



# 5 Primitiva funktioner och enkla integraler

## Centralt innehåll

- Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
- Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnen.

## Inledning

Tidigare har du startat med en känd funktion och bestämt dess derivata för att få information om funktionens beteende. I många tillämpningar inom både naturvetenskap och samhällsvetenskap gäller det omvända, derivatan är given och man vill bestämma funktionen. T.ex. hastigheten för ett föremål är känd och man vill veta vilken sträcka föremålet rör sig på en viss tid eller hastigheten med vilken en population ökar är känd och man vill bestämma populationens storlek i framtiden.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) är en av matematikens förgrundsgestalter. Oberoende av varandra men ungefär samtidigt definierade Leibniz och Newton derivering och integrering av kontinuerliga funktioner. Under 1700-talet utvecklades integralkalkylen och tillämpades på många olika fenomen. Men det var först under 1800-talet som de grundläggande begreppen fick helt strikta definitioner. Ordet integral infördes av Johann Bernoulli (1667–1748) som var professor i Basel.

## Din första uppgift

Bestäm de funktioner som har följande derivator:

- 1  $f'(x) = 2$
- 2  $f'(x) = 2x$
- 3  $f'(x) = 3x^2$
- 4  $f'(x) = x$
- 5  $f'(x) = e^{2x}$



## 5.1 Primitiva funktioner



Teorigenomgång

Att bestämma funktionen då derivatan är känd är att tänka deriveringsregeln baklänges, dvs. att ställa frågan "Vilken funktion har denna derivata?" Att bestämma den funktionen kallas att bestämma den *primitiva funktionen*.

En funktion  $F$  kallas för en primitiv funktion till  $f$  om  $F'(x) = f(x)$

EXEMPEL

### En primitiv funktion

Bestäm en primitiv funktion till  $f(x) = x$

#### LÖSNING:

Den primitiva funktionen måste ha exponenten 2.

Vi kallar den primitiva funktionen för  $F(x)$  och prövar med  $F(x) = ax^2$ .

Deriverar vi  $F(x)$  får vi  $F'(x) = 2ax$  som ska jämföras med  $f(x) = x$ .

Det betyder att  $2a = 1$  eller  $a = \frac{1}{2}$

Den primitiva funktionen är  $F(x) = \frac{x^2}{2}$

**SVAR:** En primitiv funktion är  $F(x) = \frac{x^2}{2}$

### Samtliga primitiva funktioner

Bestäm *samliga* primitiva funktioner till  $f(x) = x$ .

#### LÖSNING:

Vi såg i exemplet ovan att en primitiv funktion till  $f(x) = x$  är  $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Men även  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5$  har derivatan  $F'(x) = x = f(x)$

Alla funktioner  $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$  har derivatan  $x$  eftersom derivatan av en konstant  $C$  är 0.

#### SVAR:

Samtliga primitiva funktioner är  $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ .

EXEMPEL

### Samtliga primitiva funktioner till olika potensfunktioner

Bestäm samtliga primitiva funktioner till

a)  $f(x) = 5x^3$     b)  $f(x) = 2$     c)  $f(x) = \frac{3}{x^5}$     d)  $g(x) = \sqrt{x}$

#### LÖSNING:

a) Den primitiva funktionen måste ha exponenten 4.

Vi söker en primitiv funktion  $F(x) = ax^4$

Deriverar vi  $F(x)$  får vi  $F'(x) = 4ax^3$  som ska jämföras med  $f(x) = 5x^3$

Det ger  $4a = 5$  eller  $a = \frac{5}{4}$ . En primitiv funktion är då  $F(x) = \frac{5x^4}{4}$  och

samtliga primitiva funktioner är  $F(x) = \frac{5x^4}{4} + C$

b) Vi skriver  $f(x) = 2 = 2x^0$ .

Den primitiva funktionen måste ha exponenten 1.

Vi får då den primitiva funktionen  $F(x) = 2x$  och samtliga primitiva funktioner är

$F(x) = 2x + C$ .

c) Vi skriver  $f(x) = \frac{3}{x^5}$  som  $f(x) = 3x^{-5}$

Vi ska höja exponenten  $-5$  med 1, dvs. den primitiva funktionen måste ha  $-4$  som exponent.

Vi söker en primitiv funktion  $F(x) = ax^{-4}$

Derivering av  $F(x)$  ger  $F'(x) = -4ax^{-5}$  som ska jämföras med  $f(x) = 3x^{-5}$

Vi får  $-4a = 3$  eller  $a = -\frac{3}{4}$

Samtliga primitiva funktioner är  $F(x) = -\frac{3x^{-4}}{4} + C$

d)  $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Den sökta funktionen bör ha en exponent som är  $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Vi prövar med att derivera  $G(x) = ax^{\frac{3}{2}}$

$G'(x) = \frac{3a}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Vi jämför  $G'(x)$  med  $g(x)$  och får  $\frac{3a}{2} = 1$  eller  $a = \frac{2}{3}$

$G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

**SVAR:** a)  $F(x) = \frac{5x^4}{4} + C$     b)  $F(x) = 2x + C$     c)  $F(x) = -\frac{3x^{-4}}{4} + C$     d)  $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Till potensfunktionen  $f(x) = ax^n$  finns det oändligt många primitiva funktioner

$$F(x) = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

När man ska bestämma primitiva funktioner för polynomfunktioner bestämmer man primitiva funktionen för var och en av de ingående potensfunktionerna.

# ÖVA I

5001 Bestäm samtliga primitiva funktioner  $F(x)$  till

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^{10}$
- $f(x) = x^n$

5002 Bestäm samtliga primitiva funktioner  $F(x)$  till

- $f(x) = x^{-5}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = 10$
- $f(x) = 0$

5003 Vilka funktioner har derivatan

- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 5x^4$
- $f(x) = 1$
- $f(x) = 3x^2$

5004 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- $f(x) = 3x$
- $f(x) = \frac{1}{3}$
- $f(x) = \frac{x^3}{4}$
- $f(x) = \frac{3}{x^2}$

5005 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- $f(x) = 2x^3 + x + 5$
- $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$
- $f(x) = x^4 + 2x^2 + x$

# ÖVA II

5006 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2}$  **T**

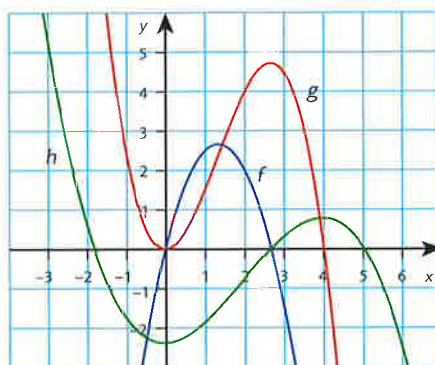
5007 Bestäm en funktion  $f(x)$  då

- $f'(x) = (5x - 1)^2$
- $f'(x) = x(x^2 + 3x + 1)$

5008 Bestäm en primitiv funktion till

- $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}$  **T**
- $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

5009 Figuren visar graferna till tre funktioner  $f$ ,  $g$  och  $h$ . Vilken av funktionerna  $g$  och  $h$  är primitiv funktion till  $f$ ? Förklara varför.



