enkelt uttryckt innebar det att låta både s och t vara "oändligt små" då formeln $v = s/t$ användes vid hastighetsbestämning.

Oberoende av Newton arbetade en tysk matematiker vid namn Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) med matematiska problem. Han sysslade med strikt matematiska frågeställningar och dessa ledde fram till att han så småningom behövde "uppfinna" derivata. Han fick 1676 ta del av Newtons metoder och kunde med hjälp av dessa vidareutveckla sina egna matematiska teorier. I och med detta var *förändringens matematik* född och det är denna matematik som kapitel 3 handlar om.



Din första uppgift

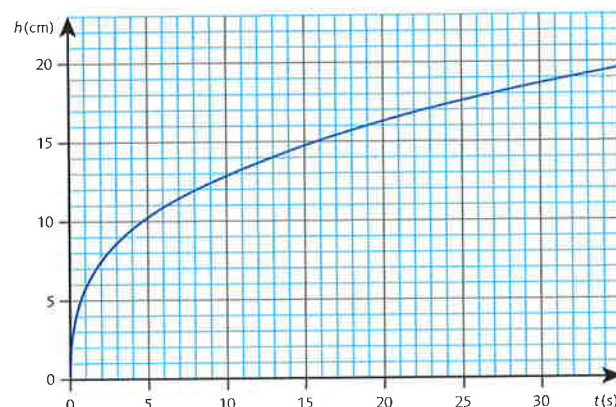
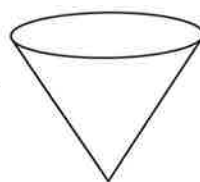
Det har tvistats länge om vem som var först med derivata, Newton eller Leibniz. Det ledde också till en konflikt mellan dessa två, där båda hävdade att de var först. Sök information om denna tvist, hur den hanterades och hur andra vetenskapsmän tog ställning i frågan.

3.1 Ändringskvot

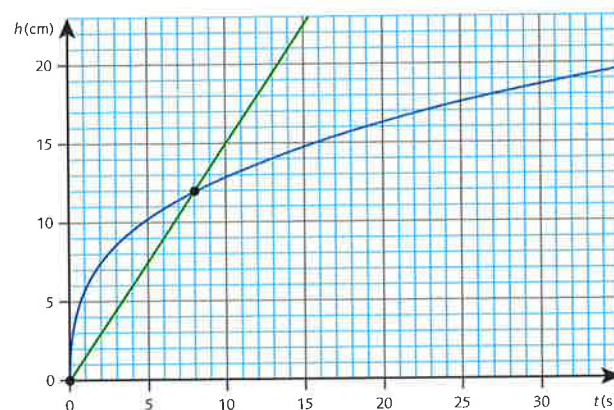


Teorigenomgång

En vattenbehållare formad som en upp-och-nervänd kon fylls med vatten med konstant hastighet. Grafen visar hur vattnets höjd h cm beror av tiden t s. Eftersom behållaren är konformad stiger höjden allt långsammare när vattenytans radie ökar.



För att bestämma medelhastigheten av hur snabbt höjden stiger under ett intervall, kan vi rita en *sekant*. En sekant är en rät linje som skär en kurva i minst två punkter. I figuren har en sekant ritats mellan punkterna $(0, 0)$ och $(8, 12)$ på kurvan.



Lutningen hos sekanten bestämmer medelhastigheten, v_m cm/s, hos höjdförändringen under de åtta första sekunderna.

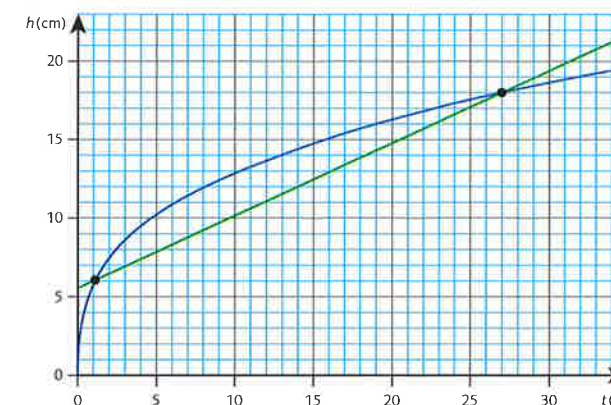
$$v_m = \frac{12-0}{8-0} = 1,5$$

Vattennivån stiger med andra ord med medelhastigheten 1,5 cm/s under detta tidsintervall.

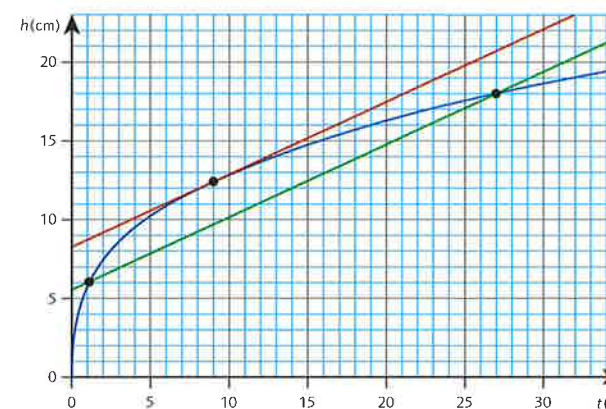
Om vi istället vill veta hur snabbt vattennivån stiger från tiden 1 s till tiden 27 s ritas vi en sekant mellan punkterna vid dessa tider.

Här blir medelhastigheten

$$v_m = \frac{18-6}{27-1} \approx 0,46$$



Höjden ökar alltså med medelhastigheten 0,46 cm/s. Vi avslutar med att rita en tangent till en punkt och välja punkten så att tangenten och den senare sekanten får samma lutning. Vid denna punkt har t värdet 9.



Eftersom tangentens lutning är samma som sekantens kan vi dra slutsatsen att vid tiden 9 s ökar vattennivån med 0,46 cm/s. Eftersom detta är hastigheten vid en viss tidpunkt, brukar man kalla den för *momentanhastighet*.

De gröna linjerna, sekanterna, illustrerar medelhastigheter och med hjälp av dessa kan vi bestämma *ändringskvoter*. En ändringskvot anger ett *medelvärde på förändringshastigheten* hos en funktion. Grafiskt motsvarar det kurvans medellutning i ett givet intervall.

Den röda linjen, tangenten, illustrerar en momentanhastighet eller en *förändringshastighet i en punkt*. Ett annat namn för det är funktionens *derivata*, vilket vi ska återkomma till i nästa avsnitt.

I fallet med vattenbehållaren har vi bara tillgång till en kurva och bestämmer därför alla kvoter grafiskt. Om vi istället har ett funktionsuttryck, kan motsvarande kvoter bestämmas algebraiskt. Det visas i följande exempel.

Urtappning av vatten

Då en behållare töms på vatten, beskrivs höjden $h(t)$ cm hos vattennivån som funktion av tiden t s av sambandet

$$h(t) = 0,025(40 - t)^2, 0 \leq t \leq 40$$

- Bestäm hur snabbt höjdförändringen sker mellan tidpunkterna 29 s och 31 s.
- Uppskatta med hjälp av föregående bestämning hur snabbt höjdförändringen sker vid tidpunkten 30 s.

LÖSNING:

- Genom att bestämma $h(31)$ och $h(29)$ får vi höjderna vid tidpunkterna 31 s och 29 s.

Differensen mellan dessa värden ger höjdförändringen och differensen mellan 31 s och 29 s ger den tid det tagit. Kvoten av höjdförändringen och tiden ger medelhastigheten hos höjdförändringen.

$$v_m = \frac{h(31) - h(29)}{31 - 29} = \frac{0,025(40 - 31)^2 - 0,025(40 - 29)^2}{31 - 29} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Slutsatsen är att vattennivån sjunker med medelhastigheten 0,5 cm/s i det aktuella tidsintervallet.

- Eftersom vi studerat ett litet tidsintervall kring tidpunkten 30 s i a-uppgiften, kan vi anta att momentan hastigheten hos höjdförändringen vid tiden 30 s är ungefär lika stor som medelhastigheten i föregående uppgift.

Slutsats: Vattennivån sjunker ungefär med hastigheten 0,5 cm/s vid tidpunkten 30 s.

SVAR: a) -0,5 cm/s b) -0,5 cm/s

ÖVA 1

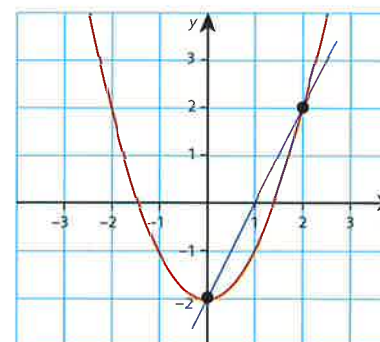
- 1
 - 2
 - 4
 - 6
- 3001** För behållaren i exemplet ovan beskrivs höjden av sambandet $h(t) = 0,025(40 - t)^2$. Höjden $h(t)$ anges i cm och tiden t i s. Bestäm medelvärde för hur snabbt vattennivån ändras
- mellan tidpunkterna 0 s och 10 s
 - mellan tidpunkterna 10 s och 20 s
 - mellan tidpunkterna 9 s och 11 s

- 3002** Använd resultatet från lämplig deluppgift i övning 3001 för att bestämma hur snabbt vattennivån ungefär ändras vid tidpunkten 10 s.

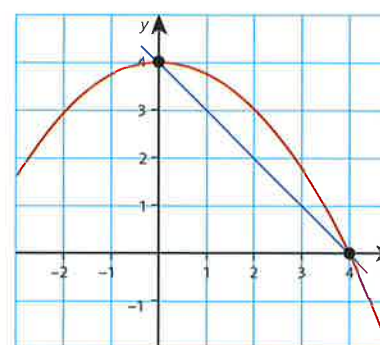
- 3003** Vid uttömning av vattnet i exemplet ovan och övning 2001 beskrivs höjden $h(t)$ cm som funktion av tiden t s av modellen $h(t) = 0,025(40 - t)^2$. Har modellen några begränsningar?

- 3004** Bestäm grafernas medellutning mellan de markerade punkterna.

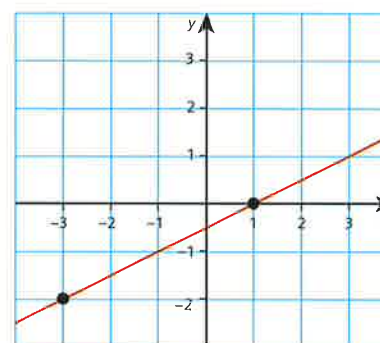
a)



b)

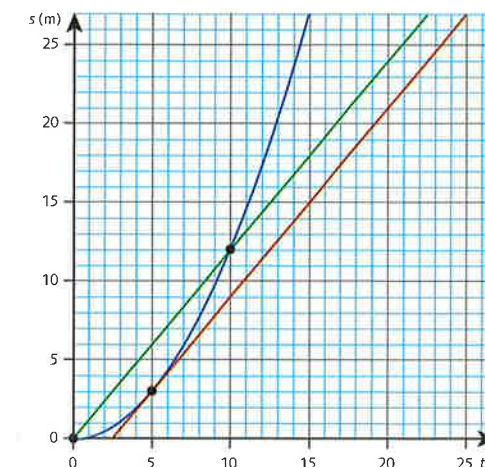


c)



- 3005** $f(x) = x^3$. Bestäm ändringskvoten $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$

- 3006** Grafen visar hur sträckan hos ett accelererande föremål beror av tiden. I grafen finns även en sekant och en tangent utritade.



Bestäm

- medelhastigheten under de tio första sekunderna
- momentanhastigheten då t är 5,0 s

- 3007** Bestäm för rörelsen som illustreras av grafen i övning 3006

- medelhastigheten mellan tidpunkterna 0 s och 5,0 s
- medelhastigheten mellan tidpunkterna 5,0 s och 10 s

- 3008** Inkomsterna $I(t)$ miljoner kronor i ett litet företag år t efter år 2010 ges av sambandet $I(t) = 20 \cdot 1,1^t$.

