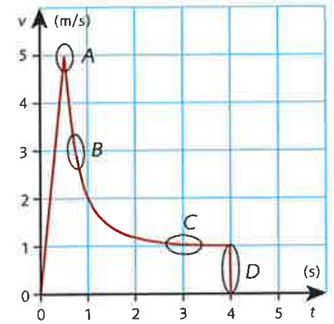
18 Prognosen för vattenförbrukningen per år i en kommun ges av formeln $f'(t) = 2,3 - 1,2 \cdot e^{-0,25t}$ där $f'(t)$ är vattenförbrukningen i miljoner m^3 per år och t är tiden i år från början av 2012.

a) Bestäm $\int f'(t)\, dt$

b) Bestäm den sammanlagda vattenförbrukningen för åren 2012–20 med hjälp av prognosen. T

19 En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen visar hur stenens hastighet v m/s varierar med tiden t sekunder från det ögonblick då den släpps.



a) Beskriv vad som händer med stenkulan i A, B, C och D.

b) Hur högt ovanför vattenytan släpptes stenen?

c) Stenkulans hastighet $v(t)$ m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$. Bestäm vattendjupet där stenkulan släpps. Ge svaret i meter med två decimaler. (NP Ma D vt 99)

ÖVA III

1 2 3 5 6

20 Låt $A = \int_0^c x^n\, dx$ och $B = c^2$, n och c reella tal större än noll. Du ska undersöka kvoten $\frac{A}{B}$ för olika värden på c och n.

- Sätt $n = 2$ och undersök för några olika värden på c vad kvoten $\frac{A}{B}$ blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på c när $n = 2$.
- Sätt $c = 1$ och undersök för några olika värden på n vad kvoten $\frac{A}{B}$ blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på n när $c = 1$.
- Låt nu både c och n variera. Formulera en slutsats om kvoten $\frac{A}{B}$ och visa att din slutsats gäller för alla värden på c och n.

Kapitelprov

SAMMANFATTNING

Primitiv funktion. En funktion F kallas för en *primitiv funktion* till f om $F'(x) = f(x)$.

Funktion $f(x)$	Primitiv funktion $F(x)$
k	$kx + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C,\ k \neq 0$
a^{kx}	$\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C,\ k \neq 0$

Skillnad mellan obestämd och bestämd integral.

Den *obestämda integralen* $\int f(x)\, dx$ är en samling *funktioner*.

Den *bestämda integralen* $\int_a^b f(x)\, dx$ är ett *reellt tal*.

Beräkning av bestämd integral.

$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

TIPS

❶ GEOMETRISK SUMMA OCH LINJÄR OPTIMERING

1009 Bestäm sambandet mellan element a_3 och a_5.

1011 Bestäm kvoten.

1022 Vänstra ledet är en geometrisk summa. Skriv om det med hjälp av den slutna formeln.

1025 Bestäm antal element genom att ställa upp en ekvation som beskriver ett samband mellan det sista elementet och det första.

1038 Beräkna först vad som finns på kontot då Mona är 19 år med hjälp av geometrisk summa. Använd sedan den sammanlagda förändringsfaktorn för sex år på det beloppet.

❷ FUNKTIONER OCH GRÄNSVÄRDEN

2009 Läs av en punkt, t.ex. (2, 20) och sätt in dessa värden i det givna sambandet $y = kx^2$.

2019 a) Inkomsterna blir $p \cdot x$. Ersätt x med $(600 - 2p)$.

2020 Vinsten (inkomster minus utgifter) kan skrivas:
$V = p \cdot x - 50 \cdot x =$
$= p(600 - 2p) - 50(600 - 2p)$.
Bestäm symmetrilinjen efter förenkling av funktionsuttrycket.

2021 a) Rektangelns bredd är x och dess höjd är y, där $y = -4x + 8$.

2026 Varje term i den första parentesen ska multipliceras med varje term i den andra parentesen.

2036 Minimipunkten ligger på symmetrilinjen.

2037 c) Om $h(x)$ är växande, är $-h(x)$ avtagande.

2038 Prova först med $p(x) = x$ (i a–c) respektive $p(x) = -x$ (i d–f). Då blir $g(x) = x^2$.

2044 $(x - 2)$ är en faktor $\Leftrightarrow p(x) = = (x - 2)q(x) \Leftrightarrow p(2) = 0$

2070 Faktorn $(x + 5)$ ingår om polynomen får värdet 0 då $x = -5$.

2074 Förläng med ab.

2080 Faktorisera nämnarna i b- och c-uppgifterna innan de rationella uttrycken förlängs.

2101 a) och b): Gör täljarnas bråk liknämniga.
c) Förläng med konjugatet.

BLANDADE ÖVNINGAR

29 Uppgiften kan lösas genom att lägga in triangeln i ett koordinatsystem, där kateterna ligger på koordinataxlarna och hypotenusan på den räta linjen $y = 0{,}75x + 6$. Man kan också använda likformiga trianglar för att ersätta h i uttrycket för arean, $A = x \cdot h$.

31 Teckna först intäktsfunktionen $I = x \cdot p = 50(225 - p)p$ och kostnadsfunktionen $K = 280000 + 45x = 280000 + + 45 \cdot 50(225 - p)$ och därefter resultatfunktionen $R(p) = I(p) - K(p)$.

32 Funktionens två nollställen ligger symmetriskt kring symmetrilinjen.

33 Arean kan skrivas $x(7 - x^2) = 6$ som efter omskrivning ger $x^3 - 7x + 6 = 0$. Eftersom $x = 1$ är en rot kan $x^3 - 7x + 6$ skrivas om som $(x - 1)(x^2 + px - 6)$. Utveckla parenteserna, jämför med $x^3 - 7x + 6$ och bestäm p. Avsluta med att bestämma nollställen till $p(x)$.

❸ DERIVATA

3040 $f'(2) = 5$ innebär att $k = 5$. $f(2) = 5$ innebär att linjen går genom punkten (2, 5).

3043 b) Vad gäller om $k_1 \cdot k_2 = -1$?

3065 Vilken hastighet har bollen när den vänder?

3072 Använd potenslagarna.

3074 Dela upp som en summa av fyra bråk och förenkla.

3088 Parallella linjer har samma k-värde.

BLANDADE ÖVNINGAR

20 a) Teckna ändringskvoten
$\dfrac{s(t) - s(0)}{t - 0} = \dfrac{20t - 2{,}0t^2}{t} =$
$= 12{,}0$
b) Teckna ändringskvoten
$\dfrac{s(t) - s(1)}{t - 1} =$
$= \dfrac{20t - 2{,}0t^2 - (20 \cdot 1 - 2{,}0 \cdot 1^2)}{t - 1} =$
$= 8{,}0$

36 Bestäm riktningskoefficienten k för grafen till derivatan. Använd att $f(x)$ har samma lutning i tangeringspunkten för att bestämma tangeringspunktens x-koordinat.

37 Faktorisera täljare och nämnare.

❹ ANVÄNDNING AV DERIVATA

4021 a) Vinsten är differensen av intäkter och utgifter. Hur ser den funktionen ut?
c) När blir vinsten positiv?

4024 Anta att $f(x) = x^2 + px + q$. För vilket värde på p är $f(a) = f(b)$?

4037 När du deriverat, ersätt x^2 med t.

4040 Vilken typ av extremvärde har funktionen mellan $x = 3$ och $x = 10$?

4045 Låt rektangelns bas vara x. Dess höjd y kan uttryckas i x med hjälp av ekvationen.

4075 Skissa först grafen för $f'(x)$.

4078 Derivatan till $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ är $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vilka andragradsfunktioner motsvarar graferna?

4089 Lös uppgiften grafiskt.

4105 c) Lös ekvationen som en andragradsekvation.

4109 ln 0,4 är ett negativt tal.

4117 Derivatans nollställe kan bestämmas grafiskt.

4120 a) Beräkna $P(0)$

4121 a) Hur många minuter går det på ett dygn?

BLANDADE ÖVNINGAR

19 Vilket minsta värde antar y'?

26 I en inflexionspunkt är andraderivatan noll.

❺ PRIMITIVA FUNKTIONER OCH ENKLA INTEGRALER

5006 c) Skriv i potensform och använd en potensregel.

5008 a) Skriv x^3 och x med varsin nämnare.

5013 d) Använd en potensregel.

5030 $K(0) = 7500$

5036 Bestäm funktionens nollställen.

5046 c) Skriv i potensform och använd potensregel.

5047 $g(x)$ är primitiv funktion till $g'(x)$.

5056 a) Derivera $f(t)$ för att beräkna när inströmningshastigheten är störst.

5063 Omvandla km/h till m/s.

BLANDADE ÖVNINGAR

18 Bestäm vattenförbrukningen för 9 år.

LÖSNINGAR

❶ GEOMETRISK SUMMA OCH LINJÄR OPTIMERING

1030 Utgå från det tredje elementet och beteckna det med a_3. Då är
$a_1 = a_3 - 2d$, $a_2 = a_3 - d$, $a_4 = a_3 + d$, $a_5 = a_3 + 2d$.
Det ger ekvationen $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 920$
$a_3 - 2d + a_3 - d + a_3 + a_3 + d + a_3 + 2d = 920$
$5a_3 = 920$
$a_3 = 184$
För den geometriska serien gäller att de tre första termerna är $a_2 = 184 - d$,
$a_3 = 184$ och $a_5 = 184 + 2d$.
Om kvoten mellan dem är k så gäller
$k = \frac{184}{184-d} = \frac{184+2d}{184}$
Förenkling ger ekvationen
$184^2 = (184 + 2d)(184 - d)$
$184^2 = 184^2 + 184d - 2d^2$
$d^2 - 92d = 0$
$d(d - 92) = 0$
$d_1 = 0$, $d_2 = 92$
$d_1 = 0$ ger att alla termerna är 184, då är $k = 1$ och summan är 552
$d_2 = 92$ ger att termerna är 92, 184 och 368, $k = 2$ och summan är 644.
Svar: 552 eller 644

1046 a) Värdet är $1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}04 + 1\,000 \cdot 1{,}04^2 + 1\,000 \cdot 1{,}04^3 + 1\,000 \cdot 1{,}04^4 =$
$= \frac{1\,000(1{,}04^5 - 1)}{1{,}04 - 1}$ kr ≈ 5 416 kr
b) Eftersom vi vet slutvärdet kan vi beräkna nuvärdet genom att dividera med $1{,}04^5$:
$\frac{5\,416}{1{,}04^5}$ kr ≈ 4 452 kr

❷ FUNKTIONER OCH GRÄNSVÄRDEN

2048 $p(x) = x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

2059 Talen är:
a
$b = 2(a + 1)$
$c = b - 4 = 2(a + 1) - 4 = 2a + 2 - 4 = 2a - 2 = 2(a - 1)$
Produkten är noll:
$abc = a \cdot 2(a + 1) \cdot 2(a - 1) = 4\,a(a + 1)(a - 1) = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

2075 $$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} =$$
$$= -\frac{\frac{h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

2082 $$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$
$$\frac{x-4}{(x-1)(x-4)} + \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} + \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$
$$\frac{2x-5}{x^2-5x+4} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$
$(2x - 5)(x^2 - 5x + 6) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$
$(2x - 5)(x^2 - 5x + 6 - x^2 + 5x - 4) = 0$
$2(2x - 5) = 0$
$2x = 5$
$x = \frac{5}{2}$

❸ DERIVATA

3011 a) $$\frac{h(27)-h(1)}{27-1} = \frac{6{,}0 \cdot 27^{\frac{1}{3}} - 6{,}0 \cdot 1^{\frac{1}{3}}}{26} = \frac{6{,}0(3-1)}{26} =$$
$$= \frac{6{,}0}{13} \approx 0{,}46$$
b) $$\frac{h(t)-h(0)}{t-0} = 0{,}375$$
$$\frac{6{,}0 \cdot t^{\frac{1}{3}} - 0}{t} = 0{,}375$$
$$\frac{6{,}0}{t^{\frac{2}{3}}} = 0{,}375$$
$$\frac{6{,}0}{0{,}375} = t^{\frac{2}{3}}$$
$t = 16^{\frac{3}{2}}$
$t = 64$

3042 a) $y' = \frac{b-b}{a-(-a)} = \frac{0}{2a} = 0$
b) $y' = \frac{a-b}{b-a} = \frac{-(-a+b)}{b-a} = -\frac{b-a}{b-a} = -1$
c) $y' = \frac{-3a-2b}{2b-(-3a)} = \frac{-(3a+2b)}{2b+3a} = -1$

BLANDADE ÖVNINGAR

29 Låt $P = (a, a^3)$ vara en punkt på grafen till $y = x^3$. En tangent till grafen har riktningskoefficienten $y' = 3x^2$. I punkten P är den $y' = 3a^2$. Tangenten går även genom punkten (1, 5). Riktningskoefficienten för en linje genom två punkter bestäms ur sambandet $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Det ger $k = \frac{a^3 - 5}{a - 1}$. Vi har nu två uttryck för linjens riktningskoefficient. De ger ekvationen
$\frac{a^3 - 5}{a - 1} = 3a^2$
$a^3 - 5 = 3a^2(a - 1)$
$2a^3 - 3a^2 + 5 = 0$
En lösning till den ekvationen är $a = -1$
$(a + 1)(2a^2 - 5a + 5) = 0$
Den andra faktorn saknar reella lösningar.
Alltså är $a = -1$ den enda reella lösningen.
Vi får $y = -1$ och $y' = 3$.
Enpunktsformen ger $y + 1 = 3(x + 1)$, $y = 3x + 2$
Svar: Tangentens ekvation är $y = 3x + 2$

❹ ANVÄNDNING AV DERIVATA

4017 a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2}$
$f'(x) = x^2 - 2x^3$
$f'(x) = 0$ då $x^2 - 2x^3 = 0$
$x^2(1 - 2x) = 0$
$x_{1,2} = 0$, $x = 0{,}5$

		0		0,5		x
$f'(x)$	+	0	+	0	–	
$f(x)$	↗		↗		↘	
		terrass-punkt		maximi-punkt		

$f(0) = 0$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{24} - \frac{1}{32} = \frac{4-3}{96} = \frac{1}{96}$
Svar: Terrasspunkt i (0, 0) och maximipunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{96}\right)$

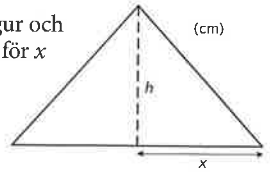
4023 $f(x) = ax^3 - bx^2 + 2$
$f'(x) = 3ax^2 - 2bx$
$f'(x) = 0$ då $3ax^2 - 2bx = 0$
$x(3ax - 2b) = 0$
Extremvärde för $x = 2$ ger $6a - 2b = 0$
som förenklas till $3a - b = 0$
$f(2) = 6$ ger $8a - 4b + 2 = 6$
som förenklas till $2a - b = 1$
Vi löser ekvationssystemet:
$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$
$b = 3a$
$-a = 1$
$a = -1$
$b = -3$
$f'(x) = -3x^2 + 6x$
Vi undersöker derivatans tecken runt extrempunkten för att bestämma dess art:
$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3 > 0$
$f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = -9 < 0$
Det visar att det är en maximipunkt.
Svar: $a = -1$, $b = -3$ och extremvärdet är en maximipunkt.