5010 Vilka funktioner har derivatan

- $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$
- $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

## Primitiva funktioner till exponentialfunktioner

Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- $f(x) = 2e^x$
- $f(x) = e^{-2x}$
- $f(x) = 2^x$

**LÖSNING:**

a) Derivatan av  $e^x$  är  $e^x$ .

Vi provar med att derivera  $F(x) = 2e^x + C$ .

$$F'(x) = 2e^x = f(x)$$

b) Derivatan av  $ae^{kx}$  är  $ake^{kx}$ .

Vi provar därför med att derivera  $F(x) = ae^{-2x} + C$  och jämför sedan med  $f(x)$ .

$$F'(x) = -2ae^{-2x} = e^{-2x}. \text{ Det ger } -2a = 1 \text{ eller } a = -1/2.$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

c) Derivatan av  $2^x$  är  $\ln 2 \cdot 2^x$ .

Vi provar med att derivera  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$  och jämför sedan med  $f(x)$ .

$$F'(x) = \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\ln 2} = 2^x$$

**SVAR:**

- $F(x) = 2e^x + C$
- $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$
- $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

## PRIMITIVA FUNKTIONER TILL POTENS- OCH EXPONENTIALFUNKTIONER

| Funktion $f(x)$  | Primitiv funktion $F(x)$               |
|------------------|----------------------------------------|
| $k$              | $kx + C$                               |
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$              |
| $e^{kx}$         | $\frac{e^{kx}}{k} + C, k \neq 0$       |
| $a^{kx}$         | $\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C, k \neq 0$ |

## ÖVA I

5011 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a)  $f(x) = e^{5x}$   
b)  $f(x) = e^{10x}$

5012 Bestäm en primitiv funktion till

- a)  $f(x) = 3^x$   
b)  $f(x) = 10^x$

5013 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a)  $f(x) = 3e^x$   
b)  $f(x) = 2e^{3x}$   
c)  $f(x) = e^{-x}$   
d)  $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$  **T**

5014 Bestäm en primitiv funktion till

- a)  $f(x) = e^{-4x} + 1$   
b)  $f(x) = 2x - 8^x$

5015 Vilka funktioner har derivatan

- a)  $f(x) = e^3$   
b)  $f(x) = 4^x$   
c)  $f(x) = e^{-5x}$   
d)  $f(x) = \frac{1}{2^x}$

5016 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a)  $f(x) = 3e^{2x} + 5x$   
b)  $f(x) = 5^x - x^5$   
c)  $f(x) = \frac{2}{e^x} - 2$   
d)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x$

## ÖVA II

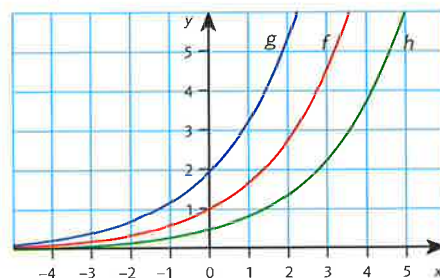
5017 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a)  $f(x) = x^2 + 7e^{5x} + \frac{4}{x^2}$   
b)  $f(x) = e^{5-2x}$

5018 Bestäm en primitiv funktion till  $f(x) = 4(e^{2.5x} + x) + 5$

5019 Bestäm samtliga primitiva funktioner till  $f(x) = 2 \cdot 5^{3x}$

5020 Figuren visar graferna till tre funktioner  $f$ ,  $g$  och  $h$ . Vilken av funktionerna  $g$  och  $h$  är primitiv funktion till  $f$ ? Motivera ditt svar.



5021 Vilka funktioner har derivatan

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}?$$

5022 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a)  $f(x) = e^{x+1}$   
b)  $f(x) = 4^{x+1}$   
c)  $f(x) = 4^3$   
d)  $f(x) = \frac{1}{e^{2x-3}}$

5023 Bestäm en primitiv funktion till

- a)  $f(x) = (e^x - e)^2$   
b)  $f(x) = \frac{2}{3 \cdot 2^x} - \frac{x^3}{3}$

## Primitiva funktioner med villkor



Av alla oändligt många primitiva funktioner kan vi bestämma en speciell om vi har ett villkor för den primitiva funktionen.

### Primitiv funktion med villkor

Bestäm den funktion  $F(x)$  som har derivatan  $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 5$  och vars graf går genom punkten  $(0, 2)$ .

#### LÖSNING:

Vi vet att  $f(x) = 3x^2 - 5$ . Samtliga primitiva funktioner till  $f(x)$  är  $F(x) = x^3 - 5x + C$ .

Vi söker den funktion  $F(x)$  som uppfyller villkoret  $F(0) = 2$ .

Sätt in  $x = 0$  i  $F(x)$  och sätt uttrycket lika med 2.

$$F(0) = C = 2.$$

$$\text{SVAR: } F(x) = x^3 - 5x + 2$$

### Tillämpning

En raket skjuts rakt uppåt. Dess hastighet  $v$  m/s efter  $t$  sekunder ges av funktionen  $v(t) = 20t + 50$ . Hur högt upp befinner sig raketten efter 100 sekunder?

#### LÖSNING:

Hastigheten är derivatan av sträckan med avseende på tiden. Vi får då funktionen för sträckan  $s(t)$  genom att bestämma den primitiva funktionen till  $v(t)$ .

$$s(t) = 10t^2 + 50t + C$$

När  $t = 0$  skjuts raketten upp och därför är  $s(0) = 0$ .

Det villkoret ger  $C = 0$ . Den sökta funktionen blir  $s(t) = 10t^2 + 50t$ .

Raketens höjd i km efter 100 s fås av

$$s(100) = 10 \cdot 100^2 + 50 \cdot 100 = 105\,000.$$

**SVAR:** Raketten befinner sig på 105 kilometers höjd.





## ÖVA I

**5024** Bestäm den primitiva funktionen  $F(x)$  om

- $f(x) = x$  och  $F(0) = 3$
- $f(x) = 6x^2 + 1$  och  $F(1) = 2$
- $f(x) = e^{2x} - x$  och  $F(0) = 3$
- $f(x) = \sqrt{x} + 1$  och  $F(4) = 0$

**5025** Bestäm den funktion  $f(x)$  som har derivatan  $f'(x) = 3x^2 - 2x - e^{-x}$  och  $f(0) = 2$ .

**5026** För den primitiva funktionen  $F(x)$  gäller att  $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ . Bestäm  $F(2) - F(1)$ .

**5027** Ett föremål rör sig med hastigheten  $v(t)$  m/s som kan beskrivas med funktionen  $v(t) = 4,0t + 5,0$ , där  $t$  är tiden i sekunder beräknat från starten.

- Vilken hastighet har föremålet efter 10 s?
- Vilken sträcka har föremålet rört sig efter 10 s? **L**

## ÖVA II

**5028** Bestäm funktionen  $y$  om

- $y' = 1 + 2x$  och  $y(1) = -1$
- $y' = x + e^{-x}$  och  $y(0) = 1$
- $y' = e^{0,008x}$  och  $y(0) = 0$
- $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  och  $y(4) = 0$

**5029** Influenzan har kommit till skolan. Låt  $P(t)$  vara antalet sjuka personer  $t$  dagar efter det att epidemin bröt ut och  $P(0) = 100$ . Antag att influensan sprids med hastigheten  $P'(t) = 120t - 3t^2$  personer/dag. Hur många är sjuka efter 5 dagar?