- Bestäm inkomstökningen mellan år 2010 och 2011.
- Bestäm medeltillväxten per år av inkomsten mellan 2010 och 2012.

ÖVA II

3009 Visa grafiskt och bestäm ändringskvoten i intervallet $-1 \leq x \leq 2$ för funktionerna

- a) $f(x) = -x$ b) $g(x) = x^2$
c) $h(x) = -x^3$

3010 Vid fritt fall beskrivs fallsträckan $s(t)$ m som funktion av tiden t s av sambandet $s(t) = 4,9t^2$.

- a) Bestäm $s(2,0)$ och ange med ord vad du har bestämt.
b) Bestäm $\frac{s(2,0)}{2,0}$ och ange med ord vad du har bestämt.
c) Bestäm $\frac{s(4,0) - s(1,0)}{4,0 - 1,0}$ och ange med ord vad du har bestämt.

3011 Graferna i inledningen beskrev hur vattennivån i en behållare ändrades med tiden. Ett samband mellan höjden $h(t)$ cm och tiden t s ges av $h(t) = 6,0 \cdot t^{1/3}$.

- a) Bestäm, med hjälp av sambandet, medelhastigheten hos höjdförändringen mellan tidpunkterna 1 s och 27 s och jämför med den grafiska bestämningen i inledningen.
b) Från tiden 0 s till t s är medelhastigheten hos höjdförändringen 0,375 cm/s. Bestäm t . **L**

3012 För $f(x) = x^2$ gäller ändringskvoten $\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = 6$. Bestäm a .



Ord och begrepp
Koll på avsnittet

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.1

Avgör för varje påstående om det är sant, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Galileo Galilei införde begreppet derivata.
- 2 En sekant är en rät linje som tangerar en kurva i en punkt.
- 3 En sekant kan användas för att illustrera medellutningen hos en kurva mellan två punkter.
- 4 En tangent skär en kurva i minst en punkt.
- 5 En ändringskvot anger hur snabbt en funktions värden förändras mellan två punkter.
- 6 Hastigheten vid en speciell punkt kallas momentan hastighet.



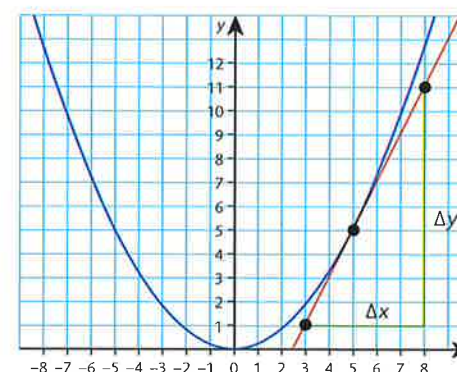
Svar med motiveringar
finns på lärarwebben.

3.2 Derivata

I det förra avsnittet behandlade vi framför allt ändringskvoter, vilka anger ett medelvärde av förändringshastigheten hos en funktion i ett intervall. Vi ska nu gå över till att studera förändringshastigheten hos funktioner i en enda punkt. För att kunna göra det krävs ett nytt begrepp, *derivata*.

Grafisk tolkning av derivata

Vi börjar med att studera en grafisk tolkning av derivata.



I figuren är grafen y till en funktion $f(x)$ ritad. I punkten med x -koordinaten 5 har grafens tangent ritats. Tangenten har i denna punkt samma lutning som grafen. För att bestämma tangentens lutning används en triangel med höjden Δy och bredden Δx . Det ger lutningen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2$$

Det innebär att förändringshastigheten är 2 hos funktionen $f(x)$ då $x = 5$. Denna förändringshastighet kallas också *derivata*. Om $y = f(x)$, skrivs derivatan $y' = f'(x)$ och läses "y-prim" eller "f-prim-x". För den aktuella punkten gäller därmed att $f'(5) = 2$.

Att $f'(5) = 2$ innebär alltså att funktionens förändringshastighet eller derivata har värdet 2 då $x = 5$. Man kan också säga att grafens lutning är 2 då $x = 5$.

OM $y = f(x)$ GÄLLER FÖLJANDE:

$y' = f'(x)$ anger funktionens derivata.

$f'(a)$ anger funktionens derivata eller förändringshastighet då $x = a$.

Grafiskt anger $f'(a)$ kurvans lutning då $x = a$.

Tangenter och derivata

I figuren finns grafen till funktionen $f(x) = x^2$ samt två tangenter.

Bestäm

a) $f'(1)$

b) $f'(-2)$

LÖSNING:

Lutningen hos en tangent i en punkt ger derivatan i punkten.

För att bestämma derivatan bestämmer vi tangentens lutning k genom att använda två punkter på tangenten.

a) Punkter: (1, 1) och (2, 3)

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(1) = k = 2$$

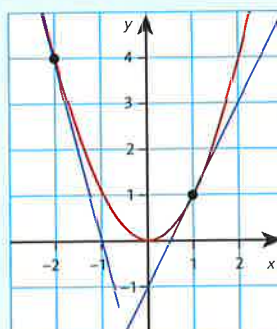
b) Punkter: (-2, 4) och (-1, 0)

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{-1-(-2)} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$f'(-2) = k = -4$$

SVAR: a) $f'(1) = 2$

b) $f'(-2) = -4$



Tolkningar av uttryck och ekvationer

När en kula faller fritt bestäms dess fallsträcka av sambandet $s(t) = 4,9t^2$, där $s(t)$ är sträckan i m och t är tiden i s. Vad får man veta genom att

a) bestämma värdet av uttrycket $s(2)$

b) bestämma värdet av uttrycket $s'(2)$

c) lösa ekvationen $s(t) = 2$

d) lösa ekvationen $s'(t) = 2$

SVAR:

a) $s(2)$ m anger sammanlagd fallsträcka efter 2 s.

b) $s'(2)$ m/s anger hastigheten då det har gått 2 s.

c) Lösningen på ekvationen $s(t) = 2$ ger den tid i s det tar för kulan att falla 2 m.

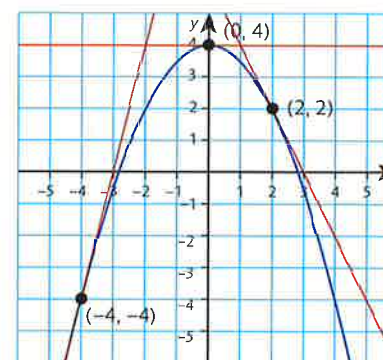
d) Lösningen på ekvationen $s'(t) = 2$ ger den tid det tar i s för kulan att nå hastigheten 2 m/s.

ÖVA I

3013 I grafen till $f(x)$ är tre tangenter inritade. Bestäm

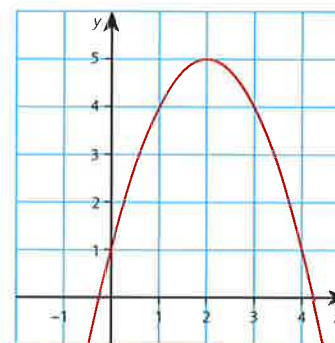
a) $f(-4)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$

d) $f'(-4)$ e) $f'(0)$ f) $f'(2)$



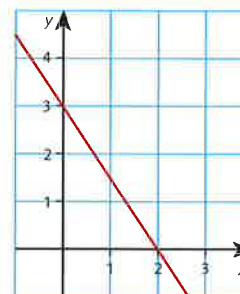
3014 Grafen till $f(x)$ visas i figuren.

Uppskatta med hjälp av grafen $f'(1)$.



3015 I figuren visas grafen till

$$f(x) = -1,5x + 3. \text{ Bestäm } f'(2).$$



3016 Kombinera de påståenden som passar ihop för en deriverbar funktion $f(x)$.

A: $f'(x) < 0$

B: $f'(x) > 0$

C: $f'(x) = 0$

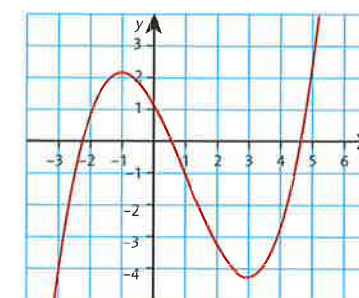
D: Funktionen $f(x)$ är växande.

E: Funktionen $f(x)$ har en extrem- eller terrasspunkt.

F: Funktionen $f(x)$ är avtagande.

3017 I figuren visas kurvan $y = f(x)$.

Lös med hjälp av kurvan ekvationen $f'(x) = 0$.



ÖVA II

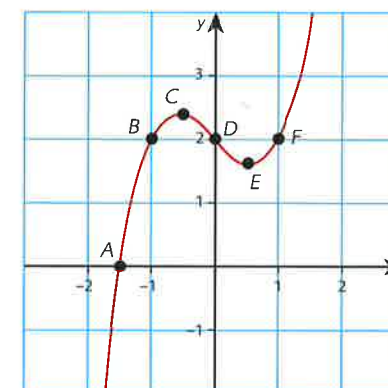
3018 I vilken eller vilka av de markerade punkterna på grafen till $f(x)$ är

a) $f(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x)$ störst

d) $f'(x)$ minst





3019 Då en sten kastas upp i luften är dess höjd $h(t)$ m efter t s. Vad får man veta genom att

- a) bestämma värdet av uttrycket $h(3)$
- b) bestämma värdet av uttrycket $h'(1)$
- c) lösa ekvationen $h(t) = 12$
- d) lösa ekvationen $h'(t) = -10$

3020 Folkmängden $N(t)$ beskriver antalet invånare i ett land år t efter år 2000. Vilken slutsats kan man dra av att $N'(t) < 0$?

3021 Temperaturen i en bastu är $f(t)^\circ\text{C}$ då det gått t minuter efter att den har satts på. Tolkande likheter.

- a) $f(0) = 15$
- b) $f(15) = 42$
- c) $f'(15) = 1,8$
- d) $f'(90) = -0,6$

3022 Mängden vatten i ett badkar är $V(t)$ liter vid tiden t minuter efter 20.00. Ställ upp det uttryck eller den ekvation som kan användas för att besvara följande frågor.

- a) Hur mycket vatten finns det i badkaret kl 20.45?
- b) Hur snabbt ändras mängden vatten i badkaret kl 20.55?
- c) När finns det 150 l vatten i badkaret?
- d) När minskar vattenmängden med 30 l/min?
- e) Med vilken medelhastighet töms badkaret mellan 20.55 och 21.00?

Gruppaktivitet

BESTÄM DERIVATA NUMERISKT

Oavsett om ni arbetar med en grafitande räknare eller med ett datorprogram som exempelvis GeoGebra, finns det möjligheter att låta räknaren eller datorprogrammet rita tangenter och bestämma derivatans värde. Ta reda på och undersök dessa möjligheter genom att med hjälp av något tekniskt hjälpmedel exempelvis försöka bestämma

$$f'(1) \text{ då } f(x) = x^2$$

$$f'(-2) \text{ då } f(x) = x^3$$

$$f'(3) \text{ då } f(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

Uppskattning av derivata med symmetrisk ändringskvot

Tänk dig att du vill bestämma $f'(1)$ för funktionen $f(x) = x^2$ grafiskt med hjälp av en tangent. Det är inte alldeles lätt att få ett bra värde utan tekniska hjälpmedel som exempelvis ett grafitande program. Det är svårt att rita böjda kurvor för hand och svårt att dra tangenter korrekt.

Ett alternativ är att använda en *symmetrisk ändringskvot* i ett litet intervall kring $x = 1$. Med symmetrisk ändringskvot menas att intervallets ändpunkter i det här fallet ligger på varsin sida om och lika långt från $x = 1$. Man kan t.ex. bestämma ändringskvoten mellan $x = 0,9$ och $x = 1,1$. Det ger som regel ett bra närmevärde till derivatan för $x = 1$.