4035 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$
$f'(x) = 0$ då $12x = 0$ eller $x^2 - x - 2 = 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$

	-2		-1		0	1	2	3	x
$f'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	37		0		5		−27	32	

Svar: Största värde: 37, minsta värde: −27

4047 Vi ritar först en figur och kallar halva basen för x och höjden för h.



Summan av halva basen och höjden är 16.
$x + h = 16$
$h = 16 - x$
Definitionsmängd: $0 < x < 16$
Formel för triangelns area:
$A = \frac{b \cdot h}{2}$ ger $A(x) = \frac{2x \cdot (16 - x)}{2} = 16x - x^2$
$A'(x) = 16 - 2x = 2(8 - x)$
$A'(x) = 0$ då $x = 8$

		8		x
$A'(x)$	+	0	–	
$A(x)$	↗		↘	
$A(x)$		64		

Svar: Största möjliga area är 64 cm^2

4058 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$
Vi deriverar funktionen och bestämmer derivatans nollställen:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4)$
$f'(x) = 0$ då $4x = 0$ eller $x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$
Vi bestämmer typ av extrempunkter med andraderivatans tecken och deriverar därför funktionen ytterligare en gång:
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 16$
$f''(-1) > 0 \Rightarrow$ minimipunkt
$f''(0) < 0 \Rightarrow$ maximipunkt
$f''(4) > 0 \Rightarrow$ minimipunkt
(Fullständiga beräkningar redovisas inte här.)
Vi bestämmer funktionsvärdena:
$f(-1) = -3$
$f(0) = 0$
$f(4) = -128$
Svar: Maximipunkt i (0, 0), minimipunkter i (−1, −3) och (4, −128)

4093 Riktningskoefficienten för tangenten är lika med derivatan i tangeringspunkten. Vi deriverar därför funktionen:

$y' = e^x$

Tangeringspunkten: (x_1, e^{x_1})

Tangenten passerar genom origo. Vi har då två punkter och kan teckna k för tangenten med formeln för k och derivatan i tangeringspunkten:

$\frac{e^{x_1} - 0}{x_1 - 0} = e^{x_1}$

$e^{x_1} = e^{x_1} \cdot x_1$

$x_1 = 1$

k för tangenten $= y'(1) = e$

Vi tecknar tangentens ekvation med hjälp av enpunktsformeln:

$y - 0 = e(x - 0)$

$y = e \cdot x$

Svar: Tangentens ekvation är $y = e \cdot x$

4105 b) $\ln(x^2 + 6x + 9) = 0$

$e^{\ln(x^2+6x+9)} = e^0$

$x^2 + 6x + 9 = 1$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = -2$

Svar: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$

4116 k för tangenten $= y'(2)$ så vi börjar med att bestämma $y'(2)$.

$y'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$

$y'(2) = \ln 2 \cdot 2^2 = 4 \ln 2$

Tangenten skär x-axeln i (a, b) ger $b = 0$.

Vi tecknar k för tangenten med formeln för k och derivatan i tangeringspunkten:

$\frac{4 - 0}{2 - a} = 4 \ln 2$

$4 = (2 - a) \cdot 4 \ln 2$

$1 = 2 \ln 2 - a \ln 2$

$a \ln 2 = 2 \ln 2 - 1$

$a = 2 - \frac{1}{\ln 2}$

Svar: $a = 2 - \frac{1}{\ln 2}$, $b = 0$

5 PRIMITIVA FUNKTIONER OCH ENKLA INTEGRALER

5027 b) Sträckan är primitiva funktionen för hastighetsfunktionen.

$s(t) = 2{,}0t^2 + 5{,}0t + C$.

$s(0) = 0$ ger $C = 0$.

$t = 10$ s ger $s(10) = 2{,}0 \cdot 10^2 + 5{,}0 \cdot 10 = 250$ m

Svar: Föremålet har rört sig 250 m efter 10 s.

5042 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2 + (-3) = -1$

Svar: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -1$

5048 $\int_0^2 k(x-1)^2\,dx = 2$

$k\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)\,dx = 2$

$k\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^2 = 2$

$k\left(\frac{8}{3} - 4 + 2 - 0\right) = 2$

$k \cdot \frac{2}{3} = 2$

$k = 3$

Svar: $k = 3$

5053 Temperaturen kl. 8, $T(8)$ är primitiva funktionen till temperaturförändringen.

$T(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 4t + C$

$T(0) = 0$ ger $C = 0$

$T(8) = \frac{8^3}{3} - 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 = \frac{512}{3} - 160 = \frac{32}{3} \approx 11$

Svar: Temperaturen kl. 8 var 11°

5062 Vi beräknar ändring av populationsstorleken från 0 till 7 dagar.

$\int_0^7 20 \cdot 1{,}023^x\,dx = \left[\frac{20 \cdot 1{,}023^x}{\ln 1{,}023}\right]_0^7 =$

$= \frac{20 \cdot 1{,}023^7}{\ln 1{,}023} - \frac{20}{\ln 1{,}023} \approx 150$

Svar: Det finns 150 insekter fler efter 7 dagar.

BLANDADE ÖVNINGAR

6 Antalet bakterier vid tidpunkten t är primitiva funktionen y till funktionen för tillväxthastigheten $y' = 3{,}0t^2$.

$y' = 3{,}0t^2$

$y = t^3 + C$

$y(0) = 3500$ ger $C = 3500$

$y = t^3 + 3\,500$

$y(10) = 1000 + 3\,500 = 4\,500$

Svar: Antalet bakterier efter 10 timmar är 4500.

17 Antal producerade smådelar från $x = 0$ till $x = 8$:

$\int_0^8 150e^{-0{,}3x}\,dx = \left[-500e^{-0{,}3x}\right]_0^8 =$

$= -500(e^{-2{,}4} - 1) \approx 450$

Svar: ca 450 smådelar produceras under en 8-timmars arbetsdag.

1 GEOMETRISK SUMMA OCH LINJÄR OPTIMERING

DIN FÖRSTA UPPGIFT

12 111 kr

1001 a) 24
b) 96
c) 24 576
d) 1 572 864

1002 $a_n = \frac{3}{2} \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 4$, $a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

1003 a) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{81}{128}$
b) 5, 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005

1004 a) $k = 9$
b) $k = \pm 5$
c) $k = 1/2$
d) $k = -3$

1005 a) geometrisk $k = 9$, nästa element 1 458
b) ej geometrisk
c) geometrisk, $k = -4$, nästa element 256
d) geometrisk, $k = 1/4$, nästa element $\frac{3}{64}$

1006 3, 6, 12, 24, 48

1007 a) 19 683
b) 3/256

1008 a) 1
b) 2
c) $a_n = 2^{n-1}$
d) $2^{63} \approx 9{,}22 \cdot 10^{18}$

1009 $\pm$ 8 748

1010 12

1011 $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1

1012 T.ex: Lisa sätter in 5 000 kr på ett bankkonto med räntesatsen 3 %. Hur mycket pengar har Lisa på kontot efter 5 år?

1013 $a_n = 6 \cdot 9^{n-1}$

1014 $n > 15$

1015 1 020

1016 312

1017 3 065

1018 a) 2 046
b) 17 177
c) 16
d) 73 810

1019 a) 67 432
b) 815
c) 2 641
d) 5

1020 10 692

1021 a) ej geometrisk
b) 1,1
c) 1 591
d) ej geometrisk

1022 $x = 189$

1023 13 120

1024 a) $s_n = a_1 \cdot n$
b) $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$, bryt ut -1 i täljare och nämnare.
Det ger $s_n = \frac{a_1 \cdot (-1)(-k^n + 1)}{-1(-k + 1)}$
Förkorta med -1 och ändra ordningen på termerna.
Det ger $s_n = \frac{a_1(1 - k^n)}{1 - k}$

1025 5,7

1026 8

1027 $k < -1$

1028 8,0 l.e.

1029 $x/2$

1030 552 eller 644

1031 1,95 mm

UTMANING *Fantasihopp*

16 hopp

1032 55 342 kr

1033 194 333 kr

1034 3 680 kr

1035 138 066 kr

1036 Ja, Mariam kommer att ha 101 200 kr

1037 8 511 kr

1038 34 763 kr

1039 1 679 kr

1040 33 778 kr

1041 T.ex: Pinar sparar 1 500 kr varje år på ett sparande med årsräntesatsen 3 %. Hur lång tid tar det till dess att Pinar har 50 000 kr?

1042 a) 8 144 kr
b) 3 070 kr

1043 a) 11 753 kr
b) 19 144 kr

1044 21 596 kr

1045 41 815 kr

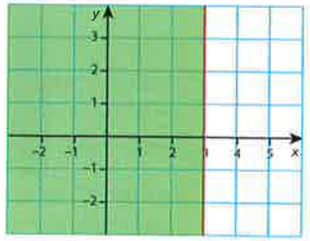
1046 a) 5 416 kr
b) 4 452 kr

1047 221 000 kr (220 802 kr)

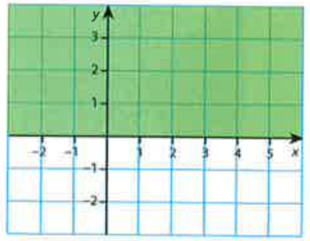
1048 20 061 kr

1049 a) 45 940 kr
b) 29 699 kr

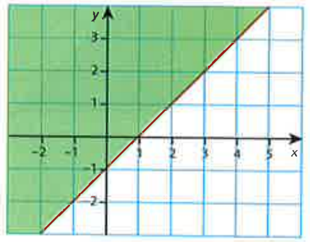
1050 a)



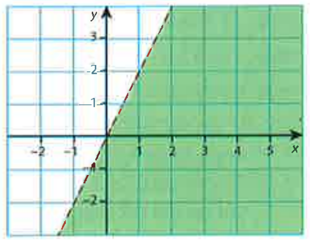
b)



c)



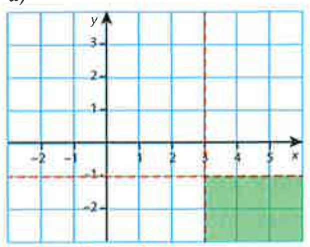
d)



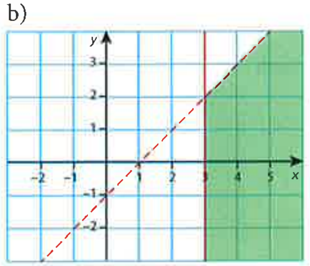
1051 a) $y \geq 3-2x$

b) $y \geq \frac{3x}{4}-3$

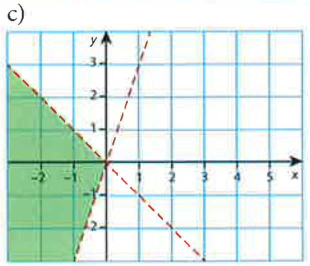
1052 a)



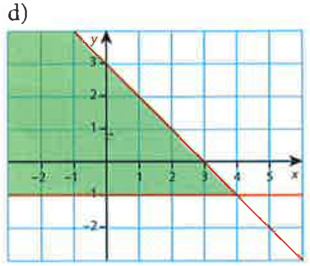
b)



c)



d)



1053 a) $\begin{cases} y<2 \\ y>2-3x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\leq -1 \\ y\leq 2+\frac{x}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y\geq x \\ y\leq 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y<2-\frac{x}{3} \\ y>\frac{x+1}{2} \end{cases}$

1054 Det övre området:

$\begin{cases} y\geq -2x+5 \\ y\geq x+1 \end{cases}$

Det vänstra området:

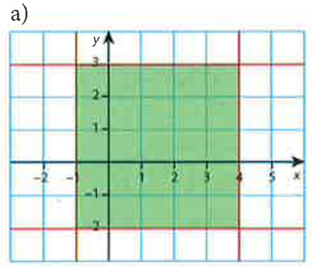
$\begin{cases} y\leq -2x+5 \\ y\geq x+1 \end{cases}$

Det nedre området:

$\begin{cases} y\leq -2x+5 \\ y\leq x+1 \end{cases}$

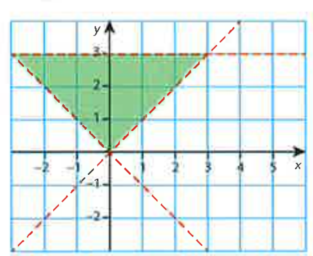
1055 $\begin{cases} y\leq \frac{x}{3}+\frac{1}{2} \\ y\geq 0 \end{cases}$

1056 a)



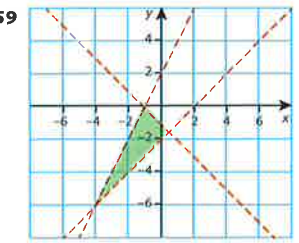
b) $\begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq -1 \\ y\leq 3 \\ y\geq -2 \end{cases}$

1057



1058 $\begin{cases} x\geq -2 \\ y\geq 2x+1 \\ y\leq 4-x \end{cases}$

1059



GRUPPAKTIVITET *Uttrycks värde på slutet område*

Uttryckets största respektive minsta värde antas i en hörnpunkt.