**5030** Vid produktion av en vara är marginalkostnaden  $K'(x) = 0,024x + 14$  där  $x$  är antal producerade enheter. Den fasta kostnaden är 7 500 kr. Bestäm kostnadsfunktionen,  $K(x)$ . **T**

**5031** Bestäm konstanten  $a$  så att grafen till den primitiva funktionen till funktionen  $f(x) = 3ax^2 + 2ax + 2$  går genom punkterna  $(1, 0)$  och  $(2, 16)$ .



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 5.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- En andragsgradsfunktion har en förstagsgradsfunktion som primitiv funktion.
- Till varje funktion finns bara en primitiv funktion.
- Om  $F(x)$  och  $G(x)$  är primitiva funktioner till  $f(x)$  så är  $F(x) = G(x) + C$ .
- En primitiv funktion  $F(x)$  till funktionen  $f(x)$  uppfyller villkoret  $F(x) = f'(x)$ .



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## 5.2 Integraler



Teorigenomgång

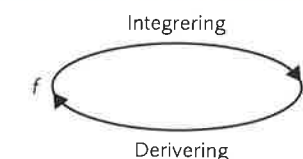
Ett annat skrivsätt för samtliga primitiva funktioner till  $f$  är  $\int f(x) dx$ .

Symbolen  $\int$  kallas integraltecken och uttrycket  $\int f(x) dx$  obestämd integral.

De primitiva funktionerna till funktionen  $f$  kan betecknas  $F(x) = \int f(x) dx$  där  $f(x)$  kallas integrand. Att integrera en funktion  $f$  betyder att man bestämmer de primitiva funktionerna  $F$  till den.

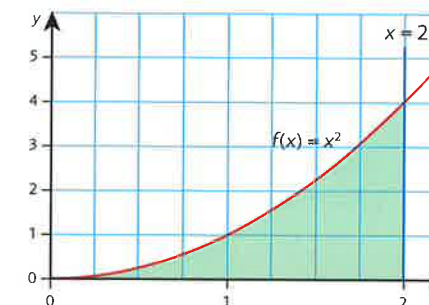
Beteckningen  $\int f(x) dx$  utläses "integralen av  $f$  av  $x$  dx".

$dx$  betyder att integrationen görs med avseende på variabeln  $x$ .



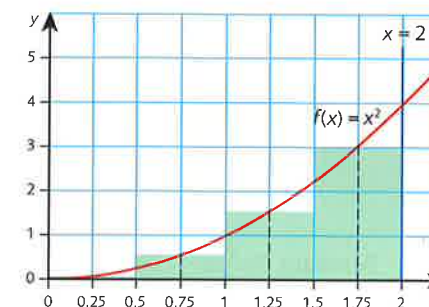
### Bestämd integral

För att förstå vad som menas med *bestämd integral* tänker vi oss att vi ska beräkna arean under kurvan  $f(x) = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , det gröna området i figuren till höger. Området begränsas av kurvan  $f(x) = x^2$ ,  $x$ -axeln och linjen  $x = 2$ .



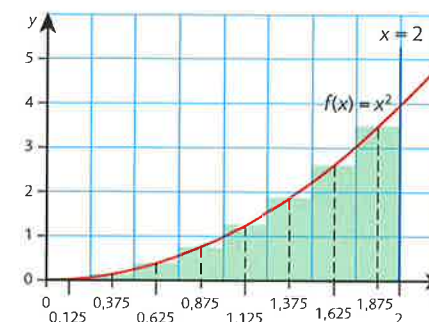
Vi kan göra en uppskattning av arean genom att dela in området i fyra lika breda rektanglar och summera areorna av rektanglarna. Alla rektanglarna har bredden 0,5 och höjden är funktionsvärdet för basens mittpunkt.

Summan av areorna av de fyra rektanglarna blir då:  
 $0,5 \cdot f(0,25) + 0,5 \cdot f(0,75) + 0,5 \cdot f(1,25) + 0,5 \cdot f(1,75) =$   
 $= 0,5 \cdot 0,25^2 + 0,5 \cdot 0,75^2 + 0,5 \cdot 1,25^2 + 0,5 \cdot 1,75^2 =$   
 $= 2,625$



Vi har nu gjort en approximation av arean under kurvan med en s.k. *Riemannsumma*. För att få en bättre approximation kan vi dela in området i mindre och mindre delintervall.

Med åtta delintervall blir arean  $0,25 \cdot (0,125^2 + 0,375^2 + 0,625^2 + 0,875^2 + 1,125^2 + 1,375^2 + 1,625^2 + 1,875^2) = 2,65625$



Låt bredden på rektanglarna vara  $\Delta x$  och höjden  $f(x)$ . Med summatecknet  $\Sigma$  kan vi teckna arean på följande sätt:

$$\sum_{i=1}^8 \Delta x \cdot f(x_i)$$

vilket utläses "summan av delta x gånger  $f$  av  $x_i$  där  $i$  går från 1 till 8".

För att göra en allmän definition av *bestämd integral* låter vi  $f$  vara en kontinuerlig funktion (dvs. en sammanhängande funktion) i intervallet  $a \leq x \leq b$  som delas in i lika stora delintervall  $\Delta x$ .

Med  $n$  delintervall får vi arean  $A \approx \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$

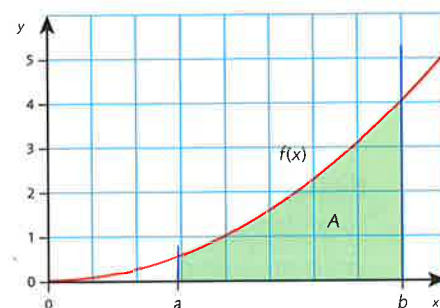
Vi låter  $n \rightarrow \infty$  vilket också betyder att  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Man kan då visa att summan  $\sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$  går mot ett gränsvärde som kallas för *integralen av  $f$  från  $a$  till  $b$*  och skrivs  $\int_a^b f(x) dx$ .

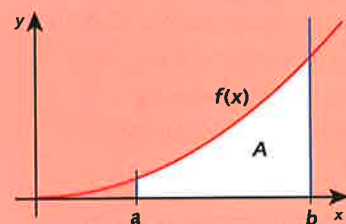
Talen  $a$  och  $b$  kallas undre och övre integrationsgräns,  $f(x)$  kallas integrand och  $x$  integrationsvariabel.

Integraltecknet  $\int$  motsvarar summatecknet  $\Sigma$  i summan.

$\int$  är ett utdraget S för summan av alla småareor som tillsammans bildar arean under en kurva.



$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$   
 $\int_a^b f(x) dx$  kallas en *bestämd integral*  
 och är ett *reellt tal*.