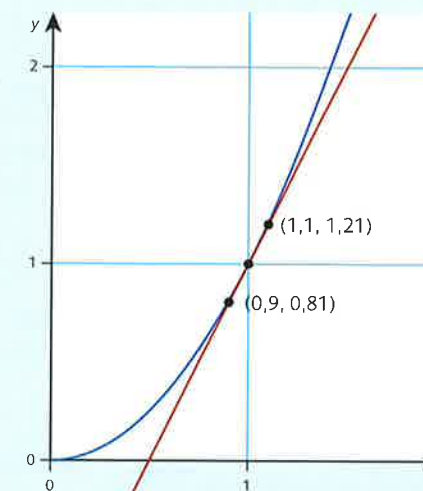
Uppskattning av derivatans värde

$f(x) = x^2$. Uppskatta värdet hos $f'(1)$ genom att undersöka förändringshastigheten i ett litet intervall som ligger symmetriskt kring $x = 1$.

LÖSNING:

Uppgiften kan lösas utan graf men vi ritar först en graf med en tangent i punkten $(1, 1)$ för att kunna jämföra funktionens graf och tangenten nära den aktuella punkten.

Derivatans värde fås genom att bestämma tangentens riktningskoefficient. De markerade punkterna i figuren ligger inte på tangenten men på grafen till $f(x) = x^2$. Eftersom grafen och tangenten nästan sammanfaller i ett litet område kring punkten $(1, 1)$, använder vi dessa punkter för att få ett närmevärde till $f'(1)$.



$$f'(1) \approx \frac{f(1,1) - f(0,9)}{1,1 - 0,9} = \frac{1,1^2 - 0,9^2}{1,1 - 0,9} = \frac{1,21 - 0,81}{1,1 - 0,9} = \frac{0,4}{0,2} = 2$$

SVAR: $f'(1) \approx 2$

ÖVA I

- 3023** Bestäm ett närmevärde till $f'(3)$ för funktionen $f(x) = 3x^2$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(3,1) - f(2,9)}{3,1 - 2,9}$.
- 3024** Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = 2^x$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$.
- 3025** Bestäm ett närmevärde till $f'(-1)$ för funktionen $f(x) = x^3$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(-0,9) - f(-1,1)}{-0,9 - (-1,1)}$.
- 3026** Bestäm ett närmevärde till $f'(1)$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten mellan $x = 0,99$ och $x = 1,01$ för funktionen
- $f(x) = 2x^3$
 - $f(x) = 10^x$
 - $f(x) = \sqrt{x}$
- 3027** Folkmängden $N(t) = 84\,000 + 1\,200t$ beskriver antalet invånare i en kommun år t efter år 2000. Medeltillväxthastigheten per år under en period Δt bestäms av $\frac{\Delta N}{\Delta t}$
- Bestäm medeltillväxthastigheten mellan $t = 0$ och $t = 5,0$.
 - Bestäm medeltillväxthastigheten mellan $t = 5,0$ och $t = 9,0$.
 - Bestäm medeltillväxthastigheten mellan $t = 9,0$ och $t = 12,0$.
 - Förklara dina resultat.

ÖVA II

- 3028** Funktionerna A–C har det gemensamt att $f'(1) = 1$. Du ska bestämma ändringskvoten mellan $x = 0,5$ och $x = 1,5$.
- Gör en uppskattning av $f'(1)$ för funktionerna A–C genom att bestämma ändringskvoten mellan $x = 0,5$ och $x = 1,5$.
- Jämför därefter dina resultat med $f'(1) = 1$ och formulera en slutsats.
- A: $f(x) = \frac{x^4}{4}$ B: $f(x) = \frac{x^3}{3}$
- C: $f(x) = \frac{x^2}{2}$
- 3029** I föregående uppgift jämförde du hur bra närmevärden du fick för olika funktioner då du använde ändringskvoter i samma intervall. Nu ska du undersöka hur intervallets storlek påverkar närmevärdet.
- För funktionen $f(x) = x^4$ gäller det att $f'(2) = 32$. Gör en uppskattning av $f'(2)$ genom att använda ändringskvoter i intervallet
- $1 \leq x \leq 3$
 - $1,9 \leq x \leq 2,1$
 - $1,99 \leq x \leq 2,01$
- Vilka slutsatser kan du dra av din undersökning?
- 3030** Uppskatta $f'(0,50)$ genom att välja lämpliga symmetriska ändringskvoter.
- $f(x) = x^2 + 3x - 2$
 - $f(x) = \sqrt{6x+2}$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$

Linjära funktioner



Teorigenomgång

Hittills har vi bestämt derivatan i en punkt grafiskt genom att studera tangenter. Vi har också uppskattat derivatans värde genom att studera ändringskvoter i små intervall kring punkten. Nu ska vi gå över till att bestämma derivatan exakt.

För de allra flesta funktioner beror derivatans värde av variabelns värde. Undantag från detta är linjära funktioner, eftersom deras grafer ger räta linjer. Förändringshastigheten hos dessa funktioner är därmed konstant och oberoende av variabelns värde.

Eftersom den linjära funktionen $y = 3x + 5$ har riktningskoefficienten $k = 3$, gäller det att dess derivata y' är 3 för samtliga värden på x . På motsvarande sätt kan man konstatera att $y' = k$ för samtliga linjära funktioner av typen $y = kx + m$.

Den linjära funktionen $y = kx + m$ har derivatan $y' = k$ för alla x -värden.

EXEMPEL

Derivata hos linjära funktioner

Bestäm derivatan y' då

a) $y = 4x - 3$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = 5$

LÖSNING:

För linjära funktioner är derivatan lika med funktionens riktningskoefficient.

Funktionerna har i tur och ordning riktningskoefficienterna

a) $k = 4$

b) $k = -2$

c) $k = 0$

Det ger svaren som följer nedan.

Notera särskilt att derivatan av en konstant funktion som i c-uppgiften är noll eftersom dess graf är en vågrät linje.

SVAR: a) $y' = 4$

b) $y' = -2$

c) $y' = 0$

Derivata hos räta linjer genom givna punkter

Bestäm derivatan y' för en linjär funktion y , då dess graf går genom punkterna $(1, 3)$ och $(6, -7)$.

LÖSNING:

Vi bestämmer linjens riktningskoefficient:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7 - 3}{6 - 1} = \frac{-10}{5} = -2$$

Det innebär att $y' = -2$.

SVAR: $y' = -2$

Bestäm linjens ekvation

För en linjär funktion y gäller att $y' = 3$. Dess graf går genom punkten $(2, 5)$. Bestäm linjens ekvation.

LÖSNING:

Linjens riktningskoefficient $k = y' = 3$.

För att bestämma linjens m -värde, ställer vi upp räta linjens ekvation och sätter in kända värden:

$$y = kx + m$$

$$5 = 3 \cdot 2 + m$$

$$m = 5 - 6$$

$$m = -1$$

Det ger oss linjens ekvation: $y = 3x - 1$

SVAR: $y = 3x - 1$

ÖVA I

3031 Bestäm y' .

a) $y = 2x$

b) $y = 2$

3032 Bestäm $f'(x)$.

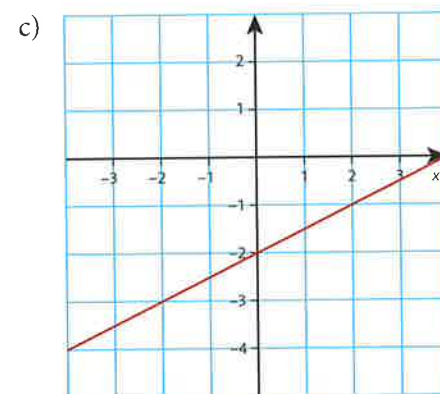
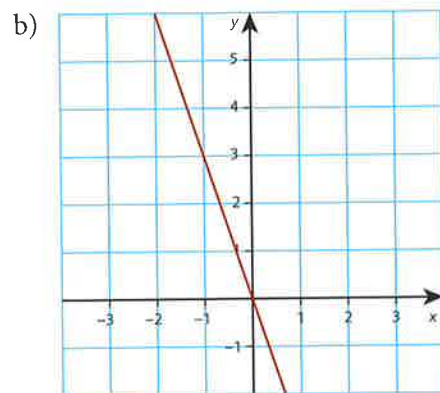
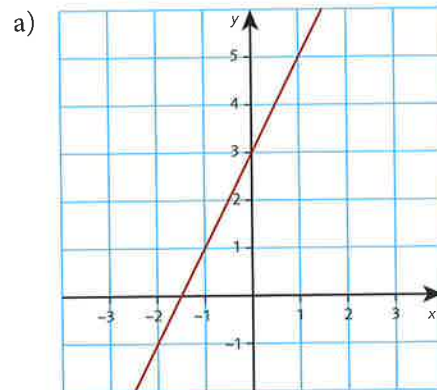
a) $f(x) = \frac{x}{2} - 2$

b) $f(x) = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}$

d) $f(x) = 2 - 2x$

3033 I figurerna återfinns tre funktioner av typen $y = kx + m$. Bestäm derivatan för dessa funktioner.



3034 Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna

a) $(-3, 1)$ och $(1, 5)$

b) $(-4, 5)$ och $(4, 9)$

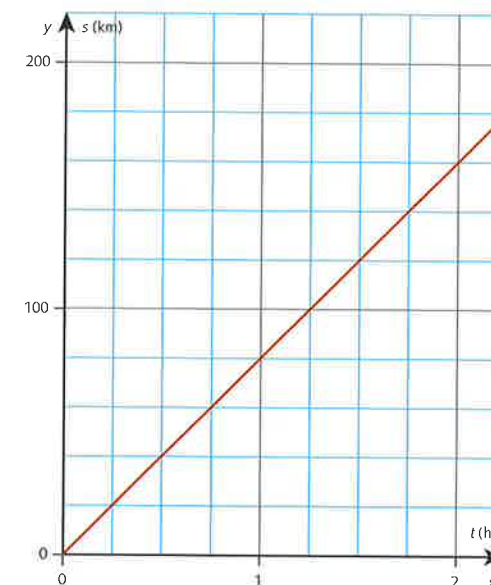
c) $(-1, 1)$ och $(1, 1)$

3035 Derivatan $y' = -2$ för en linjär funktion y . Dess graf går genom punkten $(-2, 7)$. Bestäm linjens ekvation.

3036 I figuren återfinns grafen för färdsträckan $s(t)$ km som funktion av körtiden t h vid en bilresa.

a) Ange funktionen $s(t)$.

b) Bestäm $s'(t)$ och förklara vad derivatan anger för bilresan.



3037 Under ett barns första fyra månader, beskrivs dess vikt av sambandet $m(t) = 3,5 + 0,18t$, där m är vikten i kg och t är antalet veckor efter födseln.

a) Vad anger $m'(t)$

b) Bestäm $m'(t)$

ÖVA II

3038 För en linjär funktion y gäller att $y' = 3$. Dess graf går genom punkten $(2, 9)$.

a) I vilken punkt skär den räta linjen y -axeln?

b) I vilken punkt skär den räta linjen x -axeln?

3039 För en linjär funktion gäller att $f'(1) = 2$.

a) Bestäm $f'(3)$ och motivera ditt svar.

b) Bestäm $f'(a)$, där a är ett godtyckligt tal.

3040 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(2) = f'(2) = 5$. Bestäm funktionen.

T

3041 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Bestäm funktionen.