1060 a) $F(1, 1) = 3$

b) $F(-1, 4) = -13$

c) $F(10, -6) = 62$

d) $F(-2, -5) = 0$

1061 a) 23 respektive −23

b) 9 respektive −19

c) 13 respektive −13

d) 41 respektive −19

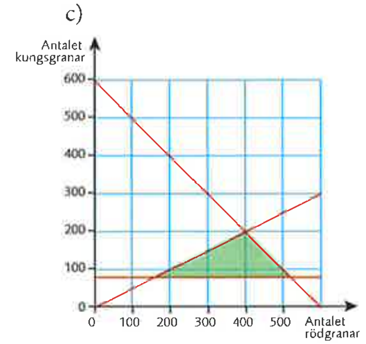
1062 −20

1063 32 respektive −4

1064 a) $F(r, k) = 200r + 400k$

b) $\begin{cases} r+k\leq 600 \\ k\geq 80 \\ r\geq 2k \end{cases}$

c)



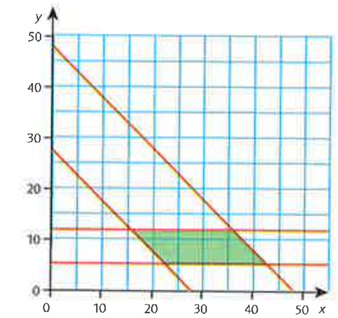
d) 400 rödgranar och 200 kungsgranar

1065 a) $\begin{cases} x+y\leq 48 \\ x+y\geq 28 \\ y\geq 5 \\ y\leq 12 \end{cases}$

b) 8 lärare

c) 42 studenter

d)



e) Priset per student är 2 400 kr och per lärare 4 000 kr. $K(x, y)$ anger totalkostnaden.

f) 23 studenter och 5 lärare

g) 36 studenter och 12 lärare

1066 a) $\begin{cases} y\leq 4 \\ 2x+y-4\geq 0 \\ x+y-5\leq 0 \\ 2x-3y+3<0 \end{cases}$

b) $x = 1, y = 4$

c) $-2 < k < \frac{2}{3}, 1 < m < 4$

1067 a) $\begin{cases} 20\leq m\leq 80 \\ n\geq 30 \\ m+n\leq 120 \\ 5m+8n\leq 800 \end{cases}$

b) Gatuförsäljaren säljer minst 20 st av produkt M och som mest 80 st. Gatuförsäljaren säljer sammanlagt av båda produkterna högst 120 st varav minst 30 st av produkt N.

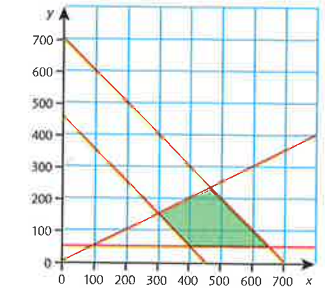
c) $V(m, n) = 14m + 10n$

d) $m = 80, n = 40$. Vinst 1 520 kr.

e) $-1 \leq k \leq -\frac{5}{8}$

1068 a) $\begin{cases} y\geq 50 \\ x+y\leq 700 \\ x+y\geq 450 \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$

b)



c) 300 kg av L och 150 kg av M

d) Alla kombinationer mellan punkterna (300, 150) och (400, 50)

UTMANING *Största och minsta värde*

Minsta värde 19,5, största värde saknas.

TEST 1.1

1 a) 2, 6, 18

b) $a_n = 3 \cdot a_{n-1}, a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

c) 354 294

2 a) −512 b) −1023

3 a) $k = -1/2$ b) $a_1 = 480$

4 Sjätte

5 10 692

6 a) 118 098 b) 88 574

c) jämna n d) udda n

7 262 144

8 36, 12, 4 eller $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$

TEST 1.2

1 26 282 kr

2 7 096 kr

3 8 638 kr

4 29 206 kr

5 4 095 kr

6 66 111 kr

7 a) 36 912 kr

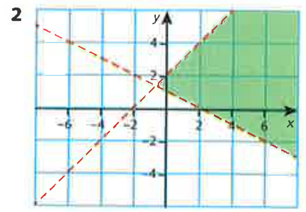
b) 422 800 kr

8 158 978 kr

TEST 1.3

1 Området till vänster om linjen $y=\frac{3}{2}x+2$, linjen exkluderad.

2



3 a) $F(-2, 2) = -16$

b) $F(4, -1) = 23$

c) $F(a, 2a) = -a$

4 $\begin{cases} x-3y+3\geq 0 \\ y\leq 1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

5 Största värde 19, minsta värde 8.

6 a) $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 1 \\ x+y-5\leq 0 \\ 3x+2y-6\geq 0 \end{cases}$

b) Största värde 23

c) $-\frac{3}{2}<k<0, 1 < m < 3$

7 Minsta värde 3 000, största värde 9 240

8 15 av påse I och 10 av påse II.

BLANDADE ÖVNINGAR

1 1, 2, 4 eller 1, −2, 4

2 162, 54, 18, 6, 2

3 $k = \pm\frac{1}{2}$

4 Nionde

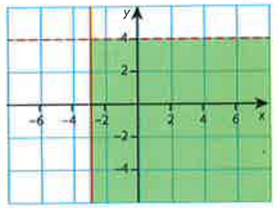
5 8, −6, $\frac{9}{2}, -\frac{27}{8}$

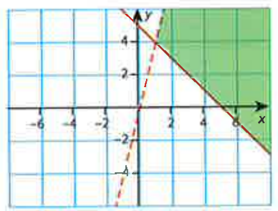
6 112 323

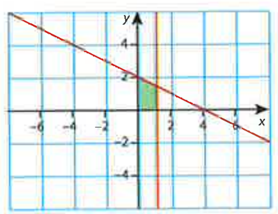
7 F

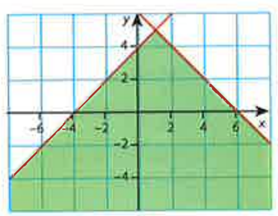
8 10 513 kr

9 109 591 kr

10 a)


b)


c)


d)


11 $\begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq 2x \\ y \geq \dfrac{x}{2} \end{cases}$

12 $F(1{,}8;\ 3{,}4) = 50{,}4$

13 Minsta värde 59, största värde 137

14 a) det vänstra området
b) det översta området
c) det nedre området

15 68 800 kr (68 792 kr)

16 Området till vänster om samtliga linjer.

17 520 kr

18 $a_{10} = \pm\sqrt{220}$

19 $a_{11} = \dfrac{3}{512}$

20 1,3 a.e.

21 Endast punkten (3, 1)

22 2 månader efter sin 17-års dag.

23 a) 9 439 kr
b) 88 786 kr

24 31 906 kr

25 Största värde 1 380, minsta värde 525

26 45 Strutar och 55 Lyxstrutar

27 $k = \dfrac{2}{3}$

28 14,7 miljoner

29 63 736 kr

30 97 000 kr (96 728 kr)

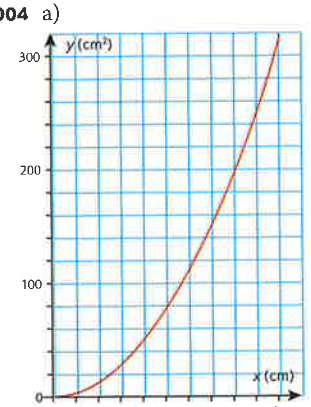
31 $m = \dfrac{K \cdot \frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t - 1}$

2 FUNKTIONER OCH GRÄNSVÄRDEN

2001 a) $x = 4$ b) $x = 3$
c) $x = \pm 5$

2002 a) $x \approx 3{,}54$ b) $x \approx 5{,}59$
c) $x \approx \pm 8{,}89$

2003 a) $x = \pm 2$ b) $x = \pm 4$
c) $x = \pm 10^4$

2004 a)


b) $x = 201$ cm²
c) $x \approx 9{,}36$ cm

2005 3,0 dm

2006 22 m/s

2007 a) $c = 13$ cm b) $b = 8$ cm

2008 1,5 dm, 2,0 dm och 2,5 dm

2009 $k = 5$

2010 $k = -0{,}5$

2011 a) Samtliga är växande och går genom punkterna $(-1, -1)$, $(0, 0)$ och $(1, 1)$.
b) Samtliga är avtagande för negativa x-värden och växande för positiva x-värden. De har alla minimipunkter i $(0, 0)$ och går dessutom genom punkterna $(-1, 1)$ och $(1, 1)$.
c) En rot
d) Två rötter om $a > 0$, en rot om $a = 0$ och ingen rot om $a < 0$.

2012 a) $x = -1$ och $x = -7$
b) $x = 1$ och $x = 5$
c) $x = -1$ och $x = 5$

2013 a) $x = -4$ och $x = 1$
b) $x = 1$ och $x = 4$
c) $x = -2$ och $x = \frac{1}{2}$

2014 a) Minimipunkt i (0, 5)
b) Maximipunkt i (0, 3)
c) Minimipunkt i (–3, –4)

2015 a) Minimipunkt i (2, –13)
b) Maximipunkt i (–1, –4)
c) Maximipunkt i $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

2016 a) Minimipunkt i (3, –4)
b) Maximipunkt i (–3, 2)
c) Minimipunkt i (–3, 6)

2017 8

2018 11 m

2019 a) $y = p(600 - 2p)$
b) 150 kr

2020 175 kr

2021 a) $A(x) = x(-4x + 8)$
b) (1, 4)

UTMANING *Geometrisk lösning av andragradsekvation*

Pythagoras sats ger:

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$

$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$

$x^2 - ax = b^2$

$x^2 - ax - b^2 = 0$

Slutsats: Sträckan x i figuren löser ekvationen eftersom de geometriska sambanden ger den aktuella ekvationen.

2022 a) $5x^2 - 4x - 5$; grad: 2
b) $9x^2 + 4x - 4$; grad: 2
c) $-6x^2 + 4x + 5$; grad: 2

2023 a) $3x$; grad: 1
b) $-2x^2 - x$; grad: 2
c) $2x^3 + x^2 + 3$; grad: 3

2024 a) $3x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 10x$; grad: 4
b) $2x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x$; grad: 5
c) $-6x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 3x - 1$; grad: 4

2025 a) $2x^3 - 4x^2 - 4x - 4$; grad: 3
b) $-4x + 4$; grad: 1
c) $x^6 - 4x^5 + 4x^3 + 8x^2 + 16x$; grad: 6

2026 a) $x^5 - 2x^3 + 2x^2 - x$; grad: 5
b) $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 26x - 16$; grad: 4
c) $3x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 8x - 6$; grad: 5

2027 a) grad $(p(x) + q(x)) \leq m$
b) grad $(p(x) - q(x)) \leq m$
c) grad $(p(x) \cdot q(x)) = m + n$

2028 grad$(p(x))$ = grad$(q(x))$

2029 a) avtagande
b) avtagande
c) avtagande och växande
d) växande
e) växande
f) varken avtagande eller växande

2030 a) $-1 \leq x \leq 1$
b) $x \leq -1$ och $x \geq 1$

2031 (–1, 1) och (1, –1)

2032 maximipunkt: (–1, 1)
minimipunkt: (1, –1)
terrasspunkt: (0, 0)

2033 a) avtagande b) växande
c) avtagande d) växande

2034 maximipunkt: (–2, 16)
minimipunkt: (2, –16)

UTMANING *Växande polynom*

Funktionens symmetrilinje ges av: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Det medför följande:

Om $a > 0$ gäller är $p(x)$ växande för $x \geq -\dfrac{b}{2a}$

Om $a < 0$ gäller är $p(x)$ växande för $x \leq -\dfrac{b}{2a}$

2035 a) $x \geq -2$ b) $x \leq 3$
c) $x \geq 2$

2036 t.ex. $f(x) = x^2 - 2x + 4$

2037 a) $f(x)$ kan inte vara avtagande eftersom den är summan av två växande funktioner.
b) $f(x)$ kan inte vara avtagande eftersom den är summan av två växande funktioner.
c) $f(x)$ kan vara avtagande eftersom den är summan av en växande och en avtagande funktion ($f(x)$ är avtagande för $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$).