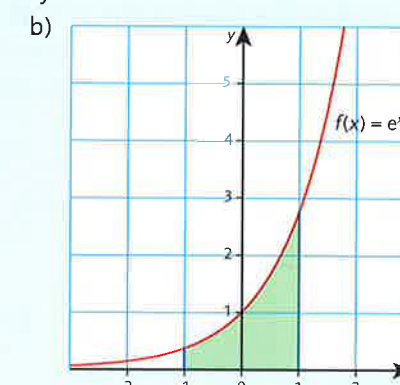
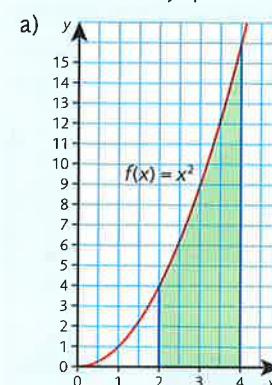


Bernhard Riemann (1826–66) var professor i matematik i Göttingen och en av den moderna matematikens pionjärer. Den definition som vi här gett på integral bygger på Riemannsummor som kommer från honom.

## EXEMPEL

### Teckna integral

Teckna med hjälp av en integral ett uttryck för arean av det markerade området.



**SVAR:** a)  $\int_2^4 x^2 dx$

b)  $\int_{-1}^1 e^x dx$

### Beräkna integral med geometrisk formel

Beräkna integralerna med geometriska formler

a)  $\int_0^2 4x dx$

b)  $\int_0^3 (x+1) dx$

#### LÖSNING:

a)  $\int_0^2 4x dx$  kan beräknas med formeln för arean av en triangel.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{2 \cdot 8}{2} \text{ a.e.} = 8 \text{ a.e.}$$

$$\int_0^2 4x dx = 8$$

b)  $\int_0^3 (x+1) dx$  kan beräknas med formeln för arean av ett parallelltrapets.

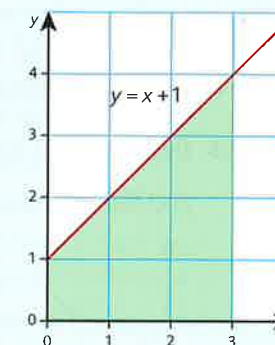
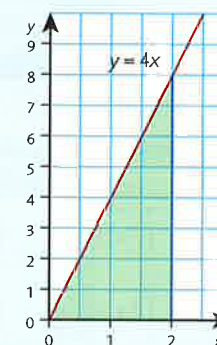
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

$$A = \frac{3(1+4)}{2} \text{ a.e.} = 7,5 \text{ a.e.}$$

$$\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$$

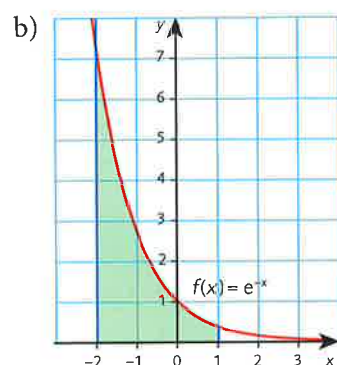
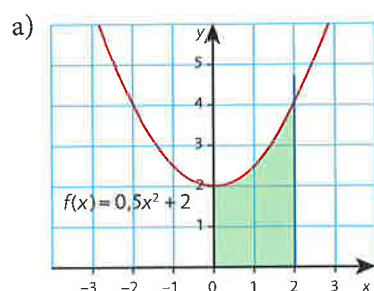
**SVAR:** a)  $\int_0^2 4x dx = 8$

b)  $\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$



## ÖVA I

**5032** Teckna med hjälp av integral arean för det markerade området.

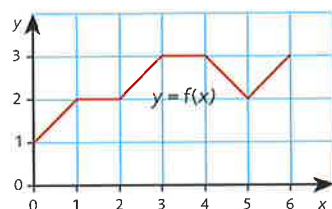


**5033** Beräkna integralerna med hjälp av geometriska formler

a)  $\int_1^4 3 \, dx$       b)  $\int_0^1 (x+1) \, dx$   
 c)  $\int_0^2 2x \, dx$       d)  $\int_1^3 \frac{x}{2} \, dx$

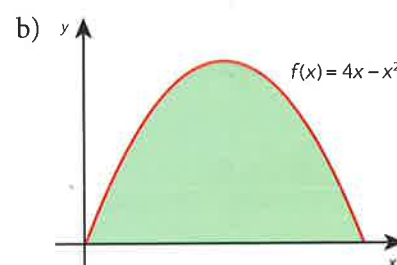
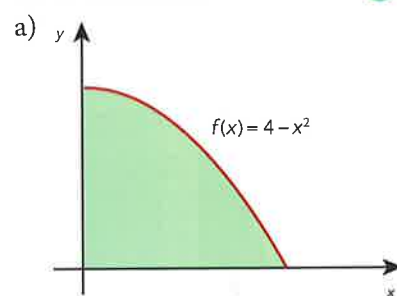
**5034** Beräkna arean mellan grafen till funktionen  $f(x) = 0.5x + 2$  och koordinataxlarna.

**5035** Bestäm  $\int_0^5 f(x) \, dx$  om funktionen  $f(x)$  har grafen nedan.

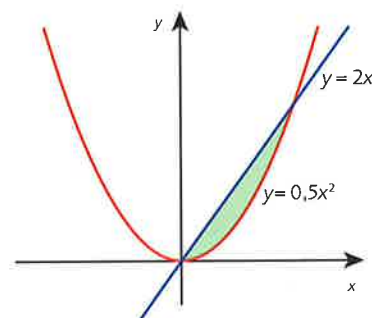


## ÖVA II

**5036** Teckna med hjälp av integral arean för det markerade området. T



**5037** Teckna med hjälp av integral arean mellan kurvorna  $y = 0.5x^2$  och  $y = 2x$ .



**5038** Teckna arean för området mellan

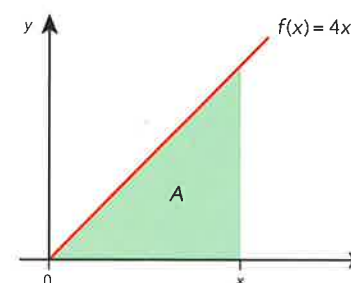
- a) kurvorna  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x$ -axeln samt linjen  $x = 2$ .  
 b) kurvorna  $y = 4$  och  $y = x^2$  samt  $y$ -axeln i första kvadranten.

## Samband mellan integral och derivata



Teorigenomgång

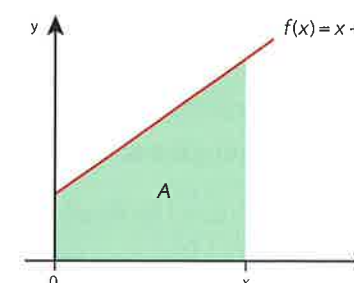
Vi har nu beräknat integraler med hjälp av kända geometriska formler, vilket är möjligt då integralen representeras av ett område som begränsas av räta linjer. Då området begränsas av t.ex.  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = e^x$  eller andra funktioner finns inga kända geometriska formler. Vi måste då använda en annan metod att lösa integralerna. För att komma fram till denna metod kan vi undersöka vilket samband det finns mellan derivata och integral.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A(x) = \frac{x \cdot 4x}{2} = 2x^2$$

$$A'(x) = 4x$$



$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

$$A = \frac{x(x+1+1)}{2} = \frac{x^2+2x}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{2} = \frac{x^2}{2} + x$$

$$A'(x) = x + 1$$

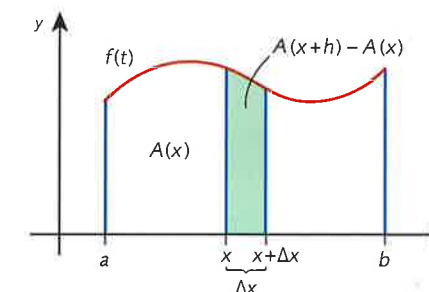
I exemplen ovan kan vi se att derivatan av areafunktionen,  $A'(x)$ , är lika med funktionen,  $f(x)$ .