3042 Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna

a) $(-a, b)$ och (a, b) , $a \neq 0$

b) (a, b) och (b, a) , $a \neq b$

c) $(-3a, 2b)$ och $(2b, -3a)$, $2b + 3a \neq 0$

L

3043 För två linjära funktioner $f(x)$ och $g(x)$ gäller att $f'(x) = -2$ och $g'(x) = \frac{1}{2}$. De skär varandra i punkten $(2, 2)$.

a) Bestäm funktionerna.

b) Bestäm vinkeln mellan de räta linjerna i funktionernas grafer.

T

Derivata hos ickelinjära funktioner



En kula sätts i rullning nerför en backe. Dess läge $s(t)$ m som funktion av tiden t ges av

$$s(t) = t^2.$$

Vi ska undersöka kulans medelhastighet från tiden 1 s till tiden t s, för olika värden på t .

Eftersom medelhastigheten bestäms av sambandet $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ska vi bestämma värdet av olika ändringskvoter.

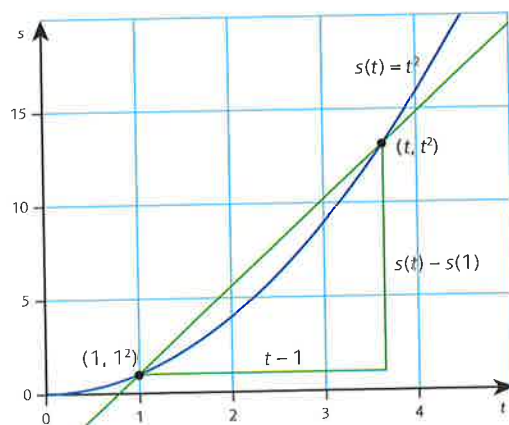
Gemensamt för dessa kvoter är att de algebraiskt kan skrivas (se figuren)

$$v_m = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = t+1, t \neq 1.$$

Konjugatregeln används för att skriva om uttrycket $t^2 - 1^2$ i förenklingen ovan. Anledningen till att t inte får ha värdet ett, är att det första uttryckets nämnare då blir noll.

Vi kan alltså konstatera att v_m algebraiskt kan beräknas med formeln $v_m = t + 1$.

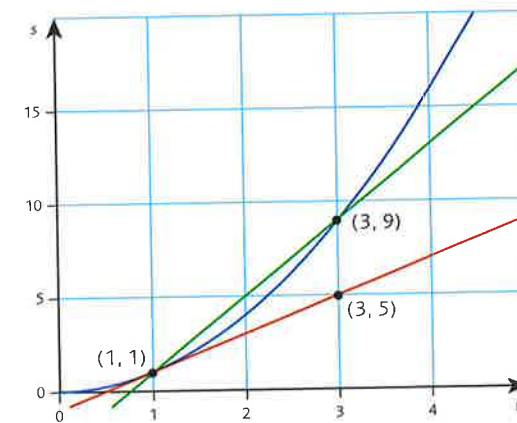
Grafiskt kan ändringskvoter tecknas med hjälp av de aktuella punkterna. Dessa illustreras av de gröna sekanterna. Den röda linjen är en tangent till kurvan i punkten (1, 1).



Figur 1, $t = 4$:

Algebraiskt: $v_m = 4 + 1 = 5$

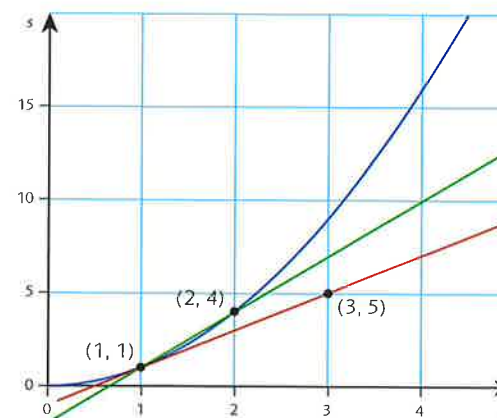
Grafiskt: $v_m = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$



Figur 2, $t = 3$:

Algebraiskt: $v_m = 3 + 1 = 4$

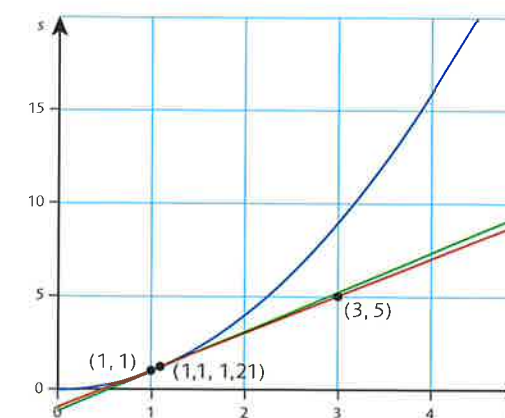
Grafiskt: $v_m = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$



Figur 3, $t = 2$:

Algebraiskt: $v_m = 2 + 1 = 3$

Grafiskt: $v_m = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$



Figur 4, $t = 1,1$:

Algebraiskt: $v_m = 1,1 + 1 = 2,1$

Grafiskt: $v_m = \frac{1,21-1}{1,1-1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1$

Vi bestämmer avslutningsvis lutningen hos tangenten till grafen i punkten (1, 1) med hjälp av de angivna punkterna.

$$k = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ur det algebraiska sambandet $v_m = t + 1$, kan vi konstatera att ju närmare värdet t kommer värdet 1, ju närmare kommer medelhastigheten värdet 2. I grafen kan vi samtidigt se att när värdet t närmar sig värdet 1, närmar sig lutningen hos sekanten lutningen hos tangenten.

I båda fallen kan vi sammanfatta resultatet som att v_m närmar sig 2 då t närmar sig 1.

För att bestämma hastigheten, $s'(t)$, hos kulan just då $t = 1$ kan vi, eftersom $t \neq 1$, studera gränsvärdet av ändringskvoten då t går mot ett (enligt kapitel 2):

$$s'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} (t+1) = 2$$

Hastigheten hos kulan då $t = 1$ får vi med andra ord genom att bestämma gränsvärdet av medelhastigheten då Δt går mot noll. Denna hastighet benämner vi $s'(1)$.

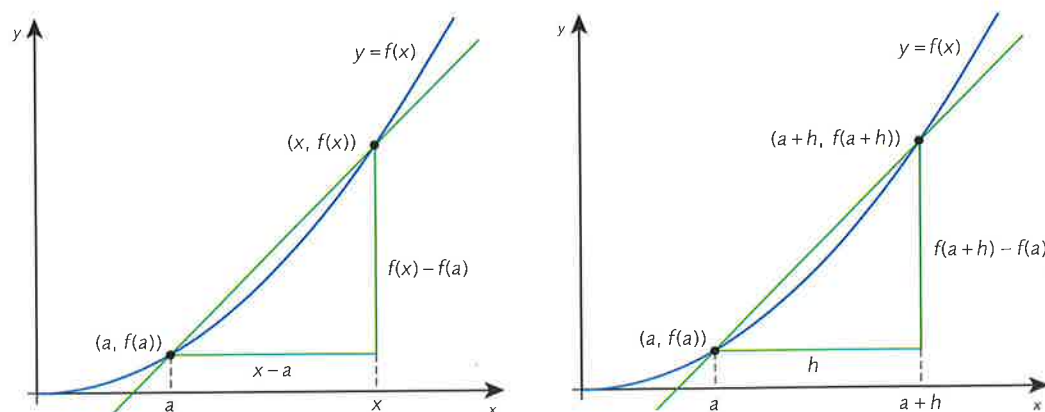
Om vi istället betraktar en funktion $f(x)$ och söker ett uttryck för derivatan då $x = a$, $f'(a)$, kan motsvarande gränsvärde skrivas (jämför med föregående gränsvärde)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Detta gränsvärde är ett sätt att beräkna en funktions derivata. Genom att ersätta x med $a + h$ får vi ett annat och vanligare sätt att skriva derivatan $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Då x närmar sig a i det första fallet, motsvaras det av att h närmar sig noll i det andra fallet. Jämför gärna de två figurerna för att övertyga dig om det.



Resonemanget ovan visar att derivatan för en funktion $f(x)$ fås genom att bestämma gränsvärdet av en ändringskvot då förändringen i x -led, Δx , går mot noll. Det innebär följande definition av derivata:

Definition: Om $f(x)$ är definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet nedan existerar, är $f(x)$ deriverbar då $x = a$. Derivatan av $f(x)$ då $x = a$ betecknas $f'(a)$ och ges av sambandet

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DERIVATANS DEFINITION I EN PUNKT

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Om gränsvärdet existerar för alla x i definitionsmängden till $f(x)$, sägs funktionen $f(x)$ vara deriverbar. Derivatan blir då en ny funktion, $f'(x)$, som ges av gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivatans definition kommer du att använda många gånger för att bestämma derivatan för olika funktioner. Följande exempel visar en modell för hur man kan gå till väga och som kan användas för de allra flesta funktioner som du stöter på.

EXEMPEL

Derivatans definition för en linjär funktion

Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = 3x + 4$

LÖSNING:

Vi ska använda derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi börjar därför med att teckna och förenkla uttrycket $f(x+h)$.

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f(x+h) = 3(x+h) + 4 = 3x + 3h + 4$$

x ersätts med $x+h$ i funktionsuttrycket.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x+3h+4) - (3x+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h+4-3x-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

SVAR: $f'(x) = 3$

Derivatans definition för potensfunktion av grad 2

Funktionen $f(x) = 3x^2$ är given. Bestäm med hjälp av derivatans definition

a) $f'(4)$

b) $f'(x)$

LÖSNING:

a) $f(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$

$$f(4+h) = 3(4+h)^2 = 3(4^2 + 8h + h^2) = 48 + 24h + 3h^2$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 + 24h + 3h^2 - 48}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(24 + 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (24 + 3h) = 24 \end{aligned}$$

Slutsats: $f'(4) = 24$

b) $f(x) = 3x^2$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3(x^2 + 2xh + h^2) = 3x^2 + 6xh + 3h^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

Slutsats: $f'(x) = 6x$

SVAR: a) $f'(4) = 24$

b) $f'(x) = 6x$

ÖVA II

3044 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(x)$ då $f(x) = -2x + 4$
 b) $f'(x)$ då $f(x) = x + m$
 c) $f'(x)$ då $f(x) = kx + m$

3045 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(2)$ då $f(x) = x^2$
 b) $f'(2)$ då $f(x) = x^2 + 3$
 c) $f'(2)$ då $f(x) = x^2 + 3x$

3046 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2$
 b) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2 + 5$
 c) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2 + 5x$

- 3047 a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$.
 b) Använd resultatet från a-uppgiften för att bestämma $f'(1)$.
 c) Vad är riktningskoefficienten för en tangent till kurvan i punkten $(1, 1)$?

3048 Vad beräknar man med hjälp av följande gränsvärden?

- a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$
 b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$
 c) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$

Ord och begrepp
Koll på avsnittet

DERIVATA AV POTENSFUNCTION

Använd definitionen $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ och upprepad användning av konjugatregeln för att bestämma derivatan av $f(x) = x^4$ då $x = 1$ och därefter då $x = a$.

UTMANING

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- Grafiskt är lutning samma sak som derivata.
- Ändringskvot är samma sak som derivata.
- Derivatan av en linjär funktion $f(x)$ är oberoende av x .
- Derivatan av $y = kx + m$ är oberoende av m .
- Derivatan av $y = kx + m$ ges av $y' = k$.
- Definitionen av derivata skrivs $f'(x) = \lim_{x \rightarrow h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

3.3 Deriveringsregler för potensfunktioner



I föregående avsnitt lärde du dig att tolka derivata. Derivatans definition infördes också och du har med hjälp av den bestämt derivatan av några funktioner.

Gruppaktivitet

SAMBAND MELLAN POTENSFUNCTION OCH DESS DERIVATA

Till denna aktivitet behöver ni ett grafitande verktyg, t.ex. GeoGebra. Ni ska undersöka sambandet mellan grafen för en potensfunktion och grafen till dess derivata men även om det finns något samband mellan uttrycket för funktionen och uttrycket för dess derivata.