2038 a) Nej.
b) Ja, $g(x)$ är växande.
c) Ja, $g(x)$ är avtagande.
d) Nej
e) Ja, $g(x)$ är avtagande.
f) Ja, $g(x)$ är växande.

2039 a) $x(2x + 5)$
b) $3x(x - 2)$
c) $2(x^2 + 5)$

2040 a) $(x + 5)(x - 5)$
b) $(3x + 4)(3x - 4)$
c) $3(x + 2)(x - 2)$

2041 a) $(x + 3)^2$
b) $(3x - 1)^2$
c) $3(x - 5)^2$

2042 a) $5x(x - 3)$
b) $5(x + 4)(x - 4)$
c) $2(x - 4)^2$

2043 a) $(x - 2)(x - 4)$
b) $(x + 3)(x - 1)$
c) $3(x - 1)(x + 4)$

2044 a) Ja
b) Ja, $(x - 2)$ är en faktor i $p(x)$ om $p(2) = 0$.

2045 Ja

2046 Ja

2047 $p(x) = x(x + 9)(x - 9)$

2048 $p(x) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

UTMANING *Finn fem fel*

1. I potensuttryck får inte både negativa baser och exponenter som inte är heltal ingå.
2. Förkortningen är felaktigt gjord. Täljaren delas med tre medan nämnaren delas med nio.
3. Divisionen med 0 ($x - 2$, då $x = 2$) i led fyra är inte tillåten.
4. $\sqrt{4} = 2$ och inte ± 2
5. Eftersom $a = b$ innebär det att rad 4, $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, kan skrivas om enligt $(a + b) \cdot 0 = b \cdot 0$. Denna likhet är sann men det är inte tillåtet att dividera med $a - b = 0$ så att $a + b = b$.

2049 a) $x = -3$, $x = 2$ och $x = 5$
b) $x = -2$, $x = -1$ och $x = 4$
c) $x = -8$, $x = 0$ och $x = 8$

2050 a) $x = -5$, $x = 0$ eller $x = 1$
b) $x = -5$, $x = 0$ eller $x = 1$
c) $x = -5$, $x = 0$ eller $x = 1$

2051 a) $x = 3$ och $x = 5$
b) $x = -4$ och $x = 2$
c) $x = -7$, $x = 0$ och $x = 7$

2052 a) $x = 0$, $x = 1$ eller $x = 5$
b) $x = -3$, $x = 0$ eller $x = 1$
c) $x = 0$, $x = 1$ eller $x = 9$

2053 a) $x = 0$ och $x = 1$
b) $x = -1$, $x = 0$ och $x = 1$
c) $x = -1$, $x = 0$ och $x = 1$

2054 a) $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$ eller $x = 3$
b) $x = 0$, $x = 2$ eller $x = 5$
c) $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ eller $x = 4$

2055 a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$
c) $(x - 1)(x - 5) = x^2 - 6x + 5$
d) Det är samma ekvation skriven på två sätt.
e) $f(x) = (x - 1)(x - 5)$

2056 a) $x = -3$ eller $x = 3$
b) $x = -1$ eller $x = 1$
c) $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ eller $x = 4$

2057 –2, –1 och 0 eller –1, 0 och 1 eller 0, 1 och 2

2058 –5 eller 0

2059 $a = -1$, $b = 0$ och $c = -4$ eller $a = 0$, $b = 2$ och $c = -2$ eller $a = 1$, $b = 4$ och $c = 0$

2060 a) $-(1 + 5) = -6$; $1 \cdot 5 = 5$
b) $-(-2 + (-6)) = 8$; $-2 \cdot (-6) = 12$
c) $-(x_1 + x_2) = p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

d) $(x - x_1)(x - x_2) =$
$= x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 =$
$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 =$
$= x^2 + px + q$
$\Rightarrow -(x_1 + x_2) = p$ och
$x_1 \cdot x_2 = q$

UTMANING *Pascals triangel*

- 1 6 15 20 15 6 1
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
- Lager 1: 1
  Lager 2: 3
  Lager 3: 6
  Lager 4: 10
  Lager 5: 15
  Talen finns diagonalt i Pascals triangel med start på rad 3.
- Det sammanlagda antalet blir i tur och ordning: 1, 4, 10, 20, 35
  Talen finns diagonalt i Pascals triangel med start på rad 4.

UTMANING *Polynom med dubbelrot*

- Två, $x = a$ och $x = b$.
- Två.
- Maximipunkt då $a < x < b$.
  Minimipunkt då $x = b$.

2061 a) $\frac{3x}{2}$ b) $\frac{1}{3x^2}$ c) $2x$

2062 a) $2xyz$ b) $\frac{z}{x}$
c) Uttrycket kan inte förenklas.

2063 a) $\frac{2}{y}$ b) $\frac{x}{y}$ c) -1

2064 1

2065 a) $\frac{x}{2}$ b) $\frac{x+2}{x-1}$ c) -2

2066 a) $\frac{x+6}{2}$ b) $x - 2$ c) $\frac{x+1}{x-1}$

2067 a) $\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{x-1}{x(x-3)}$
c) $\frac{2}{x+2}$

2068 a) $\frac{3-2x}{2x-3} = \frac{-(-3+2x)}{2x-3} = \frac{-(2x-3)}{2x-3} = -1$
b) 0 c) -2

2069 a) $\frac{5-x}{2}$ b) $2(x + 1)$
c) $\frac{x+15}{x}$

2070 a) ja b) nej c) nej

2071 a) $\frac{x+5}{x-5}$

2072 $\frac{4}{x^2}$

2073 $\frac{2}{(x-2)(x+2)^2}$

2074 $a + b$

2075 $-\frac{1}{x(x+h)}$

2076 a) $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$
c) $x = -1$

2077 a) $x = 5$
b) $x = -1$
c) $x = -15$

2078 a) $x = 7$ b) $x = 0$
c) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

2079 a) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
b) $x = 1$
c) $x = -1$

2080 a) Lösning saknas
b) Lösning saknas
c) $x = 1$

2081 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

2082 $x = \frac{5}{2}$

2083 Värden saknas.

2084 a) kontinuerlig
b) kontinuerlig
c) kontinuerlig

2085 a) kontinuerlig
b) kontinuerlig
c) kontinuerlig

2086 a) kontinuerlig
b) inget av alternativen
c) diskret

2087 a) kontinuerlig
b) kontinuerlig
c) diskret

2088 a) diskret
b) kontinuerlig
c) inget av alternativen

2089 a) $R(x) = 17x - 400$; $D_R = \mathbf{N}$
b) diskret

2090 a) 16 kulor
b) n^2 kulor
c) diskret

2091 a) 1, 5, 14 respektive 30 kulor
b) Ja formeln stämmer.
c) diskret

2092 $f(x)$ är kontinuerlig för att den inte gör något hopp i sin definitionsmängd.
$g(x)$ är inte kontinuerlig för att den gör ett hopp i sin definitionsmängd.

2093 a) 0
b) Gränsvärde saknas (∞).
c) 2

2094 a) 0
b) Gränsvärde saknas (∞).
c) 0

2095 a) 4 b) 12 c) 4

2096 5

2097 a) 6 b) 2 c) 2

2098 a) 0 b) 4
c) Gränsvärde saknas (∞).

2099 a) -1 b) 3 c) 2

2100 a) 4 b) 4 c) 12

2101 a) $-\frac{1}{9}$ b) $-\frac{2}{27}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

UTMANING *Konjugattrix*

Differensen går mot noll då x går mot oändligheten.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1\,000\,000} - \sqrt{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1\,000\,000} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1\,000\,000} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1\,000\,000} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1000000 - x}{\left(\sqrt{x+1\,000\,000} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1000000}{\left(\sqrt{x+1\,000\,000} + \sqrt{x}\right)} = 0$$

TEST 2.1

1 a) alla x b) $x \geq 0$ c) $x \leq 0$

2 a) minimipunkt: (0, 0)
b) minimipunkt: (–1, –9)
c) maximipunkt: (2, –4)

3 a) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

4 a) $x = -2$, $x = 0$ eller $x = 2$
b) $x = 0$ eller $x = 2$
c) $x = -4$, $x = 0$ eller $x = 4$

5 a) Ja, t.ex. $p(x) = x^2 + 1$
b) Ja, t.ex. $p(x) = x^2$
c) Ja, t.ex. $p(x) = x^2 - 1$

6 a) $f(-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)$ är en faktor.
b) $3x - 2$

7 a) 10 m b) 11 m c) 2,0 s

8 $x = -2$, $x = 0$ eller $x = 2$

TEST 2.2

1 a) $2x^2y^3$
b) Uttrycket kan inte förenklas.

2 a) $\frac{x^2+x+1}{2x+1}$ b) $x + 1$

3 a) $\frac{x+10}{2}$ b) $\frac{x-3}{4}$

4 a) $\frac{x-5}{2(x-1)}$ b) 2

5 a) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ b) $x = -1$

6 a) $x = -1$ b) $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

7 -1

8 $\frac{x^2-2x}{4x-8}$ är inte definierad för $x = 2$ så den roten ska uteslutas.

TEST 2.3

1 a) diskret
b) kontinuerlig

2 a) kontinuerlig
b) inget av alternativen

3 a) 0 b) 2

4 a) 0 b) -4

5 Det är en diskret funktion eftersom n bara kan anta positiva heltalsvärden.

6 Det är en funktion som varken är diskret eller kontinuerlig. Den gör hopp inom sitt definitionsområde.

7 a) $R(x) = 53x - 8000$
b) diskret

8 Gränsvärdet existerar inte.
Då x närmar sig 0 från vänster är funktionsvärdet -1 och då x närmar sig 0 från höger är funktionsvärdet 1.

BLANDADE ÖVNINGAR

1 a) $x = 6$ b) $x = 5$ c) $x = \pm 3$

2 a) maximipunkt: (0, 0)
b) minimipunkt: (–2, 4)
c) minimipunkt: (4, –3)

3 a) $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x_1 = -17 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

4 a) $5x^2(3x - 1)$
b) $3(x + 4)(x - 4)$
c) $2(x - 1)(x - 9)$

5 a) Ja b) Ja c) Ja

6 a) -2 b) $\frac{x-3}{x+3}$ c) $\frac{2(x-1)}{x+1}$

7 a) $x = 1$
b) $x = -3$
c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

8 a) $x = -1000$, $x = 10$ eller $x = 100$
b) $x = -3$, $x = 0$ eller $x = 2$
c) $x = -4$, $x = 0$ eller $x = 5$

9 a) $x = -5$, $x = 0$ eller $x = 5$
b) $x = 0$, $x = 1$ eller $x = 15$
c) $x = 0$ eller $x = 9$

10 a) $x = -2$, $x = 0$ eller $x = 2$
b) $x = -2$ eller $x = 2$
c) $x = -8$, $x = -6$, $x = 6$ eller $x = 8$

11 a) kontinuerlig
b) kontinuerlig
c) diskret

12 a) 0 b) 1

13 a) -1 b) 2

14 a) 0
b) Gränsvärde saknas (∞).
c) 25

15 125 m och 40,0 m

16 a) $(-3)^3 - 2(-3)^2 - 15(-3) = 0$ och $5^3 - 2 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 = 0$
b) Ja, $x = 0$

17 a) $2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 2(-2) - 4 = 0$
$2(-1)^3 + 4(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 0$
$2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$
b) Nej.

18 $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 > 0$

19 a) -4
b) Gränsvärde saknas (∞).
c) -4

20 Tre rötter
($x = -1$, $x = 0$ och $x = 1$)

21 a) $(x - 15)(x + 3 - 15)(x + 6 - 15) = (x - 15)(x - 12)(x - 9)$
b) Talen är 9, 12, 15 eller 12, 15, 18 eller 15, 18, 21

22 5,0 cm, 10 cm och 15 cm

23 a) 10 000 b) 81 000 000 kr

24 $p(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + 1$

25 a) bredd: 24 cm, höjd: 12 cm
b) 144 liter

26 $p(x) = 2x^2 + 3$

27 a) $f(x) = x^3 + 1$
b) $f(x) = (x - 1)^3 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x$

28 a) Mängden preparat i mg vid tiden 3 timmar.
b) Tidpunkten då mängden preparat är noll.
c) Då det gått 8 timmar.
d) Eftersom mängden preparat växer allt snabbare enligt formeln efter att det gått åtta timmar gäller inte formeln då.