Om  $A'(x) = f(x)$  så är  $A(x)$  en primitiv funktion till  $f(x)$ .

**Sats:** Om  $A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  och  $f$  är kontinuerlig gäller att  $A'(x) = f(x)$ .

**Grafisk illustration av satsen:**

Eftersom beviset är komplicerat nöjer vi oss med att göra satsen trolig genom att studera arean mellan kurvan  $y = f(t)$  och  $t$ -axeln då  $f(t) \geq 0$ .



Enligt föregående avsnitt kan vi tolka  $A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  som arean mellan grafen och  $t$ -axeln i intervallet  $a \leq t \leq x$ . På motsvarande sätt är  $A(x+h)$  arean i intervallet  $a \leq t \leq x+h$  och därmed kan den skuggade arean i figuren skrivas  $A(x+h) - A(x)$ .

Om  $h$  är litet gäller approximationen  $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$ .

Vi dividerar båda leden med  $h$  och får  $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$ .

Ju mindre  $h$  är ju bättre är approximationen så det är rimligt att dra slutsatsen att

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$



## Beräkning av bestämda integraler med primitiva funktioner

Vi anknyter till föregående teorigenomgång där  $f$  var en kontinuerlig funktion i intervallet  $a \leq x \leq b$  och  $F$  en primitiv funktion till  $f$ .

**Sats:** Om  $f$  är kontinuerlig och  $F$  är en primitiv funktion till  $f$  är

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**BEVIS:** Enligt föregående avsnitt gäller att

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ och därmed att } A(b) = \int_a^b f(t) dt \text{ och } A(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Eftersom  $A'(x) = f(x)$  får vi även att  $A(x) = F(x) + C$  och därmed gäller följande:

$$A(b) = F(b) + C \quad A(a) = F(a) + C = 0$$

Den andra likheten medför att  $C = -F(a)$ , vilket sätts in i  $A(b) = F(b) + C$ :  $A(b) = F(b) - F(a)$

Eftersom  $A(b) = \int_a^b f(t) dt$  enligt ovan kan vi kombinera de två uttrycken för  $A(b)$ :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  visar hur man beräknar integralens värde. Resultatet är ett reellt tal.

$\int f(x) dx = F(x) + C$  visar hur man bestämmer primitiv funktion. Resultatet är en samling funktioner.

När man ska bestämma värdet av en integral, ska man först bestämma den primitiva funktionen för att sedan sätta in gränserna. För att det ska bli tydligt vad som är primitiv funktion används

följande skrivsätt:  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

### Beräkna integral med primitiv funktion

Beräkna integralerna

$$\text{a) } \int_0^3 (x+1) dx \quad \text{b) } \int_1^2 x^3 dx \quad \text{c) } \int_0^1 (4 - e^{2x}) dx$$

**LÖSNING:**

$$\text{a) } \int_0^3 (x+1) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_0^3 = \left( \frac{9}{2} + 3 \right) - \left( \frac{0}{2} + 0 \right) = 4,5 + 3 = 7,5$$

$$\text{b) } \int_1^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\text{c) } \int_0^1 (4 - e^{2x}) dx = \left[ 4x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \left( 4 \cdot 1 - \frac{e^{2 \cdot 1}}{2} \right) - \left( 4 \cdot 0 - \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} \right) = 4 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9 - e^2}{2}$$

**SVAR:** a)  $\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$

b)  $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$

c)  $\int_0^1 (4 - e^{2x}) dx = \frac{9 - e^2}{2}$

### ÖVA I

**5039** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

a)  $\int_0^1 3x^2 dx$

b)  $\int_1^2 (x^2 - 3) dx$

c)  $\int_0^2 (2x^2 - 3x + 2) dx$

**5040** Bestäm  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  om  $F(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$  och  $F(-1) = 5$  och  $F(2) = 3$ .

**5041** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

a)  $\int_0^1 e^{5x} dx$

b)  $\int_{-1}^1 5x^4 dx$

c)  $\int_{-1}^1 (x^3 + x + 2) dx$

**5042** Bestäm  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  om  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$  och  $\int_0^1 f(x) dx = -3$ .

**5043** Beräkna integralerna.

a)  $\int_2^4 t^2 dt$

b)  $\int_{-1}^0 (1 - e^{-x}) dx$

c)  $\int_0^2 (t^2 + t) dt$

**5044** Bestäm konstanten  $a$  så att

$$\int_a^2 (x+1) dx = 0$$

### ÖVA II

**5045** Bestäm  $\int_{-1}^0 f(x) dx$  om  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$  och  $\int_0^1 f(x) dx = 5$ .

**5046** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

a)  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$  b)  $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

c)  $\int_0^1 x\sqrt{x} dx$  **T**

**5047** Om  $g(0) = -2$  och  $g(3) = -1$ , vad är då  $\int_0^3 g'(x) dx$ ? **T**

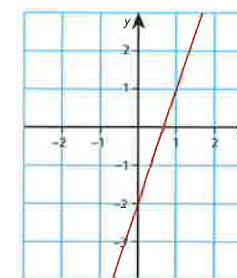
**5048** Bestäm konstanten  $k$  så att  $\int_0^2 k(x-1)^2 dx = 2$ . **L**

**5049** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

a)  $\int_{-1}^0 (e^x - e^{-x}) dx$  b)  $\int_0^2 \frac{2}{x^2} dx$

c)  $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2 + 3}{x^2} dx$

**5050** Funktionen  $F$  är primitiv funktion till  $f$ . Figuren visar  $y = F(x)$ . Bestäm  $\int_0^1 f(x) dx$ .



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet



### RÄKNEREGLER FÖR INTEGRALER

- 1 Undersök med egna exempel om följande likhet gäller och vad som gäller för  $a$ ,  $b$  och  $c$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- 2 Undersök med egna exempel om följande likhet gäller:

$$\int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx$$

- 3 Förklara varför  $\int_a^a f(x) dx = 0$

- 4 Undersök med egna exempel om följande likhet gäller och vad som gäller för  $k$ .

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

- 5 Vilket samband råder mellan  $\int_a^b f(x) dx$  och  $\int_b^a f(x) dx$ ? Förklara varför.

1  
2  
3  
4  
5  
6

### MINSTA VÄRDE FÖR EN INTEGRAL

För vilket värde på  $a$  antar integralen  $\int_0^1 (a+x)^2 dx$  sitt minsta värde?

### UTMANING

1  
2  
3  
4  
5  
6

### REFLEKTERA OCH DISKUTERA 5.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

1  $\int_a^b f(x) dx = F(x) + C$

2 Om  $F(x) = G(x)$  i intervallet  $a \leq x \leq b$  så är  $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ .

3  $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$

4  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

1  
2  
3  
4  
5  
6

 Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

## 5.3 Tillämpningar



Vi har visat att integraler kan användas för att beräkna ändringen i sträcka  $s(t)$  mellan två tidpunkter om funktionen för hastigheten  $v(t)$  är given:  $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ . Det finns många fler användningsområden både inom naturvetenskap och samhällsvetenskap.