Börja med att skriva in den funktion $f(x)$ vars derivata ska undersökas. Genom att använda kommandot *derivera* både ritas derivatan och dess uttryck anges. Gör er undersökning för följande funktioner:

- andragradsfunktioner t.ex. $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$
Slutsatser?
- tredjegradsfunktioner t.ex. $f(x) = x^3$, $f(x) = -x^3$, $f(x) = 2x^3$, $f(x) = \frac{x^3}{3}$
Slutsatser?
- fjärdegradsfunktioner t.ex. $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, $f(x) = 2x^4$, $f(x) = \frac{x^4}{4}$
Slutsatser?

Deriveringsregel för potensfunktioner med positiv heltalsexponent

I gruppaktiviteten gavs möjlighet att undersöka derivatan av några potensfunktioner. Från avsnitt 3.2 vet du att om $f(x) = ax$ så är $f'(x) = a$ eftersom en linjär funktion har konstant lutning. Från gruppaktiviteten bör ni ha kommit fram till följande:

Om $f(x) = x^2$ blir derivatan $f'(x) = 2x$.

Om $f(x) = x^3$ blir derivatan $f'(x) = 3x^2$.

Om $f(x) = x^4$ blir derivatan $f'(x) = 4x^3$.

Vi ser att derivatan också är en potensfunktion men att gradtalet har minskat med 1.

Det ser ut som om det finns ett samband mellan det algebraiska uttrycket för funktionen och dess derivata. Om $f(x) = x^n$ så blir $f'(x) = nx^{n-1}$. Vi använder derivatans definition och visar sambandet då $n = 3$, dvs. $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} *$$

Vi börjar med att utveckla termen $(x+h)^3$.

$$(x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2 = (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Utvecklingen ger

$$* \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Vi sammanfattar resultaten i en tabell för att lättare se ett mönster:

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

I gruppaktiviteten undersökte ni också funktionerna,

$f(x) = ax^n$ där koefficienten a är en reell konstant.

Allmänt gäller att om $f(x) = ax^n$ så är $f'(x) = anx^{n-1}$.

Potensfunktionen $f(x) = ax^n$, $n \geq 0$ har derivatan $f'(x) = anx^{n-1}$

EXEMPEL

Derivera potensfunktion

Använd deriveringsregeln och bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = x^{10}$ b) $f(x) = 5x^4$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^{10}$
 $f'(x) = 10x^9$

b) $f(x) = 5x^4$
 $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$

SVAR: a) $f'(x) = 10x^9$ b) $f'(x) = 20x^3$

Derivatans värde

Bestäm $f'(1)$ om

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = -3x^2$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^5$
 $f'(x) = 5x^4$
 $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

b) $f(x) = -3x^2$
 $f'(x) = -3 \cdot 2x = -6x$
 $f'(1) = -6 \cdot 1 = -6$

SVAR: a) $f'(1) = 5$ b) $f'(1) = -6$

ÖVA I

3049 Derivera

- a) $f(x) = x^{11}$
- b) $f(x) = x^{25}$
- c) $f(x) = x^{1000}$
- d) $f(x) = 10^3$

3050 Derivera

- a) $f(x) = 5x$
- b) $f(x) = 6x^2$
- c) $f(x) = -\frac{x^3}{3}$
- d) $f(x) = -36$

3051 Bestäm $f'(3)$ om

- a) $f(x) = x$
- b) $f(x) = 3x$
- c) $f(x) = 0,3$
- d) $f(x) = 3x^3$

3052 Bestäm $f(-2)$ och $f'(-2)$ om

- a) $f(x) = 20x$
- b) $f(x) = 10x^2$
- c) $f(x) = 5x^3$
- d) $f(x) = -2$

3053 Bestäm $f(x)$ och $f'(x)$ för det angivna x -värdet.

- a) $f(x) = x^9$ och $x = -1$
- b) $f(x) = 120x$ och $x = \frac{1}{3}$
- c) $f(x) = 4x^3$ och $x = \frac{1}{2}$
- d) $f(x) = -7x^2$ och $x = 3$

ÖVA II

3054 Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{2}$ är given.

- a) Vad betyder $f(1)$?
- b) Bestäm $f'(1)$ och förklara vad du har beräknat?
- c) Vilken fråga får du svar på om du bestämmer $f(x) = 1$?
- d) Vilken fråga får du svar på om du bestämmer $f'(x) = 1$?

3055 a) Lös ekvationen $f'(x) = 4$ om

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

b) Tolka med ord resultatet i a)

3056 a) Lös ekvationen $f'(x) = 3$

$$\text{om } f(x) = x^3.$$

b) Tolka med ord resultatet i a).

3057 a) Rita i samma koordinatsystem graferna till $f(x) = 3x^2$ och $g(x) = -3x$.

b) Lös ekvationen $f(x) = g(x)$ och förklara vad du har bestämt.

c) Lös ekvationen $f'(x) = g'(x)$ och förklara innebörden av resultatet.

3058 I vilken punkt har grafen till funktionen $f(x) = 2x^3$ lutningen

a) 24 b) -48 c) $\frac{2}{3}$

Deriveringsregler för polynomfunktioner



Teorigenomgång

En polynomfunktion $f(x)$ är en summa av potensfunktioner med icke-negativa heltalsexponenter.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

När man deriverar en polynomfunktion deriverar man var och en av de ingående potensfunktionerna.

Derivatan av en polynomfunktion är summan av derivatorna av de ingående potensfunktionerna.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = a_n \cdot n x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1$$

EXEMPEL

Derivata av polynomfunktion

Bestäm derivatan av

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = 5x^3 - x^2 + x$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = 2x + 2$$

Derivera var och en av potensfunktionerna.

b) $g(x) = 5x^3 - x^2 + x$

$$g'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2x + 1 = 15x^2 - 2x + 1$$

SVAR: a) $f'(x) = 2x + 2$

b) $g'(x) = 15x^2 - 2x + 1$

Marginalkostnad

En klädtillverkare uppskattar att kostnaden $K(x)$ kronor för att producera x enheter av en produkt kan beskrivas med funktionen $K(x) = 0,1x^3 - 6x^2 + 136x + 200$. Bestäm *marginalkostnaden*, dvs. kostnadsändringen per enhet, när man producerar 20 enheter.

LÖSNING:

Marginalkostnaden bestäms av derivatan $K'(x)$.

$$K'(x) = 0,3x^2 - 12x + 136.$$

$$x = 20 \text{ ger } K'(20) = 0,3 \cdot 20^2 - 12 \cdot 20 + 136 = 16$$

SVAR: Marginalkostnaden vid tillverkning av 20 enheter är 16 kr/enhet.

ÖVA I

3059 Bestäm y' .

a) $y = 5x^2 - 7x + 11$

b) $y = 4x^3 + 0,5x^2$

c) $y = 9 - 12x$

d) $y = x^5 - x^3$

3060 Derivera

a) $f(x) = 9x^2 + 15x - 6$

b) $g(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$

c) $h(x) = \frac{3x^4 - 5}{12}$

d) $s(t) = 8t - 5t^2$

2061 Bestäm derivatans värde då $x = 0$

a) $f(x) = 10x^2 - 20x + 15$

b) $f(x) = 1 - 3x - 5x^3$

c) $g(x) = 4x^5 + 7x + 3$

d) $h(x) = \frac{5x^3 - 7x}{6}$

3062 Bestäm

a) $f'(1)$ om $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

b) $g'(-1)$ om $g(x) = 6x^3 - 2x + 100$

c) $h'(2)$ om $h(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{4} - 3x$

d) $s'(5)$ om $s(t) = 100 + 15t$

3063 Produktionskostnaden $P(x)$ i kronor för att framställa x enheter ges av funktionen

$$P(x) = 0,0001x^3 - 0,06x^2 + 24x + 96.$$

Bestäm marginalkostnaden när man producerar 100 enheter.



ÖVA II

3064 Vinsten $V(x)$ i kronor för att sälja x enheter av en vara kan beskrivas med funktionen $V(x) = 0,0027x^3 + 0,09x$.

a) Bestäm $V(500)$ och förklara vad du har beräknat.

b) Bestäm $\frac{V(501) - V(499)}{501 - 499}$ och förklarat vad du har beräknat.

c) Bestäm $V'(500)$ och förklara vad du har beräknat.

3065 En boll kastas uppåt och dess höjd h meter efter t sekunder kan beskrivas med funktionen

$$h(t) = -5,0t^2 + 20t + 8,0.$$

a) Bestäm bollens maximala höjd.

b) Vilken hastighet har bollen när den träffar marken?

3066 I vilka punkter har funktionen $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$ lutningen 26?

3067 $f(x) = ax^2 + bx$.

a) Bestäm konstanterna a och b så att $f(1) = 2$ och $f'(1) = 0$.

b) Vad vet du om funktionen utifrån $f(1) = 2$ och $f'(1) = 0$

c) Rita funktionens graf.

3068 En företagare uppskattar att kostnaden i kr för försäljning av x ljusförpackningar kan beskrivas av funktionen $K(x) = 1000 + 5x + 0,25x^2$ för $0 \leq x \leq 200$. Han räknar med att kunna sälja varorna för 60 kr styck. Hur många varor måste han producera för att marginalkostnaden ska vara lika stor som marginalintäkten?

DERIVERINGSREGLENS BEVIS

UTMANING

Omvändningen till konjugatregeln ger att $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Allmänt gäller att

(1) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, n positivt heltal.

a) Övertyga dig om giltigheten av identiteten (1) genom att utföra multiplikationen i det högra ledet.

b) Använd (1) och derivatans definition för att visa att potensfunktionen $f(x) = x^n$, n positivt heltal, har derivatan $f'(x) = nx^{n-1}$.

1
3
5
6

Deriveringsregel för potensfunktioner

Funktionerna $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är exempel på potensfunktioner som inte har positiv heltalsexponent.

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ är definierad för alla $x \neq 0$.

Vi ritar grafen och markerar några tangenter.

Gemensamt för tangenterna är att de har negativ lutning, dvs. $f'(x) < 0$.

Vi provar att använda samma deriveringsregel som vi visade för potensfunktioner med icke-negativ exponent.

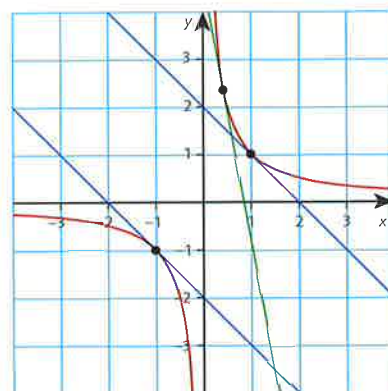
Om $f(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$, så blir $f(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$ för

alla reella $x \neq 0$. Med hjälp av derivatans definition kan

man visa att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ har derivatan

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$$

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

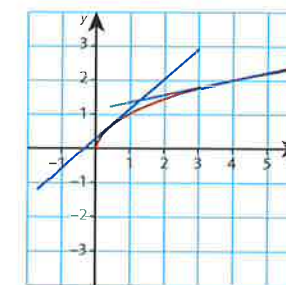


Vi undersöker funktionen $g(x) = \sqrt{x}$ på liknande sätt. Den är definierad för $x \geq 0$. Vi ritar grafen och markerar några tangenter. Vi ser att tangenterna har positiv lutning vilket betyder att $g'(x) > 0$.

Vi deriverar $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$ med hjälp av regeln som vi har tillämpat på potensfunktioner.

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Med hjälp av derivatans definition kan man visa att regeln gäller för $n = \frac{1}{2}$



Funktionen $g(x) = \sqrt{x}$ har derivatan $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ för alla $x > 0$.