29 12 cm^2

30 a) 29 kr b) 841 kr

31 a) Priset ska överstiga 85 kr och ligga under 185 kr.
b) 135 kr ger högst vinst.
c) 125 000 kr

32 $p(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$

33 (2, 3)

34

- $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ är av formen $f(x) = kx + m + g(x)$, där $g(x) = \frac{1}{x}$ och $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.
Det innebär att $f(x)$ har $y = x + 1$ som asymptot.
- $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$ har $y = 2x - 1$ som asymptot eftersom $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$.
- $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x} - (x+3)\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x} - \frac{x(x+3)}{x}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x^2-3x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+2} - (x-2)\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x+2} - \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3-(x^2-4)}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-6x+2}{3x-1} - (kx+m)\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-6x+2}{3x-1} - \frac{(kx+m)(3x-1)}{3x-1}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x^2-6x+2}{3x-1} - \frac{3kx^2+(3m-k)x-m}{3x-1}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(9-3k)x^2+(-6-3m+k)x+2+m}{3x-1}\right)$
Välj först $k = 3$. Det ger uttrycket
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(-3-3m)x+2+m}{3x-1}\right)$
Välj därefter $m = -1$.
Det ger uttrycket:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+(-1)}{3x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3x-1} = 0$.
Slutsats: Asymptot: $y = 3x - 1$

3 DERIVATA

3001 a) $-1{,}75$ cm/s $\approx -1{,}8$ cm/s
b) $-1{,}25$ cm/s $\approx -1{,}3$ cm/s
c) $-1{,}5$ cm/s

3002 $-1{,}5$ cm/s

3003 Ja, modellen gäller endast för $0 \le t \le 40$. Därefter stiger höjden igen.

3004 a) 2 b) -1 c) 0,5

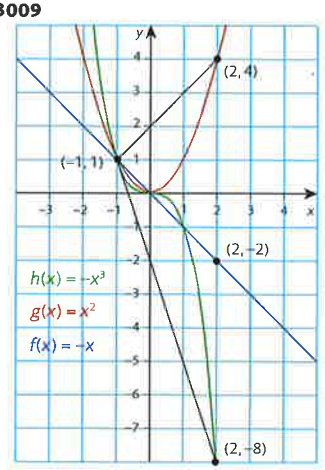
3005 28

3006 a) 1,2 m/s
b) 1,2 m/s

3007 a) 0,60 m/s
b) 1,8 m/s

3008 a) 2 miljoner kronor
b) 2,1 miljoner kronor per år

3009



a) -1 b) 1 c) -3

3010 a) 20; sträckan efter 2 s är 20 m.
b) 10; medelhastigheten under de två första sekunderna är 10 m/s.
c) 25; medelhastigheten mellan tidpunkterna 1 s och 4 s är 25 m/s.

3011 a) 0,46 cm/s
b) $t = 64$ s

3012 $a = 5$

3013 a) $f(-4) = -4$
b) $f(0) = 4$
c) $f(2) = 2$
d) $f'(-4) = 4$
e) $f'(0) = 0$
f) $f'(2) = -2$

3014 $f'(1) = 2$

3015 $f'(2) = -1{,}5$

3016 A – F B – D C – E

3017 $x = -1$ eller $x = 3$

3018 a) A b) C och E
c) A d) D

3019 a) Höjden då det gått 3 s.
b) Hastigheten då det gått 1 s.
c) Tidpunkten då höjden är 12 m.
d) Tidpunkten då hastigheten är -10 m/s (den är på väg ner eftersom hastigheten är negativ).

3020 Folkmängden minskar.

3021 a) Då bastun sätts på är temperaturen 15 °C.
b) När det gått 15 minuter är temperaturen 42 °C.
c) När det gått 15 minuter ökar temperaturen med 1,8 °C per minut.
d) När det gått 90 minuter minskar temperaturen med 0,6 °C per minut.

3022 a) $V(45)$
b) $V'(55)$
c) $V(t) = 150$
d) $V'(t) = -30$
e) $\frac{V(60)-V(55)}{5}$

GRUPPAKTIVITET *Bestäm derivata numeriskt*
$f(x) = x^2$: $f'(1) = 2$
$f(x) = x^3$: $f'(-2) = 12$
$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$: $f'(3) = 8$

3023 $f'(3) \approx 18$

3024 $f'(4) \approx 11$

3025 $f'(-1) \approx 3$

3026 a) $f'(1) \approx 6$
b) $f'(1) \approx 23$
c) $f'(1) \approx 0{,}5$

3027 a) 1200 invånare per år
b) 1200 invånare per år
c) 1200 invånare per år
d) En linjär funktion innebär att det är konstant tillväxthastighet

3028 A: $f'(1) \approx 1{,}25$
B: $f'(1) \approx 1{,}08$
C: $f'(1) \approx 1$
Ju högre grad funktionen har, desto sämre närmevärde på derivatan.

3029 a) $1 \le x \le 3$ $f'(2) \approx 40$
b) $1{,}9 \le x \le 2{,}1$ $f'(2) \approx 32{,}08$
c) $1{,}99 \le x \le 2{,}01$ $f'(2) \approx 32{,}0008$
Ju mindre intervall, desto bättre närmevärde.

3030 a) $f'(0{,}5) \approx 4{,}0$
b) $f'(0{,}5) \approx 1{,}3$
c) $f'(0{,}5) \approx -4{,}0$

3031 a) $y' = 2$ b) $y' = 0$

3032 a) $f'(x) = \frac{1}{2}$
b) $f'(x) = \frac{3}{4}$
c) $f'(x) = 0$
d) $f'(x) = -2$

3033 a) $f'(x) = 2$
b) $f'(x) = -3$
c) $f'(x) = \frac{1}{2}$

3034 a) $y' = 1$
b) $y' = \frac{1}{2}$
c) $y' = 0$

3035 $y = -2x + 3$

3036 a) $s(t) = 80t$
b) $s'(t) = 80$. Derivatan anger hastigheten i km/h.

3037 a) Viktökning i kg per vecka
b) 0,18

3038 a) (0, 3)
b) (–1, 0)

3039 a) $f'(3) = 2$. Derivatan är konstant för en linjär funktion.
b) $f'(a) = 2$

3040 $y = 5x - 5$

3041 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

3042 a) $y' = 0$
b) $y' = -1$
c) $y' = -1$

3043 a) $f(x) = -2x + 6$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$
b) 90°

3044 a) $f'(x) = -2$
b) $f'(x) = 1$
c) $f'(x) = k$

3045 a) $f'(2) = 4$
b) $f'(2) = 4$
c) $f'(2) = 7$

3046 a) $f'(x) = 8x$
b) $f'(x) = 8x$
c) $f'(x) = 8x + 5$

3047 a) $f'(x) = -6x + 3$
b) $f'(1) = -3$
c) $k = -3$

3048 a) $f'(0)$
b) $s'(t)$
c) $s'(a)$

UTMANING *Derivata av potensfunktion*

$f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1^4}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+1^2)(x^2-1^2)}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+1^2)(x+1)(x-1)}{x-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1^2)(x+1) =$
$= (1^2+1^2)(1+1) = 2\cdot 2 = 4$

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a} =$
$= \lim\limits_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{x-a} =$
$= \lim\limits_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}{x-a} =$
$= \lim\limits_{x\to a}(x^2+a^2)(x+a) =$
$= (a^2+a^2)(a+a) = 2a^2\cdot 2a = 4a^3$

3049 a) $f'(x) = 11x^{10}$
b) $f'(x) = 25x^{24}$
c) $f'(x) = 1000x^{999}$
d) $f'(x) = 0$

3050 a) $f'(x) = 5$
b) $f'(x) = 12x$
c) $f'(x) = -x^2$
d) $f'(x) = 0$

3051 a) $f'(3) = 1$ b) $f'(3) = 3$
c) $f'(3) = 0$ d) $f'(3) = 81$

3052 a) $f(-2) = -40$, $f'(-2) = 20$
b) $f(-2) = 40$, $f'(-2) = -40$
c) $f(-2) = -40$, $f'(-2) = 60$
d) $f(-2) = -2$, $f'(-2) = 0$

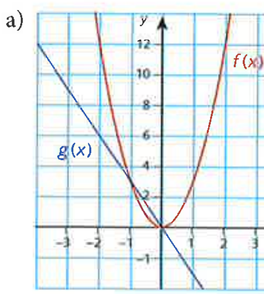
3053 a) $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 9$
b) $f(\frac{1}{3}) = 40$, $f'(\frac{1}{3}) = 120$
c) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = 3$
d) $f(3) = -63$, $f'(3) = -42$

3054 a) Funktionsvärdet när $x = 1$.
b) $f'(1) = 1$, kurvans lutning i punkten (1, 0,5)
c) För vilka x har funktionen värdet 1?
d) För vilka x är funktionens lutning 1?

3055 a) $x = 4$
b) I punkten (4, 8) har funktionens graf lutningen 4.

3056 a) $x = \pm 1$
b) I punkterna (1, 1) och (–1, –1) har funktionen lutningen 3.

3057 a)



b) $x = 0$, $x = -1$, skärningspunkternas x-värden.
c) $x = -0{,}5$, när $x = -0{,}5$ har $f(x)$ en tangent parallell med $g(x)$.

3058 a) (2, 16) och (–2, –16)
b) Funktionen har positiv lutning för alla x
c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ och $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$

3059 a) $y' = 10x - 7$
b) $y' = 12x^2 + x$
c) $y' = -12$
d) $y' = 5x^4 - 3x^2$

3060 a) $f'(x) = 18x + 15$
b) $g'(x) = 2x^2 + 5x$
c) $h'(x) = x^3$
d) $s'(t) = 8 - 10t$

3061 a) $f'(0) = -20$
b) $f'(0) = -3$
c) $g'(0) = 7$
d) $h'(0) = -\frac{7}{6}$

3062 a) $f'(1) = 2$
b) $g'(-1) = 16$
c) $h'(2) = 20$
d) $s'(5) = 15$

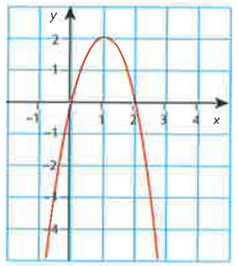
3063 15 kr/enhet

3064 a) Den totala vinsten 337 545 kr när man säljer 500 enheter.
b) När försäljningen ökar från 499 enheter till 501 enheter så ökar vinsten med 2025 kr/enhet.
c) Marginalvinsten vid en försäljning av 500 enheter är 2025 kr/enhet.

3065 a) 28 m
b) 24 m/s

3066 (2, 15) och (–2, –25)

3067 a) $a = -2$, $b = 4$
b) Funktionen är en parabel som går genom punkten (1, 2). Förändringshastigheten i den punkten är 0, dvs. punkten är en extrempunkt.
c)



3068 110 förpackningar

3069 a) $f'(x) = -4x^{-5}$
b) $g'(x) = -\frac{9}{x^4}$
c) $h'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$
d) $f'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

3070 a) $f'(x) = 2 + \frac{4}{x^3}$
b) $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
c) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$
d) $g'(x) = \frac{6}{x^{\frac{1}{4}}}$

3071 a) $f'(2) = -\frac{5}{4}$
b) $g'(16) = \frac{1}{8}$
c) $f'(1) = 6$
d) $g'(2) = \frac{189}{16}$

3072 $f'(4) = 3$

3073 a) $f(1) = 1$
Funktionens värde när $x = 1$
b) $f(1+h) - f(1) = \frac{h}{1+h}$
Ändringen i funktionens värde när x ändras från 1 till $1 + h$.
c) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h}{1+h}$
Lutningen på linjen genom punkterna (1, 1) och $(1+h, \frac{1}{1+h})$
d) $f'(1) = -1$, grafens lutning då $x = 1$.

3074 $f'(x) = -\frac{4 + 3x + 2x^2 + x^3}{x^5}$

3075 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

3076 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

UTMANING *Motsatta tal*
$f(x) = ax^2 + bx + c$ har nollställen för

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sätt in dessa i derivatan $f'(x) = 2ax + b$.

$$f'\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= 2a \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + b =$$

$$= -b + \sqrt{b^2 - 4ac} + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$f'\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= 2a \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + b =$$

$$= -b - \sqrt{b^2 - 4ac} + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Derivatans värden i nollställena är varandras motsatta tal. Ritar vi grafen till andragradsfunktionen så ser vi att den är symmetrisk. Det innebär att lutningen på den ena sidan är lika stor som på den andra sidan men med motsatt tecken.

UTMANING *Deriveringsregelns bevis*

a) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$

$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n$$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} ((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}) = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \ldots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1}}_{n \text{ termer}} =$$

$$= nx^{n-1}$$

GRUPPAKTIVITET *Funktioner och derivata*

- Nej. Vi visar med ett exempel att det inte gäller. Sätt $f(x) = x$ och $g(x) = 5$. Då gäller $f(5) = 5$ och $g(5) = 5$. $f'(x) = 1$ och $f'(5) = 1$, $g'(x) = 0$ och $g'(5) = 0$. $f'(5) \neq g'(5)$.
- Ja. Funktionerna är identiska.
- Nej. Vi visar med ett exempel att det inte gäller. Sätt $f(x) = 2x + 7$ och $g(x) = 2x$. Då gäller $f'(x) = 2$ och $f'(5) = 2$, $g'(x) = 2$ och $g'(5) = 2$ men $f(5) = 17$ och $g(x) = 10$.
- Nej. Se exemplet ovan

3077 a) $y' = 3$
b) $y' = 12$
c) $y' = 3$

3078 4

3079 a) $f'(0) = -4$
b) $f'(2) = 8$

3080 (1, 5,5)

3081 $y' = 32$

3082 $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$

3083 b) $x > 0$
c) $y' > 0$
e) $x < 0$
f) $y' < 0$
g) 0
h) $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$
i) (–6, 34)

3084 $f'(1) = -1$

3085 (5, –20)

3086 (0, 5) och (3, –22)

3087 $x > 1$

3088 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$

3089 $y' = 3x^2 \geq 0$ för alla x.

3090 Genom att lösa ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ ser vi symmetrilinjen, som ju går genom extrempunkten.

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + c = 0$

$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$

Symmetrilinjen är $x = -\frac{b}{2a}$

Insättning ger att funktionen har en extrempunkt i

$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Lutningen i den punkten fås ur $y' = 2ax + b$.

$x = -\frac{b}{2a}$ ger

$y' = 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b = -b + b = 0$.