Några samhällsvetenskapliga exempel:

- Beräkna ändringen i populationsstorlek  $p(t)$  mellan två tidpunkter om funktionen för tillväxthastigheten  $p'(t)$  är given:  $p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p'(t) dt$
- Beräkna produktionen mellan två tidpunkter om funktionen för produktionshastigheten är given:  $f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt$
- Beräkna energiförbrukningen  $W(t)$  mellan två tidpunkter om funktionen för effekten  $P(t)$  är given:  $W(t_2) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

### Beräkna sträckan om hastigheten är känd

Den hastighet  $v$  m/s som ett föremål rör sig med kan beskrivas av funktionen  $v(t) = 4,0t + 5,0$  där  $t$  är tiden i sekunder. Beräkna sträckan  $s$  meter som föremålet rört sig i tidsintervallet  $2,0 \leq t \leq 5,0$ .

### LÖSNING:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{2,0}^{5,0} (4t + 5,0) dt = \left[ 2,0t^2 + 5,0t \right]_{2,0}^{5,0} = (2,0 \cdot 5,0^2 + 5,0 \cdot 5,0) - (2,0 \cdot 2,0^2 + 5,0 \cdot 2,0) = 57$$

**SVAR:** 57 m

### ÖVA I

- 5051 Ett föremål rör sig med hastigheten  $v$  m/s enligt funktionen  $v(t) = 6,0t$ . Beräkna den sträcka som föremålet rör sig i tidsintervallet  $1,0 \leq t \leq 10$ .

- 5052 En bil accelererar från 25 m/s till 30 m/s på två sekunder med likformig acceleration och har hastigheten  $v(t) = 25 + 2,5t$  m/s under accelerationen.
- Teckna med hjälp av en integral ett uttryck för sträckan som bilen har färdats under de två sekunderna.
  - Beräkna sträckan.

1  
2  
3  
4  
5  
6

**5053** Temperaturändringen  $T'(t)$  °C/h på en ort kan beskrivas med funktionen  $T'(t) = t^2 - 6t + 4$  där  $t$  är tiden i timmar efter midnatt. Beräkna temperaturen klockan 8 på morgonen om temperaturen vid midnatt var 0 °C. Svara med hela grader. **L**

**5054** Vattenvolymen i en behållare ändras med hastigheten  $f'(t)$  liter/min där  $t$  är tiden i minuter. Tolka med ord vad det betyder att  $\int_0^{60} f'(t) dt = -5$

**5055** En bakteriekultur har tillväxthastigheten  $P'(t)$  bakterier/h enligt funktionen  $P'(t) = 1000e^{0,2t}$  där  $t$  är tiden i timmar. Hur stor är tillväxten i tidsintervallet  $1,0 \leq t \leq 2,0$ ?

**5056** Vid flod strömmar vattnet in i en hamn med hastigheten  $f'(t)$  m<sup>3</sup>/h där  $f'(t) = -120t^2 + 600t$ ,  $0 \leq t \leq 4,0$ .  $t$  är tiden i timmar från att vattnets inströmning startat.

- När är inströmningshastigheten störst? **T**
- Beräkna  $\int_0^{4,0} f'(t) dt$  och beskriv med ord vad du beräknat.

## ÖVA II

**5057** En kopp varmt te svalnar med hastigheten  $-6e^{-0,070t}$  °C/min. Hur ändras temperaturen under de första 5,0 minuterna?

**5058** Antalet personer som blir smittade per dag under en influensaepidemi ges av modellen  $N(t) = 20t$  där  $t$  är antal dagar efter att epidemin startat. Efter hur många dagar hade 250 personer blivit smittade?

**5059** Tolka innebörden av  $\int_8^{16} P(t) dt = 40$  där  $P(t)$  är effektförbrukning i kW och  $t$  är tiden i timmar efter midnatt.

**5060** Diabetes kan ibland behandlas med en kapsel som sätts in under huden och som långsamt avger insulin till blodet. En viss typ av kapsel avger insulin med hastigheten  $0,52 \cdot e^{-0,89t}$  cm<sup>3</sup>/dygn, där  $t$  är tiden i dygn. Hur mycket insulin avger kapseln under den första månaden?

**5061** Tolka innebörden av  $\int_0^5 p(t) dt$  där  $p'(t)$  är tillväxthastigheten för antalet invånare i en stad och  $t$  är tiden i år.

**5062** En population med insekter ökar med hastigheten  $P'(t)$  insekter/dag, vilket kan beskrivas med funktionen  $P'(t) = 20 \cdot 1,023^x$  där  $x$  är tiden i dagar. Hur många fler insekter finns det efter 7,0 dagar? **L**

**5063** En bilförare ska minska hastigheten från 90 km/h till 70 km/h. Hastigheten  $v(t)$  m/s under inbromsningen är  $v(t) = 25 \cdot e^{-0,060t}$  där  $t$  är tiden i sekunder från inbromsningens början. Hur lång sträcka hinner bilen under inbromsningen? **T**

### GRÄNSVÄRDE

Bestäm arean av det område som begränsas av  $x$ -axeln, kurvan  $y = x^{-p}$  där  $p$  är ett heltal större än 1, samt de räta linjerna  $x = 1$  och  $x = a > 1$ . Visa också att arean har ett gränsvärde då  $a \rightarrow \infty$  och bestäm detta gränsvärde.

### UTMANING

## 5.1 PRIMITIVA FUNKTIONER

- Bestäm samtliga primitiva funktioner  $F(x)$  till
  - $f(x) = 4x$
  - $f(x) = 3x^3$
  - $f(x) = 2e^{-x}$
- Vilka funktioner  $f(x)$  har derivatan
  - $f'(x) = 2$
  - $f'(x) = \frac{2}{x^2}$
  - $f'(x) = 2^x$
- Bestäm de primitiva funktioner  $F(x)$  som uppfyller följande villkor
  - $f(x) = 2x^2 + 5$  och  $F(0) = 4$
  - $f(x) = e^{-2x} + 3x$  och  $F(0) = 1$
- En boll kastas uppåt och dess hastighet  $v$  m/s kan beskrivas med  $v(t) = -10t + 20$  där  $t$  är tiden räknat från starten.
  - Vilken hastighet har föremålet efter 1,0 sekund?
  - Vilken höjd har då bollen nått?
- Den primitiva funktionen  $F$  till funktionen  $f(x) = 2x - 1$  uppfyller villkoret  $F(-2) = 2$ . Bestäm  $F(4)$ .
- En kurva går genom punkten  $(2, 3)$ . Riktningsskoefficienten för tangenten till kurvan i punkten  $(x, y)$  är  $3x^2 - 2x$ . Bestäm kurvans ekvation.
- Bestäm konstanten  $b$  så att funktionen  $F(x) = 3(b - 2x)^2 + 4b$  är en primitiv funktion till funktionen  $f(x) = 24x + 4$ .
- År 2012 fanns 125 000 invånare i en stad. Dess folkmängd ökade enligt funktionen  $f(t) = 6250 \cdot e^{0,05t}$  där  $t$  är tiden i år. Bestäm en funktion för antalet invånare år 2012.