Det går att visa att regeln för derivering av potensfunktioner gäller för alla reella tal men det ligger utanför denna kurs.

ALLMÄN DERIVERINGSREGEL FÖR POTENSFUNCTIONER

Om $f(x) = ax^n$ så är $f'(x) = anx^{n-1}$

Derivera potensfunktioner

Bestäm derivatan av

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$

c) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$

LÖSNING:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$$

SVAR:

a) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

b) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$

Derivatans värde

Bestäm $g'(1)$ om $g(x) = x + \frac{3}{x}$.

LÖSNING:

$$g(x) = x + \frac{3}{x} = x + 3x^{-1}$$

Derivera funktionen.

$$g'(x) = 1 - 1 \cdot 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$$

Bestäm värdet då $x = 1$.

$$g'(x) = 1 - \frac{3}{1^2} = 1 - 3 = -2$$

SVAR: $g'(1) = -2$

1
2

ÖVA I

3069 Derivera

a) $f(x) = x^{-4}$ b) $g(x) = \frac{3}{x^3}$

c) $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

3070 Derivera

a) $f(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$

b) $g(x) = 4\sqrt{x} - 7$

c) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$

d) $g(x) = 8x^{\frac{3}{4}}$

3071 Bestäm

a) $f'(2)$ om $f(x) = \frac{5}{x}$

b) $g'(16)$ om $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f'(1)$ om $f(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$

d) $g'(2)$ om $g(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

3072 Bestäm $f'(4)$ om $f(x) = x\sqrt{x}$ **T**

ÖVA II

3073 Bestäm för funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

a) $f(1)$ och förklara vad du har beräknat.

b) $f(1+h) - f(1)$ och förklara vad du har beräknat.

c) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ och förklara vad du har beräknat.

d) $f'(1)$ och förklara vad du har beräknat.

3074 Derivera $f(x) = \frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$ **T**

3075 Använd derivatans definition för visa att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

3076 Använd derivatans definition för att visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ har derivatan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

1
2
3
5
6
7

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- Derivatans $f'(x)$ av en polynomfunktion $f(x)$ är en polynomfunktion.
- När potensfunktionen $f(x) = x^n$ deriveras så minskar exponenten n med 1.
- När potensfunktionen $f(x) = x^n$ deriveras så minskar variabeln x med 1.

 Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1
5
6

MOTSATTA TAL

UTMANING

Visa att om andragradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ har två reella nollställen så är funktionens derivata i dess punkter varandras motsatta tal. Gör även en geometrisk tolkning.

1
2
5
6

Gruppaktivitet

FUNKTIONER OCH DERIVATA

Den här gruppaktiviteten handlar om två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ och deras respektive derivata $f'(x)$ och $g'(x)$. Ni ska diskutera några påståenden och motivera deras giltighet.

- För funktionerna f och g gäller att $f(5) = g(5)$. Gäller då att $f'(5) = g'(5)$?
- För funktionerna f och g gäller att $f(x) = g(x)$ för varje x . Gäller även att $f'(x) = g'(x)$ för varje x ?
- För funktionerna f och g gäller att $f'(5) = g'(5)$? Är då också $f(5) = g(5)$?
- För funktionerna f och g gäller att $f'(x) = g'(x)$ för varje x . Är då också $f(x) = g(x)$ för varje x ?

1
5
6

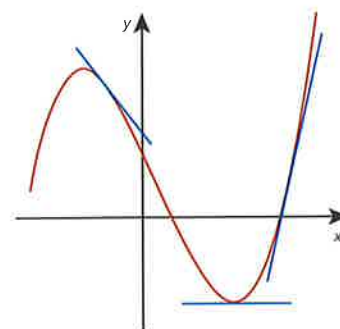
3.4 Tangenter



Du har i det här kapitlet lärt dig att bestämma derivator för vissa funktioner. Du har också lärt dig att en funktions derivata beskriver funktionens förändringshastighet och att derivatan kan användas för att bestämma tangenters lutning.

Tangent och derivata

Figuren visar en funktions graf. Några tangenter med olika lutning är också inritade. Tangenternas lutning fås genom derivatans värde i tangeringspunkten. Det värdet anger också kurvans lutning i punkten.



Kurvas lutning

Grafen visar funktionen $f(x) = x^2$ tillsammans med två tangenter, en i punkten $(1, 1)$ och en i punkten $(-2, 4)$. Bestäm kurvans lutning i de två tangeringspunkterna.

LÖSNING:

En kurvas lutning i en punkt bestäms av derivatans värde i punkten. Vi bestämmer först derivatan till funktionen $f(x) = x^2$

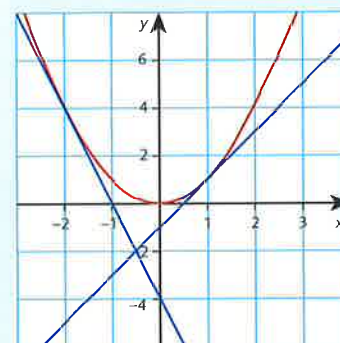
och därefter lutningen i respektive punkt.

$$f'(x) = 2x$$

$$(1, 1) \text{ ger } f'(1) = 2$$

$$(-2, 4) \text{ ger } f'(-2) = -4$$

SVAR: Kurvas lutning i de två punkterna är 2 respektive -4 .



EXEMPEL

Tangeringspunkt

Figuren visar grafen till funktionen $y = x^2 - 5x$. I vilken punkt kan du dra en tangent med lutningen 3?

LÖSNING:

När tangenten har lutningen 3 är funktionens derivata lika med 3.

Vi deriverar funktionen och sätter derivatan lika med 3.

$$y = x^2 - 5x$$

$$y' = 2x - 5$$

$$y' = 3 \text{ ger ekvationen}$$

$$2x - 5 = 3$$

$$2x = 8$$

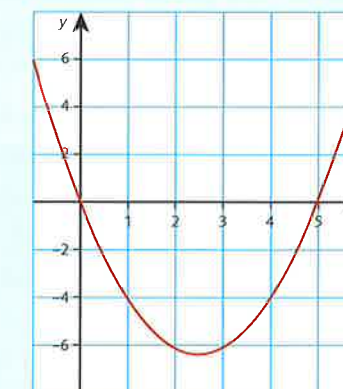
$$x = 4$$

Sätt in $x = 4$ i $y = x^2 - 5x$ för att bestämma funktionens y -värde i tangeringspunkten.

$$y = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$$

Punkten är $(4, -4)$

SVAR: Tangeringspunkten är $(4, -4)$



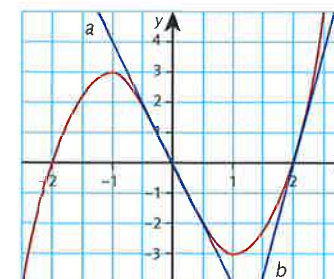
ÖVA 1

3077 Vilken lutning har en tangent till funktionen $y = x^3$ i punkten

- a) $(1, 1)$ b) $(2, 8)$ c) $(-1, -1)$

3078 Bestäm lutningen för tangenten till funktionen $y = x^2 + 2x + 3$ i punkten $(1, 6)$.

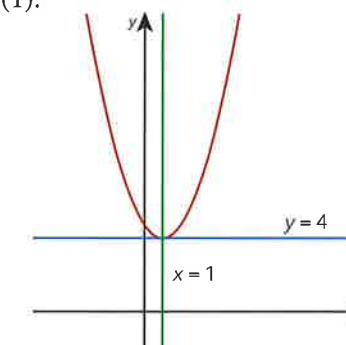
3079 Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 4x$ samt en tangent i punkten $(0, 0)$ och en i punkten $(2, 0)$. Bestäm tangenternas lutning algebraiskt.



3080 Funktionen $y = 6 - \frac{x^2}{2}$ har en tangent med lutningen -1 . Bestäm tangeringspunkten.

3081 Bestäm lutningen på kurvan $y = x^4$ när $x = 2$.

3082 Bestäm med hjälp av grafen $f(1)$ och $f'(1)$.



ÖVA II

3083 Rita grafen till funktionen $y = x^2 - 2$.

- Dra en tangent med positiv lutning.
- För vilka x -värden kan du dra tangenter med positiv lutning?
- Vad kan du säga om värdet på y' för dessa x -värden?
- Dra en tangent med negativ lutning.
- För vilka x -värden kan du dra tangenter med negativ lutning?
- Vad kan du säga om värdet på y' för dessa x -värden?
- Vilket lutning har en tangent genom kurvans minimipunkt?
- Vilket värde har y respektive y' då $x = 0$?
- I vilken punkt har en tangent till funktionen y lutningen -12 ?

3084 Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till funktionen $f(x) = -2x^3 + x^2 + 3x$ då $x = 1$.3085 Bestäm punkten i vilken tangenten till funktion $f(x) = 3x^2 - 19x$ har riktningskoefficient 11.3086 I vilka punkter har grafen till funktionen $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5$ tangenter som är parallella med x -axeln?3087 För vilka x -värden har funktionen $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$ negativ lutning?3088 I vilken punkt har funktionen $y = 3x - x^2$ en tangent som är parallell med linjen $y = -2x + 5$? T3089 Visa att alla tangenter till funktionen $y = x^3$ har icke-negativ lutning.

3090 Visa att tangenten i andragradsfunktionens extrempunkt har lutningen noll.

Gruppaktivitet

NOLLSTÄLLEN OCH DERIVATA

I den här gruppaktiviteten ska ni undersöka sambandet mellan antal gemensamma nollställen till en polynomfunktion och dess derivata.

- Undersök om en andragradsfunktion och dess derivata kan ha gemensamt nollställe.
- Undersök om en tredjegradsfunktion och dess derivata kan ha gemensamt nollställe. Ni kan exempelvis pröva med $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- Formulera ett samband mellan antal nollställen till funktionen och antal nollställen till dess derivata. Försök visa sambandet generellt.

Tangentens ekvation

Ekvationen för en rät linje kan bestämmas om man känner linjens riktningskoefficient k och en punkt (x_0, y_0) på linjen genom att använda räta linjens k -form, $y = kx + m$. En tangent till en funktion $y = f(x)$ är en rät linje som i tangeringspunkten $(a, f(a))$ har riktningskoefficienten $k = f'(a)$.

EXEMPEL

Tangentens ekvation I

En funktion $f(x)$ har i punkten $(1, 2)$ derivatan $f'(1) = 3$. Bestäm ekvationen för funktionens tangent i punkten.

LÖSNING:

Tangentens lutning $k = f'(1) = 3$.

Räta linjens ekvation $y = kx + m$ och tangeringspunkten $(x, y) = (1, 2)$ ger

$$2 = 3 \cdot 1 + m$$

$$m = -1$$

SVAR: Tangentens ekvation är $y = 3x - 1$.

Tangentens ekvation II

Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen $f(x) = x^3 + 3x - 8$ i punkten $(2, 6)$.

LÖSNING:

$f'(2)$ ger tangentens riktningskoefficient k .

Derivatan av $f(x) = x^3 + 3x - 8$ är $f'(x) = 3x^2 + 3$

$$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 3 = 15.$$

Räta linjens ekvation $y = kx + m$ och tangeringspunkten $(x, y) = (2, 6)$ ger

$$6 = 15 \cdot 2 + m$$

$$m = -24$$

$$y = 15x - 24$$

SVAR: Tangentens ekvation är $y = 15x - 24$.

ÖVA I

3091 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen

- $f(x) = x^2$ i punkten $(2, 4)$
- $f(x) = x^3$ i punkten $(1, 1)$

3092 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ i punkten

- $(1, 5)$
- $(-2, -1)$
- $(-1, -3)$
- $(0, -1)$

3093 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen

- a) $y = x^3 - 3x$ i punkten med x -koordinaten -2 .
- b) $y = 2x - \frac{1}{x}$ i punkten $(0,5, -1)$.
- c) $y = 5 - \sqrt{x}$ i punkten med x -koordinaten 4 .