Tangenten har lutningen 0,2.

GRUPPAKTIVITET *Nollställen och derivata*

- En andragradsfunktion och dess derivata har gemensamt nollställe om nollstället är en dubbelrot till $f(x) = 0$
- $f(x) = x^3 - 3x + 2$ och $f'(x) = 3x^2 - 3$ har ett gemensamt nollställe $x = 1$. Faktorisering av $f(x)$ ger $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$. Alltså är $x = 1$ en dubbelrot till $f(x) = 0$.
  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$ och $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$. Det gemensamma nollstället är $x = -1$ som är en trippelrot till $f(x) = 0$ och en dubbelrot till $f'(x) = 0$.
- Om en polynomfunktion $f(x)$ har ett nollställe med multipliciteten $m \geq 2$ så har derivatan ett nollställe med multipliciteten $m - 1$.
  Bevis för en tredjegradsfunktion
  För polynomfunktioner av högre grad behövs mer kunskaper om deriveringsregler, de reglerna presenteras i kurs 4.
  Om en tredjegradsfunktion har ett dubbelt nollställe $x = a$ så har det även ett enkelt nollställe $x = b$. Den kan då faktoriseras som $f(x) = (x - a)^2(x - b)$. Utveckling av parenteserna ger $f(x) =$ $= x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b$. Derivering ger $f'(x) =$
  $= 3x^2 - 2(2a + b)x + (2ab + a^2) =$
  $= (x - a)(3x - 2b - a)$ vilket visar att $x = a$ är ett enkelt nollställe till $f'(x)$.
  Om en tredjegradsfunktion har ett trippelt nollställe $x = 3$ kan den skrivas som $f(x) = (x - a)^3$. Derivatan blir $f'(x) = 3(x - a)^2$ som visar att $x = a$ är ett dubbelt nollställe till derivatan.

3091 a) $y = 4x - 4$
b) $y = 3x - 2$

3092 a) $y = 8x - 3$
b) $y = -4x - 9$
c) $y = -3$
d) $y = 4x - 1$

3093 a) $y = 9x + 16$
b) $y = 6x - 4$
c) $y = -\frac{x}{4} + 4$

3094 a) $y = 2x + 1$
b) $y = 10 - 7x$
c) $y = x - 1$
d) $y = -12x + 8$

3095 $y = 6 - x$

3096 a) minimipunkt, koefficienten framför x^2-termen är positiv.
b) $y = -8$

3097 a) $y = 3$ respektive $y = -1$
b) $y = -3x + 4$
c) $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

3098 $y = -4x + 4$ och $y = -4x - 4$

3099 $y = 3x$

3100 (0, 1)

3101 T.ex. $y = -12x - 5$
(i punkten (–1, 7))

3102 a) Om parablerna ska tangera varandra kan de bara ha en gemensam punkt. Den bestäms genom ekvationen $x^2 = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ som har en dubbelrot, $x = -1$ som lösning. Parablerna har en gemensam punkt, tangeringspunkten (–1, 1).
b) $y = -2x - 1$

UTMANING *Tredjegradspolynom*
Antag $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
då är $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
$P(x) - P'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d -$
$- (3ax^2 + 2bx + c) = x^3$
$ax^3 + bx^2 + cx + d - 3ax^2 - 2bx - c = x^3$
Jämförelse av koefficienter framför variabeltermerna i VL och HL ger
$a = 1$
$b - 3a = 0$ ger $b = 3$
$c - 2b = 0$ ger $c = 6$
$d - c = 0$ ger $d = 6$.
Svar: $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

TEST 3.1

1 a) Den stiger.
b) 0,6 cm/s

2 –2

3 a) 4,9 m/s
b) 4,9 m/s

4 a) 10 m/s
b) 30 m/s

5 a) 3; Vinsten i miljoner kronor efter två år.
b) 1; Medelvinsten i miljoner kronor per år efter fyra år.
c) 0,5; Medelvinsten i miljoner kronor per år mellan år 2 och år 4.

6 a) $N(12)$
b) $N(t) = 115\,000$
c) $\frac{N(20)-N(12)}{20-12}$

7 190 m

8 4 % per år

TEST 3.2

1 20 m/s

2 $f'(4) = 4$

3 a) $f'(x) = 2$
b) $f'(x) = 0$
c) $f'(x) = -2$

4 a) –1
b) –1
c) 0

5 a) $f'(2) \approx 10$
b) $f'(2) \approx 0,35$
c) $f'(2) \approx -0,25$

6 a) $s(0) = 0$ Vid tiden 0 s har fordonet färdats 0 m.
b) $s'(5) = 2,5$ Vid tiden 5 s har fordonet hastigheten 2,5 m/s.
c) $s(10) = 125$ Vid tiden 10 s har fordonet färdats 125 m.
d) $s'(15) = 0$ Vid tiden 15 s står fordonet stilla.

7 $f'(x) = 3$

8 $f'(3) = 3$

TEST 3.3

1 a) $f'(x) = 20x^4$
b) $g'(x) = 24x^{11}$
c) $f'(x) = -3$
d $h'(x) = 0$

2 a) $f(2) = 28, f'(2) = 28$
b) $f(2) = 4, f'(2) = -2$
c) $f(2) = \frac{4}{3}, f'(2) = 2$
d) $f(2) = -\frac{1}{4}, f'(2) = -\frac{1}{8}$

3 a) $f'(x) = 2$
b) $f'(x) = 6x - 1$
c) $f'(x) = 24x^2 - 14x + 6$
d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

4 a) $f(0) = -5$
b) $x_1 = 5, x_2 = -1$
c) $f'(0) = -4$
d) $x = 2$

5 a) $f(1) = 2, f'(1) = 8$
b) $f(8) = 16, f'(8) = \frac{8}{3}$
c) $f(-1) = f'(-1) = 0$

6 a) 18 elever/dag
b) Efter 6 dagar
c) 84 elever

7 a) 1016 kr/enhet
b) Kostnadsökningen/enhet vid 100 enheter är 1016 kr.

8 a) $T(3) = 19$, 3,0 meter från värmekällan är temperaturen 19 °C.
b) $T'(3) = -0,70$, 3,0 meter från värmekällan avtar temperaturen med 0,70 °C/m.

TEST 3.4

1 a) 6 b) –2 c) –7 d) $\frac{1}{8}$

2 a) (–2, 5)
b) $y = -7x - 9$

3 $y = 6x - 3$

4 a) (3, 14) b) $y = 2x + 8$

5 a) (–2, 13) b) $y = 13$

6 $y = -40x + \frac{125}{3}$ och $y = -40x + 100$, $y = 24x + 63$ och $y = 24x + 36$

7 $f(2) = 3, f'(2) = -1$

8 (4,5, –7)

BLANDADE ÖVNINGAR

1 a) $y' = -2$
b) $y' = 0$
c) $y' = \frac{2}{3}$

2 a) 2 b) 0 c) 1

3 $f'(4) = 2$

4 $f'(4) \approx 0,22$

5 a) $f'(3) = 7$
b) $f'(3) = -1$

6 a) $y' = -3,5$
b) $y' = 0$

7 a) $f'(2) = 2$
b) $f(3) = 5$

8 a) Bilens hastighet efter 3 h är 90 km/h $s'(3) = 90$
b) $\frac{s(3)-s(2)}{3-2} = 100$

9 5,25 cm/år

10 a) Bilens medelhastighet från tidpunkten 10 s till tidpunkten 12 s är ca 30 m/s.
b) $s'(5) \approx 11$ m/s. Bilens hastighet vid tidpunkten 5 s är 11 m/s.

11 a) $g'(x) = 72x^8$
b) $g'(x) = 20$
c) $f'(x) = \frac{5x^2}{6}$
d) $h'(x) = 0$

12 a) $f'(1) = -1$
b) $f'(1) = -2$
c) $f'(1) = 0$
d) $f'(1) = -1,5$

13 a) $y' = 3x^2 + 5$
b) $y'(3) = 32$

14 a) $y' = 8x - 3$
b) $y' = 6x^2 - 6$
c) $y' = \frac{4x}{5} + \frac{5}{x^3}$
d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

15 $f(-1) = \frac{5}{2}, f'(-1) = -1$

16 a) $y = 12x - 17$
b) $y = 2x - 3$
c) $y = 5x - 6$
d) $y = -3x + \frac{15}{4}$

17 $y = -3x - \frac{13}{4}$

18 $y = x - 13$

19 a) 909 kr/enhet
b) 900 kr/enhet

20 a) $t = 4,0$ b) $t = 5,0$

21 $f'(-2) = -1$

22 $f'(0,6) \approx 1,2$

23 a) $V'(5) = 1$ g/vecka
b) Efter 25 veckor

24 a) $x = 5$
b) För $x = 5$ har funktionerna parallella tangenter.

25 a) Grafen till en konstant funktion är en horisontell linje. $\Delta y = 0$ medför att $\frac{y}{x} = 0$. Därmed är derivatan 0.
b) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C-C}{h} = 0$

26 $-3 \le f(10) \le 21$

27 1

28 $y = 2x + 1, y = 6x - 7$

29 $y = 3x + 2$

30 a) $t = 5,0$ b) $t = 4,0$

31 a) $f(4) = 0$ b) $f'(4) = \frac{1}{4}$

32 $f'(2) = 0$

33 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+\frac{1}{x+h}-x-\frac{1}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h+\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-\frac{h}{(x+h)x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1-\frac{1}{(x+h)x}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$$

34 a) $0 \le t \le 5$
b) 96 l/min
c) 88 l/min

35 19,0 °C

36 (1, 6)

37 $y' = -\frac{1}{x^2}$

38 $a = -3$ och $b = 19$

39 Om andragradsfunktionen har två reella nollställen så är lutningen i dessa punkter varandras motsatta tal.
Om andragradsfunktionen har ett reellt nollställe så är lutningen i denna punkt 0.

4 ANVÄNDNING AV DERIVATA

4001 a) $x = 0$ och $x = 2$.
b) Negativ
c) Funktionen är avtagande.

4002 Växande för $x \le -1$ och $x \ge 1$.

4003 $x \ge 2$

4004 a) Växande då $x \le 0$, avtagande då $x \ge 0$
b) Avtagande då $x \le 3$, växande då $x \ge 3$
c) Växande då $x \le -\frac{1}{2}$, avtagande då $x \ge -\frac{1}{2}$

4005 a) Växande för $x \le -1$ och $x \ge 1$. Avtagande för $-1 \le x \le 1$.
b) $-2 < x < -1$ och $x > 1,5$

4006 a) $y = -6$
b) $y = -10, y = 22$
c) $y = \frac{5}{4}$

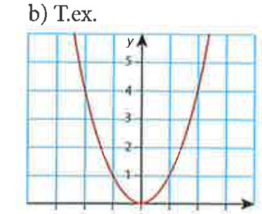
4007 a) $x = -1, x = 1$
b) $x < -1$ och $x > 1$
c) $-1 \le x \le 1$

4008 $x \le 0,\ x \ge \sqrt[3]{0,4}$

4009 a) Fram till dag 6
b) Dag 6, 208 enheter

4010 $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ för alla x.

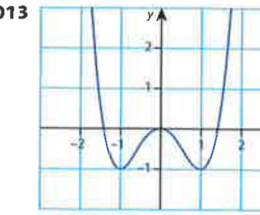
4011 a) Funktionen är avtagande för $x \le 0$, växande för $x \ge 0$ och den har en minimipunkt när $x = 0$.
b) T.ex.



4012

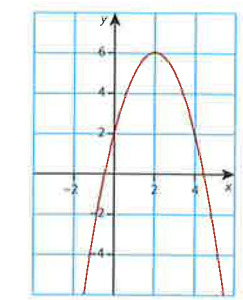
x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	0	↗

4013

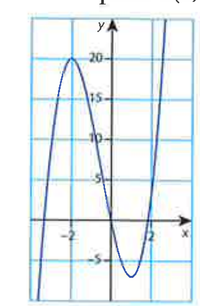


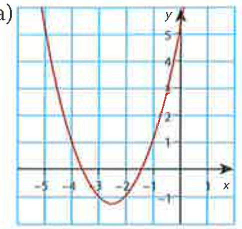
4014 a) Lokalt minimivärde –6,25. Lokalt maximivärde saknas.
b) Lokalt minimivärde –1. Lokalt maximivärde saknas.
c) Lokalt minimivärde –16. Lokalt maximivärde 16.
d) Lokalt minimivärde 0. Lokalt maximivärde 4.

4015 a) Maximipunkt i (2, 6)

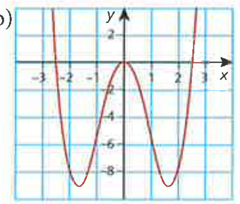


b) Maximipunkt i (–2, 20), minimipunkt i (1, –7).



4016 a) 

minimipunkt i (−2,5, −1,25)

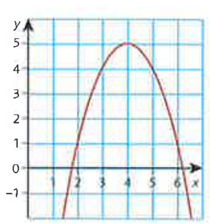
b) 

maximipunkt i (0, 0),
minimipunkter i $(-\sqrt{3}, -9)$
och $(\sqrt{3}, -9)$.