5.2 INTEGRALER

5.3 TILLÄMPNINGAR

1 Beräkna exakt integralerna

a)  $\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx$       b)  $\int_0^1 (3x - e^{2x}) dx$

2 Bestäm  $\int_0^5 f(x) dx$  om  $F(x)$  är en primitiv funktion till  $f(x)$  och  $F(0) = 4$  och  $F(5) = 10$ .

3 Beräkna integralerna

a)  $\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$       b)  $\int_1^5 \sqrt{x} dx$       c)  $\int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4 Bestäm  $\int (e^{2x} - 3x) dx$

5 Bestäm största och minsta värde för funktionen  $F(x) = \int_1^x (4 + 2t) dt$

6 Tolka innebörden av  $\int_2^5 a(t) dt = 20$  där  $a(t)$  är accelerationen i  $m/s^2$  och  $t$  är tiden i sekunder.

7 En 10 cm hög planta har en växthastighet ( $m/mån$ ) enligt formeln  $h'(t) = \sqrt{t} - 0,5t$ ,  $0 \leq t \leq 3$  där  $t$  är tiden i månader. Bestäm en funktion  $h(t)$  för plantans höjd i meter efter  $t$  månader.

8 En laxpopulation  $P(t)$  har tillväxthastigheten  $P'(t) = 400 \cdot e^{0,040t}$  där  $t$  är tiden i dygn. Hur många fler laxar finns det efter en vecka?

Blandade övningar

ÖVA I

1 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

a)  $f(x) = x^3$     b)  $f(x) = e^{3x}$     c)  $f(x) = 3^x$

2 Bestäm en primitiv funktion  $F$  till  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$  sådan att  $F(1) = 3$ .

3 Beräkna integralerna

a)  $\int_1^2 x dx$       b)  $\int_1^3 2 dx$       c)  $\int_0^1 x^{99} dx$

4 Integralen  $\int_1^2 x(x+2) dx$  har värdet  $\frac{16}{3}$ . Visa hur man kommer fram till detta resultat med hjälp av primitiv funktion.

5 Beräkna ett exakt värde på integralen  $\int_1^2 \frac{x^3}{4} dx$

6 Antalet bakterier  $y$  i en viss bakteriekultur är en funktion av tiden  $t$  timmar. Om denna kultur vet man att tillväxthastigheten är  $y' = 3,0t^2$  och begynnelseantalet är 3 500. Bestäm antalet bakterier efter 10 timmar. **L**

7 Bestäm den primitiva funktion  $F(x)$  till funktionen  $f(x) = 8x^3 - 2x + 2$  för vilken  $F(1) = 4$ .

8 Beräkna ett exakt värde på integralen  $\int_0^1 e^{-2x} dx$ .

9 Beräkna integralen  $\int_{-1}^1 (2x - 3)^2 dx$

10 Vatten rinner ut från ett akvarium med hastigheten  $v$  liter/s och ges av formeln  $v(t) = 3,8 \cdot e^{-0,050t}$  där  $t$  är tiden i sekunder räknat från utströmningens början. Hur mycket vatten strömmar ut på 60 sekunder?

ÖVA II

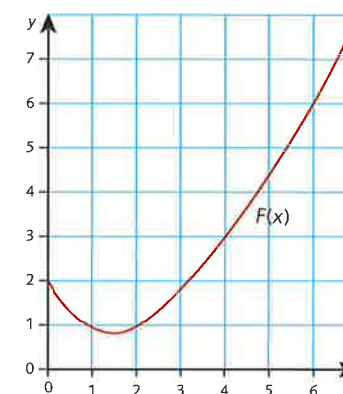
11 Bestäm  $\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

12 En kurva  $y = f(x)$  går genom punkten  $(-3, 1)$ . Riktningskoefficienten för tangenten i punkten  $(x, y)$  är  $4x - 5$ . Bestäm kurvans ekvation.

13 Bestäm det positiva talet  $a$  så att  $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = 0,5$ .

14 Beräkna integralen  $\int_{-2}^3 (t^2 x - x) dt$

15 Funktionen  $f(x)$  har en primitiv funktion  $F(x)$ . Den primitiva funktionens graf är ritad i figuren. Bestäm  $\int_0^6 f(x) dx$



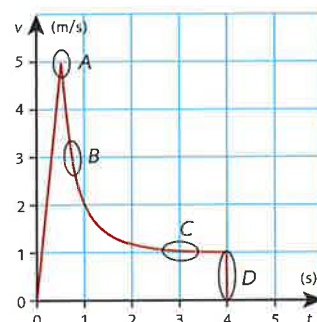
16 För den årliga folkökningen  $f'(t)$  personer i en kommun gäller att den för år  $t$  beräknas till  $f'(t) = 800(1 + \frac{t}{50})$ ,  $0 \leq t \leq 20$ . Beräkna den totala folkökningen under 20-årsperioden.

17 En maskin som producerar smådelar har produktionshastigheten  $f(x) = 150e^{-0,3x}$  där  $x$  är tiden i timmar efter att maskinen startat. Hur många smådelar producerar maskinen under en 8-timmars arbetsdag? **L**



- 18 Prognosen för vattenförbrukningen per år i en kommun ges av formeln  $f'(t) = 2,3 - 1,2 \cdot e^{-0,25t}$  där  $f'(t)$  är vattenförbrukningen i miljoner  $m^3$  per år och  $t$  är tiden i år från början av 2012.
- Bestäm  $\int f'(t) dt$
  - Bestäm den sammanlagda vattenförbrukningen för åren 2012–20 med hjälp av prognosen. **T**

- 19 En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen visar hur stenens hastighet  $v$  m/s varierar med tiden  $t$  sekunder från det ögonblick då den släpps.



- Beskriv vad som händer med stenkulan i A, B, C och D.
- Hur högt ovanför vattenytan släpptes stenen?
- Stenkulans hastighet  $v(t)$  m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen  $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$ . Bestäm vattendjupet där stenkulan släpps. Ge svaret i meter med två decimaler. (NP Ma D vt 99)

### ÖVA III

- 20 Låt  $A = \int_0^c x^n dx$  och  $B = c^2$ ,  $n$  och  $c$  reella tal större än noll.

Du ska undersöka kvoten  $\frac{A}{B}$  för olika värden på  $c$  och  $n$ .

- Sätt  $n = 2$  och undersök för några olika värden på  $c$  vad kvoten  $\frac{A}{B}$  blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på  $c$  när  $n = 2$ .
- Sätt  $c = 1$  och undersök för några olika värden på  $n$  vad kvoten  $\frac{A}{B}$  blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på  $n$  när  $c = 1$ .
- Låt nu både  $c$  och  $n$  variera. Formulera en slutsats om kvoten  $\frac{A}{B}$  och visa att din slutsats gäller för alla värden på  $c$  och  $n$ .



Kapitelprov

## SAMMANFATTNING

**Primitiv funktion.** En funktion  $F$  kallas för en *primitiv funktion* till  $f$  om  $F'(x) = f(x)$ .

| Funktion $f(x)$  | Primitiv funktion $F(x)$               |
|------------------|----------------------------------------|
| $k$              | $kx + C$                               |
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$              |
| $e^{kx}$         | $\frac{e^{kx}}{k} + C, k \neq 0$       |
| $a^{kx}$         | $\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C, k \neq 0$ |

**Skillnad mellan obestämd och bestämd integral.**

Den *obestämda integralen*  $\int f(x) dx$  är en samling funktioner.