3094 Bestäm ekvationer för tangenten till

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x$ när $x = 1$
- b) $y = 10 - 7x$ när $x = -10$
- c) $g(x) = x^2 - 5x + 8$ när $x = 3$
- d) $f(x) = x^3 - 6x^2$ när $x = 2$

3095 En tangent till funktionen $y = 3x^2 - x + 6$ har riktningskoefficienten -1 . Bestäm tangentens ekvation.

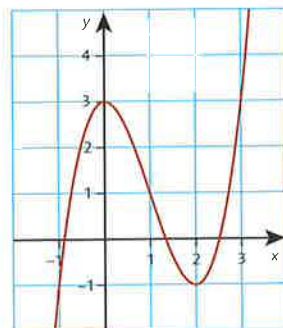
ÖVA II

3096 Betrakta andragradsfunktionen $f(x) = 2x^2 + 8x$.

- a) Har funktionen en maximipunkt eller en minimipunkt. Motivera ditt svar.

b) Bestäm ekvationen för tangenten till funktionens extrempunkt

3097 Grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ är ritad.



- a) Bestäm ekvationerna för tangenterna genom funktionens extrempunkter.
- b) Bestäm ekvationen för en tangent i punkten med x -koordinat 1 .
- c) I vilken punkt skär tangenten i b) x -axeln.

3098 Funktionen $y = \frac{1}{x}$ har två tangenter med lutningen -4 . Bestäm tangenternas ekvationer.

Problemlösning Här följer några uppgifter för dig som vill träna problemlösning med fokus på derivata och tangenter.

ÖVA II

3099 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(1) = f'(1) = 3$. Bestäm den linjära funktionen.

3100 I skärningspunkterna mellan linjen $y = x - 1$ och parabeln $y = x - x^2$ drar man tangenter som skär varandra i en punkt. Bestäm skärningspunkten.

3101 Bestäm till funktionen $f(x) = 2x^3 + 9x^2$ ekvationen för en tangent med negativ lutning.

- 3102** a) Visa att parablerna $y = x^2$ och $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ tangerar varandra.
- b) Bestäm ekvationen för den gemensamma tangenten.

TREDJEGRADSPOLYNOM

UTMANING

Bestäm det tredjegradspolynom som uppfyller ekvationen $P(x) - P'(x) = x^3$

1
3
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.4

Avgör för varje påstående om det är sant, falskt eller sant om (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Funktionen $f(x)$ har i punkten med x -koordinaten a lutningen $f(a)$.
- 2 Funktionen $f(x)$ har i punkten med x -koordinaten a en tangent med riktningskoefficient $f'(a)$.
- 3 En funktion som har samma lutning för alla x -värden i definitionsmängden är en rät linje.
- 4 Samtliga tangenter till funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ har negativ lutning.

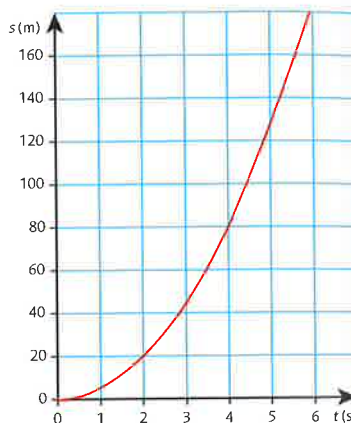
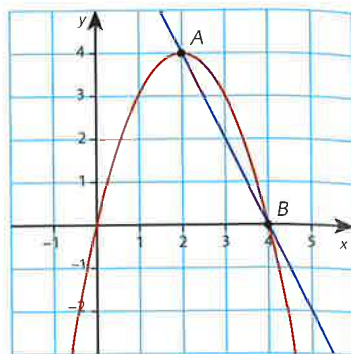
1
5
6



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

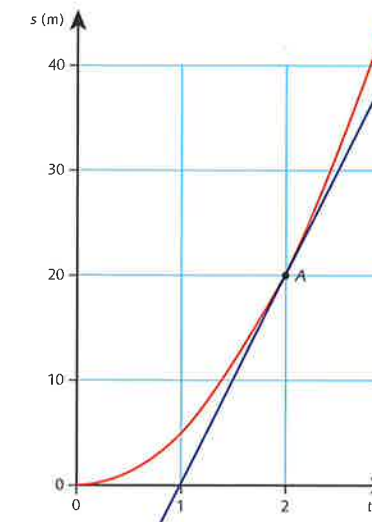
3.1 ÄNDRINGSKVOTER

- För en vattenbehållare beskrivs vattennivåns höjd av sambandet $h(t) = 2,4t^{1/3}$. Höjden $h(t)$ anges i cm och tiden t i s.
 - Stiger eller sjunker vattennivån?
 - Bestäm medelvärde av hur snabbt höjden av vattennivån förändras mellan tidpunkterna 0 s och 8 s.
- Bestäm grafens medellutning mellan de markerade punkterna.
- Då en kula släpps från hög höjd beskrivs dess rörelse av sambandet $s(t) = 4,9t^2$. Sträckan $s(t)$ anges i m och tiden t i s.
 - Vilken medelhastighet har kulan under den första sekunden?
 - Vilken medelhastighet har kulan från $t = 0,40$ s till $t = 0,60$ s?
- Bestäm för rörelsen som illustreras av grafen
 - medelhastigheten mellan tidpunkterna 0 s och 2 s
 - medelhastigheten mellan tidpunkterna 2 s och 4 s
- Vinsten $V(t)$ miljoner kronor som funktion av tiden t år för ett företag ges under en tid av sambandet $V(t) = 2,0t - 0,25t^2$.
 - Bestäm $V(2)$ och ange med ord vad du bestämt.
 - Bestäm $\frac{V(4)}{4}$ och ange med ord vad du bestämt.
 - Bestäm $\frac{V(4) - V(2)}{4 - 2}$ och ange med ord vad du bestämt.
- Antalet invånare i en stad t år efter år 2000 beskrivs av funktionen $N(t)$. Ställ upp det uttryck eller den ekvation som kan användas för att besvara följande frågor.
 - Hur många invånare finns det år 2012?
 - När finns det 115 000 invånare i staden?
 - Med vilken medelhastighet ändras invånarantalet mellan åren 2012 och 2020?
- Den sträcka $s(t)$ m som en bil färdas på t s ges av sambandet $s(t) = 25t - 0,80t^2$. Hur långt har bilen färdats då medelhastigheten från tiden 0 s är 15 m/s?
- Folkmängden i en ort ges av $N(t) = 25000 \cdot a^t$. Efter två år är medelökningen per år 1020 invånare. Bestäm den procentuella tillväxthastigheten per år.



3.2 DERIVATA

- Grafen visar ett föremåls rörelse. Bestäm dess hastighet vid den markerade punkten.
- Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = \frac{x^2}{2}$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$.
- Bestäm $f'(x)$ då
 - $f(x) = 2x + 1$
 - $f(x) = 1$
 - $f(x) = \frac{3-4x}{2}$
- Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna
 - (2, 1) och (1, 2)
 - (-3, 5) och (3, -1)
 - (-4, 1) och (4, 1)
- Uppskatta $f'(2)$ genom att välja lämpliga symmetriska ändringskvoter.
 - $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
 - $f(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- Tillryggalagd sträcka hos ett fordon ges av $s(t)$ m då det gått t sekunder efter att dess färd har påbörjats. Tolk följande likheter.
 - $s(0) = 0$
 - $s'(5) = 2,5$
 - $s(10) = 125$
 - $s'(15) = 0$
- Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$ då $f(x) = 3x - 2$.
- Använd derivatans definition för att bestämma $f'(3)$ då $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$.



3.3 DERIVERINGSREGLER

1 Derivera

a) $f(x) = 4x^5$ b) $g(x) = 2x^{12}$ c) $f(x) = -3x$ d) $h(x) = -\frac{1}{6}$

2 Bestäm $f(2)$ och $f'(2)$ om

a) $f(x) = 7x^2$ b) $f(x) = \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{6}$ d) $f(x) = -\frac{x}{8}$

3 Bestäm derivatan av

a) $f(x) = 2x - 9$ b) $f(x) = 3x^2 - x$
c) $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 6x - 5$ d) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

4 $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

a) Bestäm $f(0)$ b) Lös ekvationen $f(x) = 0$
c) Bestäm $f'(0)$ d) Lös ekvationen $f'(x) = 0$

5 Bestäm

a) $f(1)$ och $f'(1)$ om $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
b) $f(8)$ och $f'(8)$ om $f(x) = x^{4/3}$
c) $f(-1)$ och $f'(-1)$ om $f(x) = (x+1)^2$

6 En influensaepidemi sprids i skolan. Efter t dagar är P elever sjuka där $P(t) = 20t - t^2$.

a) Med vilken hastighet sprids influensan när $t = 1$?
b) När sprids influensan med hastigheten 8 elever/dag?
c) Hur många elever är sjuka när influensan sprids med 8 elever/dag?

7 Funktionen $K(x) = 0,001x^3 + 5x^2 - 14x + 10$ beskriver en totalkostnad.

a) Bestäm marginalkostnaden när $x = 100$.
b) Förklara med ord resultatet i a)

8 Temperaturen T °C i en byggnad kan beskrivas med funktionen $T(x) = \frac{200 - x^2 - x}{10}$ där x är avståndet i meter från värmekällan.

a) Bestäm $T(3,0)$ och förklara med ord vad du har beräknat.
b) Bestäm $T'(3,0)$ och förklara med ord vad du har beräknat.

3.4 TANGENTER

1 Vilken lutning har en tangent till funktionen

a) $f(x) = 3x^2$ i punkten $(1, 3)$
b) $g(x) = x^3 - 2x + 5$ i punkten $(0, 5)$
c) $f(x) = 100 - 7x$ i punkten $(-1, 107)$
d) $g(x) = \sqrt{x}$ i punkten $(16, 4)$

2 I en punkt på grafen till andragradsfunktionen $y = 2x^2 + x - 1$ är lutningen -7 .

a) Bestäm punkten.
b) Bestäm ekvationen för tangenten i den punkten.

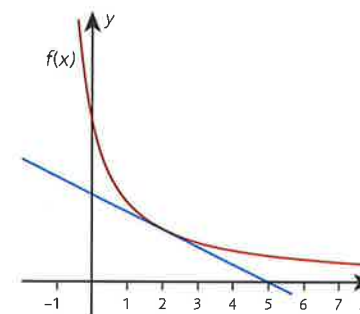
3 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^3 + x^2 + x$ när $x = 1$.

4 a) I vilken punkt har $y = -x^2 + 8x - 1$ samma lutning som linjen $y = 2x + 5$?
b) Bestäm ekvationen för tangenten i den punkten?

5 a) Bestäm den punkt på kurvan $y = -3x^2 - 12x + 1$ där tangenten är parallell med x -axeln.
b) Bestäm tangentens ekvation.

6 Funktionerna $f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 - 15x$ och $g(x) = -4x^2$ har parallella tangenter. Bestäm ekvationerna för dessa tangenter.