4017 a) terrasspunkt i (0, 0),
maximipunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{96}\right)$
b) Terrasspunkt i (0, 0),
minimipunkt i (3, −13,5)

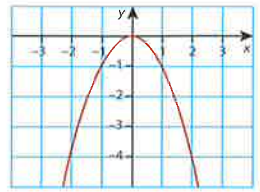
4018 a) maximipunkt i (0, 5),
minimipunkt i (2, 1)
b) maximipunkt i (1, 30),
minimipunkt i (4, 3)
c) maximipunkter i (−4, 1)
och (0, 1), minimipunkt i
(−2, −3)

4019 a) maximipunkt i (−1, 5)
b) maximipunkt i $\left(2, \frac{13}{3}\right)$,
minimipunkt i $\left(4, \frac{11}{3}\right)$

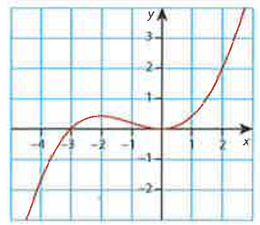
4020 

4021 a) 5 st
b) 85 000 kr
c) $1 \le x \le 7$

4022 a) T.ex.



b) T.ex.



4023 $a = -1$, $b = -3$. Maximipunkt.

4024 Låt $f(x) = x^2 + px + q$. Då gäller att $f(a) = a^2 + pa + q$ och
$f(b) = b^2 + pb + q$.
$f(a) = f(b)$ ger $p = -(a + b)$.
Vidare är $f'(x) = 2x + p =$
$= 2x - (a + b)$.
Det ger $f'(a) = a - b < 0$ och
$f'(b) = b - a > 0$.
Det finns då ett tal c, $a < c < b$, sådant att $f'(c) = 0$.

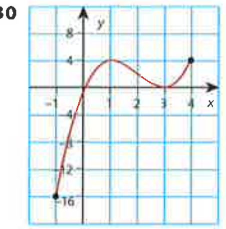
4025 (1, −1)

4026 a) $x = \pm 1$
b) $a > 0$: maximipunkt i
$(-1, -2a)$ och minimipunkt i
$(1, 2a)$, $a < 0$: minimipunkt i
$(-1, -2a)$ och maximipunkt
i $(1, 2a)$

4027 $a = -6$

4028 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

4029 a) lokala extrempunkter (−2, 5),
(−1, −1) och (0, 1), globalt maximum (−2, 5), största värde: 5, minsta värde: saknas
b) lokala extrempunkter (−2, −2),
(−1, 2) och (0, 0), största värde: saknas, globalt minimum (−2, −2), minsta värde: −2
c) lokala extrempunkter
(−2, 2), (−1, −1), (1, 3) och
(2, 1), globala extrempunkter (−1, −1) och (1, 3),
största värde: 3, minsta värde: −1

4030 

största värde: 4,
minsta värde: −16

4031 största värde: 5,
minsta värde: −27

4032 $-2 \le y \le 18$

4033 0,5

4034 lokal minimipunkt
$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$,
lokala maximipunkter
$(-2, -4)$ och $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$,
lokal och global minimipunkt
(4, −40), global maximipunkt
$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

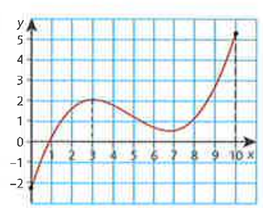
4035 största värde: 37,
minsta värde: −27

4036 största värde: 9,
minsta värde: 0

4037 största värde saknas,
minsta värde: −8

4038 $a = -6$, $b = -8$, $f(-1) = 2$ är en maximipunkt.

4039 största värde: saknas,
minsta värde: 4

4040 

4041 Eftersom $f'(x) \neq 0$ i hela intervallet så är antingen $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ för alla x i intervallet. Funktionen är växande eller avtagande och antar därför sitt största respektive minsta värde i intervallets ändpunkter.

4042 Maximala vinsten är 23 000 kr.

4043 32 000 personer

4044 $K'(100) = 40$ kr/enhet

4045 1 250 a.e.

4046 12,5 m²

4047 64 cm²

4048 $r = h = \left(\frac{125}{\pi}\right)^{1/3}$ cm ≈ 3,4 cm

4049 a) $K'(100) = 80$ kr/enhet. Vid produktion av 100 enheter ökar kostnaderna med 80 kr/enhet när produktionen ökar med en enhet.
b) $I'(100) = 138$ kr/enhet. Vid produktion av 100 enheter ökar intäkterna med 138 kr/enhet när produktionen ökar med en enhet.
c) Ja, det lönar sig att öka produktionen eftersom $I'(100) > K'(100)$.

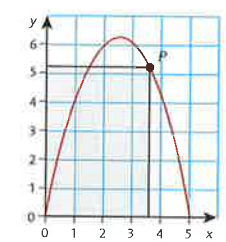
4050 6 cm × 8 cm × 12 cm

4051 20 kg, 133 kr

4052 Radien = 4,3 cm

4053 300 enheter

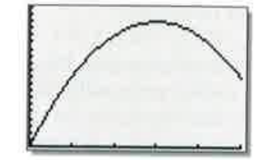
GRUPPAKTIVITET *Rektangelns omkrets och area*



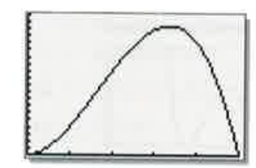
Låt x vara längden av rektangelns bas, $0 < x < 5$.
Då har rektangeln höjden $y = 5x - x^2$.

- Rektangeln får då omkretsen
$O(x) = 2x + 2(5x - x^2) = 12x - 2x^2$.
- Vi söker funktionens maximipunkt med hjälp av derivata.
$O'(x) = 12 - 4x$
$O'(x) = 0$ ger $x = 3$.
Eftersom x^2-termen i funktionsuttrycket för omkretsen är negativ så har vi en maximipunkt.
$O(3) = 18$
Omkretsen ökar från 0 till ett maximum 18 för $x = 3$ för att sedan avta. När x går mot 5 går omkretsen mot 10.

Vi låter även räknaren rita funktionen för omkretsen.



- Areafunktionen blir
$A(x) = x(5x - x^2) = 5x^2 - x^3$.
- Derivera och sätt $A'(x) = 0$.
$A'(x) = 10x - 3x^2$
$10x - 3x^2 = 0$
$x(10 - 3x) = 0$
$x_1 = 0$, $x_2 = 10/3$
Vi undersöker extrempunktens karaktär med ett teckenschema (beräkningar redovisas inte här).
Arean ökar från 0 till ett maximum $\frac{500}{27} \approx 18{,}5$ för att åter sjunka till 0 när punkten P rör sig utefter kurvans graf. Det framgår också om vi ritar grafen på räknaren.



GRUPPAKTIVITET *En lådas största möjliga volym*

- $V(x) = (24 - 2x)(30 - 2x)x =$
$= 4(x^3 - 27x^2 + 180x)$
$V'(x) = 12(x^2 - 18x + 60)$
$V'(x) = 0$ då $x \approx 4{,}4$
($x \approx 13{,}6$ orimligt)
Med teckenstudium visar vi att det är en maximipunkt (beräkningar redovisas inte här):
$V'(2) > 0$ och $V'(5) < 0$.
$V_{max} \approx 1400$ cm³
Svar: Lådans största volym är ca 1400 cm³

4054 a) $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$
b) $y' = 2$, $y'' = 0$
c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
d) $f'(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$
$f''(x) = x^4 - x^2$

4055 a) −18
b) 34

4056 $s'(t) = 36 - t^2$, $s''(t) = -2t$. $s'(t)$ beskriver hastigheten och $s''(t)$ accelerationen efter t sekunder.

GRUPPAKTIVITET *Undersökning av andraderivata*

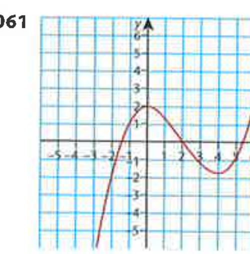
- Derivatans nollställen är $x = 1$ och $x = -2$. $f''(1) > 0$, $f''(-2) < 0$. Om man jämför med grafen ser man att grafen har en minimipunkt för $x = 1$ och maximipunkt för $x = -2$.
- Om andraderivatan är positiv i derivatans nollställe är det en minimipunkt och om andraderivatan är negativ i derivatans nollställe är det en maximipunkt.
- $f''(x) = 0$ för alla funktionerna, men graferna helt olika.
- Om $f''(x) = 0$ i derivatans nollställe kan ingen slutsats dras om art av extrempunkt.

4057 a) Maximipunkt i (−1, 12),
minimipunkt i (3, −20)
b) Maximipunkt i (2, 21),
minimipunkt i (4, 17)

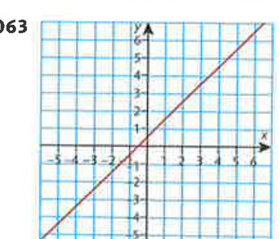
4058 Maximipunkt (0, 0), minimipunkter (−1, −3), (4, −128)

4059 Graf 4

4060 Lokal och global minimipunkt i (0, 0).

4061 

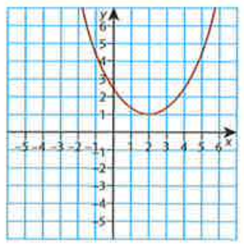
4062 Andraderivatan är noll i förstaderivatans nollställe och då kan metoden inte användas.

4063 

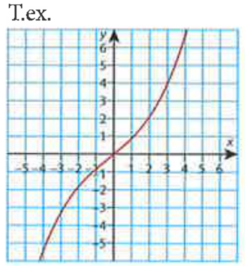
4064 a) $x > 1$ b) $x = 1$ c) $x < 1$

4065 a) Konvex för alla x. Inflexionspunkt saknas. Minimipunkt i $(2, -1)$.
b) Konkav för $x < 0$, konvex för $x > 0$. Inflexionspunkt i $(0, 0)$.
c) Konkav för $x < 1$, konvex för $x > 1$. Inflexionspunkt i $(1, -2)$.
Maximipunkt i $(0, 0)$ och minimipunkt i $(2, -4)$.

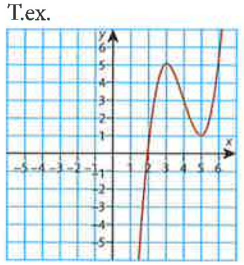
4066 T.ex.



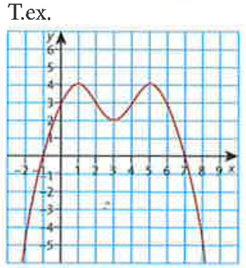
4067 T.ex.



4068 T.ex.

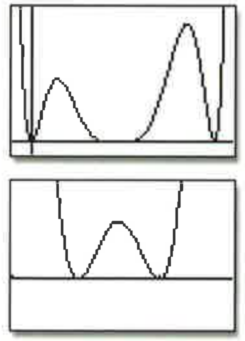


4069 T.ex.



4070 $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x^2 + 22{,}5x - 24$

GRUPPAKTIVITET *Extrempunkter och inflexionspunkter*
a) Fyra dubbla nollställen.
b) $x_1 = 0$, $x_2 = 4/9$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1$
c) Funktionen är alltid positiv. Då måste den mellan varje nollställe, som alla är minimipunkter, ha en maximipunkt. Det ger 7 extrempunkter (4 minimipunkter och 3 maximipunkter).
d) Vid en minimipunkt är funktionen konvex medan den vid en maximipunkt är konkav. Det innebär att funktionen byter konkavitet mellan varje extrempunkt. Det ger sex inflexionspunkter.
e) Vi ritar en graf för $-0{,}1 \leq x \leq 1{,}1$ och därefter en för $0{,}4 \leq x \leq 0{,}55$ för att se alla maximipunkterna.



GRUPPAKTIVITET *Extrempunkter och terrasspunkter*
$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x$
Vi deriverar funktionen och undersöker derivatan $f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$
Derivatan är en andragradsfunktion som har en minimipunkt eftersom x^2-termen är positiv. En andragradsfunktion kan ha inget, ett eller två nollställen. Saknar andragradsfunktionen nollställen så saknar tredjegradsfunktionen extrempunkter och terrasspunkter. Har andragradsfunktionen ett nollställe så har tredjegradsfunktionen en terrasspunkt.
Har andragradsfunktionen två nollställen så har tredjegradsfunktionen en maximipunkt och en minimipunkt.

$3x^2 + 2ax - a^2 = 0$

$x^2 + \frac{2a}{3}x - \frac{a^2}{3} = 0$

$x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{3}}$

$x = \frac{-a \pm 2a}{3}$

$x_1 = -a,\ x_2 = \frac{a}{3}$

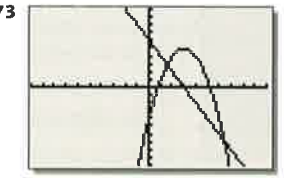
$a = 0$ ger $f(x) = x^3$ som har en terrasspunkt i $(0, 0)$
$a > 0$ ger två extrempunkter, en maximipunkt i $(-a, a^3)$ och en minimipunkt i $\left(\frac{a}{3}, -\frac{5a^3}{27}\right)$
$a < 0$ ger två extrempunkter, en maximipunkt i $\left(\frac{a}{3}, -\frac{5a^3}{27}\right)$ och en minimipunkt i $(-a, a^3)$.