Den *bestämda integralen*  $\int_a^b f(x) dx$  är ett reellt tal.

**Beräkning av bestämd integral.**

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \text{ där } F(x) \text{ är en primitiv funktion till } f(x).$$



## 1 GEOMETRISK SUMMA OCH LINJÄR OPTIMERING

- 1009** Bestäm sambandet mellan element  $a_3$  och  $a_5$ .
- 1011** Bestäm kvoten.
- 1022** Vänstra ledet är en geometrisk summa. Skriv om det med hjälp av den slutna formeln.
- 1025** Bestäm antal element genom att ställa upp en ekvation som beskriver ett samband mellan det sista elementet och det första.
- 1038** Beräkna först vad som finns på kontot då Mona är 19 år med hjälp av geometrisk summa. Använd sedan den sammanlagda förändringsfaktorn för sex år på det beloppet.

## 2 FUNKTIONER OCH GRÄNSVÄRDEN

- 2009** Läs av en punkt, t.ex. (2, 20) och sätt in dessa värden i det givna sambandet  $y = kx^2$ .
- 2019** a) Inkomsterna blir  $p \cdot x$ . Ersätt  $x$  med  $(600 - 2p)$ .
- 2020** Vinsten (inkomster minus utgifter) kan skrivas:  
 $V = p \cdot x - 50 \cdot x =$   
 $= p(600 - 2p) - 50(600 - 2p)$ .  
 Bestäm symmetrilinjen efter förenkling av funktionsuttrycket.
- 2021** a) Rektangelns bredd är  $x$  och dess höjd är  $y$ , där  $y = -4x + 8$ .
- 2026** Varje term i den första parentesen ska multipliceras med varje term i den andra parentesen.
- 2036** Minimipunkten ligger på symmetrilinjen.
- 2037** c) Om  $h(x)$  är växande, är  $-h(x)$  avtagande.

**2038** Prova först med  $p(x) = x$  (i a-c) respektive  $p(x) = -x$  (i d-f). Då blir  $g(x) = x^2$ .

**2044**  $(x - 2)$  är en faktor  $\Leftrightarrow p(x) = (x - 2)q(x) \Leftrightarrow p(2) = 0$

**2070** Faktorn  $(x + 5)$  ingår om polynomen får värdet 0 då  $x = -5$ .

**2074** Förläng med  $ab$ .

**2080** Faktorisera nämnarna i b- och c-uppgifterna innan de rationella uttrycken förlängs.

**2101** a) och b): Gör täljarnas bråk liknämna.  
 c) Förläng med konjugatet.

### BLANDADE ÖVNINGAR

**29** Uppgiften kan lösas genom att lägga in triangeln i ett koordinatsystem, där kateterna ligger på koordinataxlarna och hypotenusan på den räta linjen  $y = 0,75x + 6$ . Man kan också använda likformiga trianglar för att ersätta  $h$  i uttrycket för arean,  $A = x \cdot h$ .

**31** Teckna först intäktsfunktionen  $I = x \cdot p = 50(225 - p)p$  och kostnadsfunktionen  $K = 280000 + 45x = 280000 + 45 \cdot 50(225 - p)$  och därefter resultatfunktionen  $R(p) = I(p) - K(p)$ .

**32** Funktionens två nollställen ligger symmetriskt kring symmetrilinjen.

**33** Arean kan skrivas  $x(7 - x^2) = 6$  som efter omskrivning ger  $x^3 - 7x + 6 = 0$ . Eftersom  $x = 1$  är en rot kan  $x^3 - 7x + 6$  skrivas om som  $(x - 1)(x^2 + px - 6)$ . Utveckla parenteserna, jämför med  $x^3 - 7x + 6$  och bestäm  $p$ . Avsluta med att bestämma nollställen till  $p(x)$ .

## 3 DERIVATA

**3040**  $f'(2) = 5$  innebär att  $k = 5$ .  
 $f(2) = 5$  innebär att linjen går genom punkten (2, 5).

**3043** b) Vad gäller om  $k_1 \cdot k_2 = -1$ ?

**3065** Vilken hastighet har bollen när den vänder?

**3072** Använd potenslagarna.

**3074** Dela upp som en summa av fyra bråk och förenkla.

**3088** Parallella linjer har samma  $k$ -värde.

### BLANDADE ÖVNINGAR

**20** a) Teckna ändringskvoten  

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \frac{20t - 2,0t^2}{t} =$$
  
 $= 12,0$

b) Teckna ändringskvoten  

$$\frac{s(t) - s(1)}{t - 1} =$$
  

$$= \frac{20t - 2,0t^2 - (20 \cdot 1 - 2,0 \cdot 1^2)}{t - 1} =$$
  
 $= 8,0$

**36** Bestäm riktningskoefficienten  $k$  för grafen till derivatan. Använd att  $f(x)$  har samma lutning i tangeringspunkten för att bestämma tangeringspunktens  $x$ -koordinat.

**37** Faktorisera täljare och nämnare.

## 4 ANVÄNDNING AV DERIVATA

**4021** a) Vinsten är differensen av intäkter och utgifter. Hur ser den funktionen ut?  
 c) När blir vinsten positiv?

**4024** Anta att  $f(x) = x^2 + px + q$ . För vilket värde på  $p$  är  $f(a) = f(b)$ ?

**4037** När du deriverat, ersätt  $x^2$  med  $t$ .

**4040** Vilken typ av extremvärde har funktionen mellan  $x = 3$  och  $x = 10$ ?

**4045** Låt rektangelns bas vara  $x$ . Dess höjd  $y$  kan uttryckas i  $x$  med hjälp av ekvationen.

**4075** Skissa först grafen för  $f'(x)$ .

**4078** Derivatan till  
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  är  
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .  
 Vilka andragradsfunktioner motsvarar graferna?

**4089** Lös uppgiften grafiskt.

**4105** c) Lös ekvationen som en andragradslikning.

**4109**  $\ln 0,4$  är ett negativt tal.

**4117** Derivatans nollställe kan bestämmas grafiskt.

**4120** a) Beräkna  $P(0)$

**4121** a) Hur många minuter går det på ett dygn?

### BLANDADE ÖVNINGAR

**19** Vilket minsta värde antar  $y$ ?

**26** I en inflexionspunkt är andra-derivatan noll.

## 5 PRIMITIVA FUNKTIONER OCH ENKLA INTEGRALER

**5006** c) Skriv i potensform och använd en potensregel.

**5008** a) Skriv  $x^3$  och  $x$  med varsin nämnare.

**5013** d) Använd en potensregel.

**5030**  $K(0) = 7500$

**5036** Bestäm funktionens nollställen.

**5046** c) Skriv i potensform och använd potensregel.

**5047**  $g(x)$  är primitiv funktion till  $g'(x)$ .

**5056** a) Derivera  $f(t)$  för att beräkna när inströmningshastigheten är störst.

**5063** Omvandla km/h till m/s.

### BLANDADE ÖVNINGAR

**18** Bestäm vattenförbrukningen för 9 år.