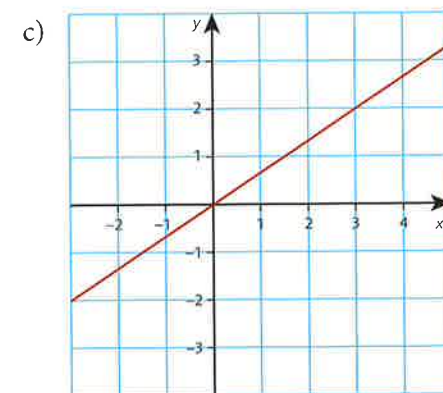
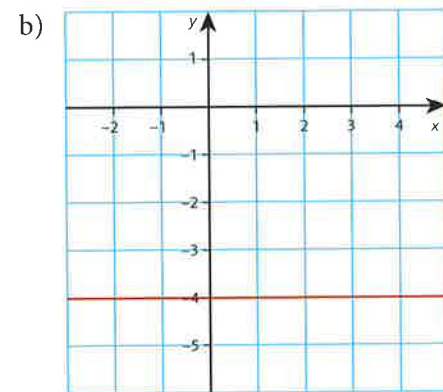
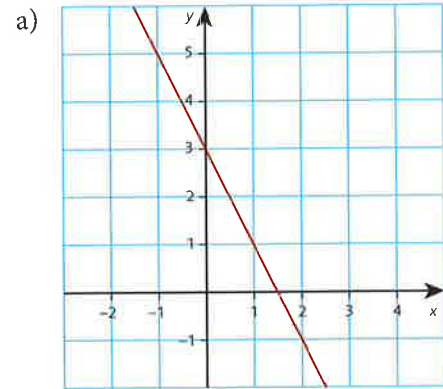
7 Den räta linjen har lutningen -1 och är tangent till funktionen $f(x)$ då $x = 2$. Bestäm $f(2)$ och $f'(2)$.



8 Till funktionen $f(x) = x^2 - 8x + 11$ dras två tangenter, en med lutningen -2 och en med lutningen 4 . Bestäm tangenternas skärningspunkt.

ÖVA 1

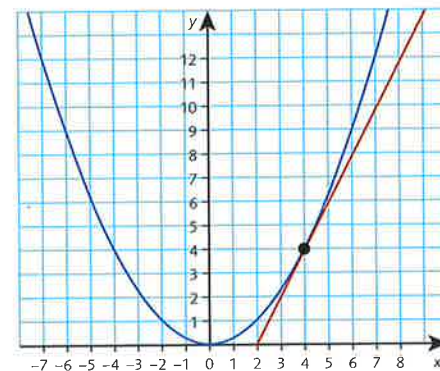
- 1 Bestäm de avbildade funktionernas derivata.



- 2 Bestäm ändringskvoten för funktionen $y = x^2 + 3$ i intervallet

- a) $0 \leq x \leq 2$
b) $-1 \leq x \leq 1$
c) $-1 \leq x \leq 2$

- 3 Bestäm grafiskt derivatan till funktionen i figuren då $x = 4$.



- 4 Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$

- 5 Bestäm $f'(3)$ om

- a) $f(x) = 7x - 11$
b) $f(x) = 5 - x$

- 6 Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna

- a) $(-1, 5)$ och $(3, -9)$
b) $(2, -14)$ och $(10, -14)$

- 7 För en linjär funktion gäller att $f'(3) = 2$ och $f(2) = 3$. Bestäm

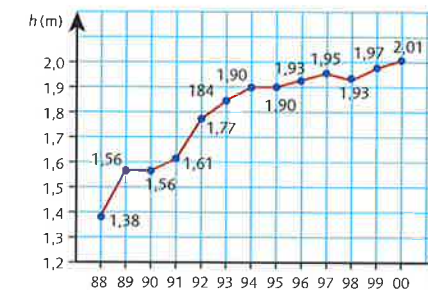
- a) $f'(2)$
b) $f(3)$

- 8 En bil kör sträckan $s(t)$ km på tiden t timmar. Skriv ett samband för att

- a) bilens hastighet efter 3 h är 90 km/h
b) bilens medelhastighet under den tredje timmen är 100 km/h

- 9 Grafen visar Kajsa Bergqvists höjdhoppsresultat utomhus från år 1988 till år 2000. Hur stor var den genomsnittliga förändringshastigheten för hennes resultat från 1988 till 2000?

(NP Ma C vt 02)

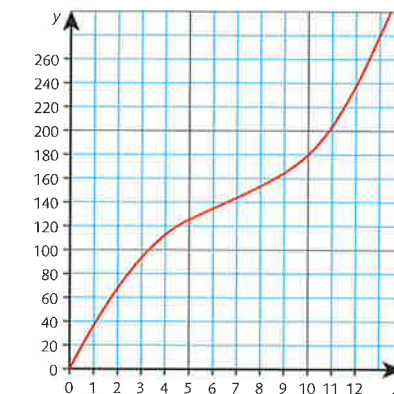


- 10 Grafen i diagrammet beskriver körsträckan för en rallybil under en del av en tävling. Efter tiden t sekunder har bilen hunnit sträckan $s(t)$ meter. Beräkna med hjälp av diagrammet följande två uttryck och förklara vad värdena säger om bilens rörelse.

a) $\frac{s(12) - s(10)}{12 - 10}$

b) $s'(5)$

(NP Ma C ht 96)



11 Derivera

- a) $g(x) = 8x^9$ b) $g(x) = 20x$
c) $f(x) = \frac{5x^3}{18}$ d) $h(x) = 7,5$

12 Bestäm $f'(1)$ om

- a) $f(x) = 1 - x$ b) $f(x) = 2x^2 - 6x$
c) $f(x) = 2012$ d) $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$

13 Låt $y = x^3 + 5x$

- a) Bestäm y' b) Beräkna $y'(3)$
(NP Ma C ht 96)

14 Bestäm derivatan y' till följande funktioner

- a) $y = 4x^2 - 3x + 5$
b) $y = 2x^3 - 6x + 9$
c) $y = \frac{2x^2}{5} - \frac{5}{2x^2}$
d) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

15 Bestäm $f(-1)$ och $f'(-1)$ om

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x}$$

16 Bestäm ekvationen för en tangent till funktionen $f(x)$ i punkten P .

- a) $y = x^3 - 1$, $P = (2, 7)$
b) $y = 3x^2 - 4x$, $P = (1, -1)$
c) $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$, $P = (1, -1)$
d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$, $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

17 Funktionen $y = x^2 - 1$ har en tangent med lutningen -3 . Vilken ekvation har tangenten?

18 Bestäm ekvationen för den tangent till funktionen $y = x^2 - x - 12$ som är parallell med $y = x - 4$.

ÖVA II

19 Ett företag räknar med att vinsten V kr för en av företagets produkter beskrivs av funktionen $V(x) = 0,03x^3 + 0,1x$ där x är antalet producerade enheter.

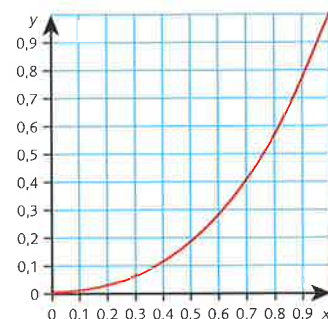
- a) Bestäm marginaländringen av vinsten när produktionen ökar från 100 till 101 enheter.
b) Bestäm marginalvinsten när man producerar 100 enheter.

20 Sträckan $s(t)$ m efter t s hos ett fordon som bromsar ges av sambandet $s(t) = 20t - 2,0t^2$. **T**

- a) Mellan tidpunkterna 0 s och t s är medelhastigheten 12,0 m/s. Bestäm t .
b) Mellan tidpunkterna 1,0 s och t s är medelhastigheten 8,0 m/s. Bestäm t .

21 Använd derivatans definition för att bestämma $f'(-2)$ då $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$

22 I koordinatsystemet är grafen till funktionen $f(x) = x^{2,5}$ ritad. Bestäm $f'(0,6)$ på två olika sätt.
(NP Ma C vt 02)



23 Vikten V gram hos en cancertumör efter t veckor kan beskrivas med funktionen $V(t) = 0,10t^2$.

- a) Med vilken hastighet växer tumören efter 5 veckor?
b) När växer tumören med hastigheten 5,0 g/vecka?

24 a) För vilket x -värde är $f'(x) = g'(x)$ om $f(x) = x^2 - 6x + 4$ och $g(x) = 4x - 3$.

b) Beskriv resultatet i a) geometriskt

25 a) Förklara med hjälp av en graf varför derivatan till en konstant funktion är noll.

b) Förklara med hjälp av derivatans definition varför derivatan till en konstant funktion är noll.

(NP Ma C vt 02)

26 Funktionen f uppfyller följande två villkor: $f(2) = 5$, $-1 \leq f'(x) \leq 2$.

Vilka värden kan $f(10)$ anta?

(NP Ma C vt 02)

27 Vilken är den minsta lutningen som en tangent till kurvan $y = x^5 + x$ kan ha?

28 Vilka tangenter till kurvan $y = x^2 + 2$ går genom $(2, 5)$?

29 Bestäm den räta linje genom punkten $(1, 5)$ som är tangent till kurvan $y = x^3$. **L**

30 En accelererande bils sträcka $s(t)$ m efter t s beskrivs av sambandet $s(t) = 1,6t^2$.

- a) Mellan tidpunkterna 0 s och t s är medelhastigheten 8,0 m/s. Bestäm t .
b) Mellan tidpunkterna 1,0 s och t s är medelhastigheten 8,0 m/s. Bestäm t .

$$31 f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Bestäm och skriv i enklaste form:

- a) $f(4)$ b) $f'(4)$

32 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Bestäm $f'(2)$.

33 Bestäm derivatan av $f(x) = x + \frac{1}{x}$ med hjälp av derivatans definition.

34 Volymen $V(t)$ i ett badkar som töms på vatten beskrivs av $V(t) = 16t^2 - 160t + 400$, där $V(t)$ är volymen i liter och t är tiden i minuter.

- a) För vilka värden på variabeln t kan funktionen gälla?
b) Bestäm den genomsnittliga utströmningshastigheten under de fyra första minuterna.
c) Bestäm utströmningshastigheten vid tiden 2 minuter och 15 sekunder.



35 Vattentemperaturen i en sjö, $y^\circ\text{C}$, följde under flera dygn formeln $y = 18,0 + 0,6t - 0,05t^2$ där t är tiden i dygn. Vid en viss tidpunkt är temperaturökningen $0,4^\circ\text{C}/\text{dygn}$. Beräkna vattentemperaturen vid denna tidpunkt.

36 En funktion kan skrivas $f(x) = 3x^2 + a$, där a är en konstant. Om funktionen och dess derivata ritas i samma diagram, tangerar de varandra i en punkt. Derivatan blir med andra ord en tangent till kurvan i den punkten. Beräkna koordinaterna för denna punkt. **T**

37 Bestäm y' om $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ **T**

38 I den punkt på grafen till funktionen $f(x) = x^2 + ax + b$ där $x = 4$ dras en tangent. Bestäm konstanterna a och b så att tangentens ekvation blir $y = 5x + 3$.



Sekant. En rät linje som skär en kurva i minst två punkter.

Tangent. En rät linje som har en punkt gemensam med en kurva och som har samma riktning som kurvan i den punkten.

Ändringskvot. Ett medelvärde på förändringshastigheten hos en funktion.

Derivata. Förändringshastigheten hos en funktion i en punkt.

Derivatan hos en rät linje. Då $f(x) = kx + m$ är $f'(x) = k$.

Derivatans definition. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Deriveringsregel för potensfunktioner. Då $f(x) = ax^n$, a är ett reellt tal $\neq 0$, är $f'(x) = nax^{n-1}$

Derivatan av en summafunktion. Då $h(x) = f(x) + g(x)$ är $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Derivatan av polynomfunktioner. ≈ Då $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ är $f'(x) = a_n \cdot nx^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1)x^{n-2} + \dots + a_1$

Tangentens ekvation. Tangenten till funktionen $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ har ekvationen $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

ÖVA III

39 Den allmänna andragradsfunktionen skrivs $f(x) = ax^2 + bx + c$. Undersök kurvans lutning i funktionens nollställen.

- Du kan börja din undersökning med $a = -1$ och $b = 0$ och undersöka lutningen för $c = -4$, $c = 0$ och $c = 4$.
- Välj $a = 1$ och $b = 2$ och undersök för olika värden på c .
- Välj nya värden på a , b och c .
- Formulera dina slutsatser.