UTMANING *Minimerad materialkostnad*
Förhållandet är 1:1, alltså $r = h$

4071 a) $x \leq 0$ avtagande, $x \geq 0$ växande
b) växande och avtagande för alla x
c) $x \leq 0$ och $x \geq 2$ växande, $0 \leq x \leq 2$ avtagande

4072 a) $x \leq -3$ och $x \geq -1$
b) $-3 \leq x \leq -1$
c) grad tre

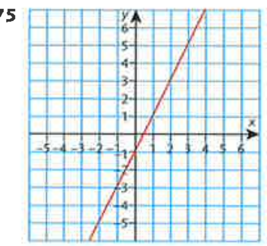
4073



x-koordinaten för maximipunkten = x-koordinaten för derivatans nollställe. Funktionen är växande för de x som derivatan är positiv. Funktionen är avtagande för de x som derivatan är negativ.

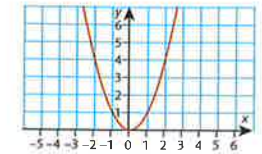
4074 A–3, B–1, C–2

4075



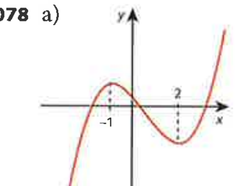
4076 1 km/min²

4077 a)



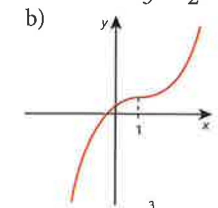
b) Ja, grafen kan vara förskjuten i x-led.
c) Andraderivatan är en konstant funktion. Förstaderivatan är då en funktion av första graden och funktionen en funktion av andra graden.

4078 a)



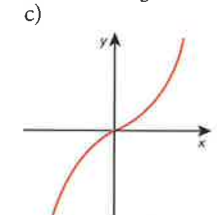
T.ex. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$

b)



T.ex. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$

c)



T.ex. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x$

4079 $f(x)$ passar till D
$g(x)$ passar till A
$h(x)$ passar till A och B
$s(x)$ passar till B
$t(x)$ passar till C
$u(x)$ passar till D

4080 a) $y' = 5e^x$
b) $y' = 5e^{5x}$
c) $y' = -3e^{-3x}$
d) $y' = -\frac{3}{e^x}$

4081 a) $y' = 0{,}5e^x$
b) $y' = 2e^{0{,}5x}$
c) $y' = -2e^{-x}$
d) $y' = 2e^{x/3}$

4082 a) $y' = 4e^x - 2x$
b) $y' = 3 + 2e^{-2x}$
c) $y' = \frac{1 - e^x}{2}$

4083 a) $f'(0) = 3$
b) $f'(0) = -0{,}6$
c) $f'(0) = -2$

4084 a) $f(0) = 1, f'(0) = 2$
b) $f(-1) = e^{-2} \approx 0{,}135$, $f'(-1) = 2e^{-2} \approx 0{,}271$
c) $f(2{,}5) = e^5 \approx 148$, $f'(2{,}5) = 2e^5 \approx 297$

4085 a) $f'(1) = 2e^2 - 1 \approx 13{,}8$
b) $f'(1) = 8 - 4e \approx -2{,}87$
c) $f'(1) = -e^{-1} - 3 \approx -3{,}37$

4086 a) $x \geq 0$
b) Funktionen är växande för alla reella x.

4087 a) $x \leq 0$
b) Funktionen är växande för alla reella x.

4088 $3 - 3\ln 3 \approx -0{,}3$

4089 a) Positiv
b) Positiv
c) Negativ

4090 $y = 2x + 2$

4091 a) $y = x + 1$
b) $y = ex$
c) $y = e^{-1}(x + 2) = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$

4092 $y'(2{,}5) \approx -8600$

4093 $y = e \cdot x$

4094 $C = 4$, $k = 0{,}5$

4095 $P'(10) \approx 7\,800$. År 2010 ökade populationen med 7 800/år.

4096 Efter 4 dygn ökade antal smittade med ca 150 per dygn.

4097 a) Passagerarantalet ökar med 16000/år efter 5 år.
b) Ökningen minskar med 3600/år per år efter 5 år.

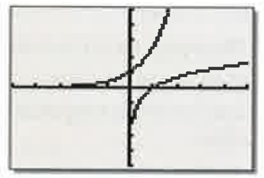
4098 a) ca 33 min
b) $-0{,}39$. Efter 10 min sjunker temperaturen med ca 0,4 °C/min

4099 a) $e^{\ln 7}$
b) $e^{\ln 0{,}5}$
c) $e^{\ln 1} = e^0$
d) $e^{\ln a}$

4100 a) 100
b) 9
c) 0,5
d) e

4101 a) $x = \ln 0{,}7$
b) $x = 2\ln 2$
c) $x = 0$
d) $x = 1$

4102



a) Definitionsmängd: Alla reella tal, Värdemängd: $y > 0$
b) Definitionsmängd: $x > 0$, Värdemängd: Alla reella tal

4103 a) 9
b) 1/6
c) 4

4104 a) $x \approx 0{,}775$
b) Saknar lösning
c) $x \approx 1{,}68$

4105 a) $x = \frac{e}{e - 1}$
b) $x_1 = -2, x_2 = -4$
c) $x = \ln 2$

4106 $(\ln 0{,}5, (1 - \ln 0{,}5)) = (-\ln 2, (1 + \ln 2))$

4107 a) $y' = \ln 2 \cdot 2^x$
b) $y' = \ln 10 \cdot 10^x$
c) $y' = 2\ln 5 \cdot 5^x$
d) $y' = 5\ln 2 \cdot 2^{5x}$

4108 a) $f'(1) = 3\ln 3$
b) $f'(1) = 8e^2 + 2$

4109 a) Positiv, eftersom $f'(x) = \ln 4 \cdot 4^x > 0$ för alla x-värden.
b) Negativ, eftersom $f'(x) = \ln 0{,}4 \cdot 0{,}4^x < 0$ för alla x-värden.
c) Positiv, eftersom $f'(x) = \ln 4 \cdot 4^{0{,}4x} > 0$ för alla x-värden.
d) Negativ, eftersom $f'(x) = -\ln 4 \cdot 4^{-x} < 0$ för alla x-värden.

4110 a) $y' = -\ln 5 \cdot 5^{-x}$
b) $y' = 2000\ln 1{,}05 \cdot 1{,}05^{x}$
c) $y' = 6\ln 2 \cdot 2^{2x}$
d) $y' = -4\ln 4 \cdot 4^{-2x} - 3e^{-x}$

4111 $h'(t) = a \cdot t^{a-1} - \ln a \cdot a^{t}$

4112 ca 11 mg/h

4113 a) $y = \ln 2 \cdot x + 1$
b) $y = 2\ln 2 \cdot x + 2 - 2\ln 2$

4114 $a = e^{5}$

4115 T.ex. $f(x) = 40 \cdot 2^{-0{,}2x}$

4116 $a = 2 - \frac{1}{\ln 2}$, $b = 0$

4117 Minimipunkt i (1,5;–0,17)

4118 $f'(4) \approx 150$. Efter 4 dygn ökar antal smittade med ca 150 per dygn.

4119 a) $N(24) \approx 6{,}7 \cdot 10^{6}$. Efter 24 timmar är antalet vita blodkroppar ca $6{,}7 \cdot 10^{6}$.
b) $N'(24) \approx 2{,}0 \cdot 10^{6}$. Efter 24 timmar ökar antalet vita blodkroppar med ca $2{,}0 \cdot 10^{6}$ blodkroppar/timme.

4120 a) 10 000
b) 17 dygn
c) Efter ca 35 dygn.

4121 a) $1{,}6 \cdot 10^{6}$ st
b) 1 100 bakterier/min
c) 220 bakterier/min (217 bakterier/min)

4122 a) 0,6 µg/m^3
b) 0,1 µg/m^3
c) Under det 19:e dygnet.

4123 a) Bestäm kapitaltillväxten det 6:e året.
b) $K'(6) \approx 26\,000$ kr. Det 6:e året är kapitaltillväxten ca 26 000 kr.

4124 a) $k = \frac{\ln 4}{7} \approx 0{,}2$
b) 1 000 celler/h
c) Efter ca 8 h.

4125 a) $P(t) = 1000 \cdot 1{,}023^{t}$
b) $P'(7) = 1000 \cdot \ln 1{,}023 \cdot 1{,}023^{7} \approx 27$. Efter 7 dagar ökar antalet insekter med 27 insekter/dag.

4126 1E, 2D, 3F, 4B, 5A, 6C

4127 a) $C = 80$, $k = \frac{\ln 0{,}625}{5} \approx -0{,}094$
b) Efter ca 21 minuter.

GRUPPAKTIVITET *Tankbilsolyckan*

- 100 dygn
- 1. $a = 0{,}7$ och $b = 0{,}1$ ger maximipunkten (7,0; 1,9).
$a = 0{,}7$och $b = 0{,}4$ ger maximipunkten (1,8; 0,73).
$a = 1{,}1$och $b = 0{,}1$ ger maximipunkten (11; 4,7).
$a = 1{,}1$och $b = 0{,}4$ ger maximipunkten (2,8; 1,0).
Ett högt värde på a och ett lågt värde på b ger högsta oljekoncentrationen, men efter längst tid. Ett lågt värde på a och ett högt värde på b ger en maximipunkt efter kortast tid.
2. $a = 0{,}7$och $b = 0{,}1 \Rightarrow$ vattnet kan användas som dricksvatten efter ca 126 dygn.
$a = 0{,}7$och $b = 0{,}4 \Rightarrow$ vattnet kan användas som dricksvatten efter ca 35 dygn.
$a = 1{,}1$och $b = 0{,}1 \Rightarrow$ vattnet kan användas som dricksvatten efter ca 126 dygn.
$a = 1{,}1$och $b = 0{,}4 \Rightarrow$ vattnet kan användas som dricksvatten efter ca 40 dygn.
Ett högre värde på b medför att vattnet kan användas som dricksvatten efter kortast tid.
- Om värdet på b är lågt kan inte vattnet användas som dricksvatten förrän efter 126 dygn.
- I den andra modellen ser man att faktorer såsom temperatur, strömförhållande och vatten djup har stor betydelse. Dessa faktorer kan ändras under tiden eftersom tiden för att kunna använda vattnet kan variera mellan 35 och 126 dygn. Det är därför svårt att göra en prognos för när vattnet ska kunna användas igen som dricksvatten.

I den första modellen vet man inte vilka faktorer konsultfirman tagit hänsyn till.

TEST 4.1

1 a) (–1, –2) och (1, 2)
b) positivt
c) växande

2 a) avtagande för $x \le -1$, växande för $x \ge -1$
b) växande för $x \le 1{,}5$, avtagande för $x \ge 1{,}5$
c) växande för $x \le -2$ och $x \ge 2$, avtagande för $-2 \le x \le 2$

3 maximipunkt i (1, 5), minimipunkt i (2, 4)

4 global och lokal minimipunkt: (–3, –2), lokal minimipunkt: (1, 1), global och lokal maximipunkt i (–1, 3)

5 a) största värde: 1, minsta värde: saknas
b) största värde: 3, minsta värde: –1

6 10 och –10

7 15 000 m^2

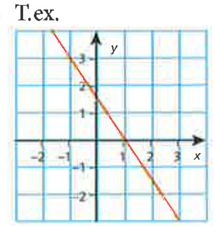
8 a) $K'(150) = 100$ kr/enhet, $I'(150) = 64$ kr/enhet.
b) Det lönar sig inte att öka produktionen eftersom $K'(150) > I'(150)$.

TEST 4.2

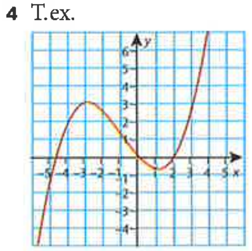
1 $-1 \le x \le 3$

2 Funktionen är växande för $x \le -0{,}5$ och $x \ge 2$, avtagande för $-0{,}5 \le x \le 2$, har en maximipunkt för $x = -0{,}5$ och en minimipunkt för $x = 2$

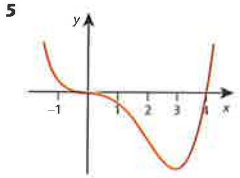
3 T.ex.



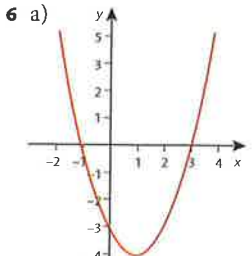
4 T.ex.



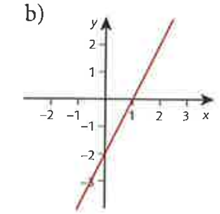
5



6 a)

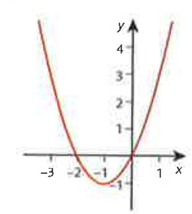


b)



7 $(x - b)^2 \ge 0$ för alla x. Funktionen f avtagande då $x \le a$

8 T.ex.



TEST 4.3

1 a) $f'(x) = 10e^{10x}$
b) $f'(x) = 12 \cdot e^{-4x}$
c) $f'(x) = 3 \cdot \ln 5 \cdot 5^{3x}$

2 a) 2 b) 1,5 c) 1

3 $y = 2x - 6{,}5$

4 a) 80 °C
b) Med vilken hastighet minskar kaffets temperatur vid tiden 2 timmar?
c) Kaffets temperatur minskar med 3,7 °C/h vid tiden 2 timmar.
d) Efter hur lång tid är kaffets temperatur 60 °C?
e) Efter ca 5,6 timmar är kaffets temperatur 60 °C.

5 $y = (4\ln 2)x + 4 - 8\ln 2$

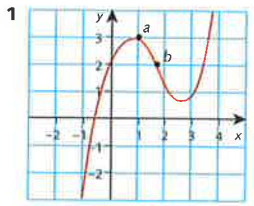
6 a) 10 000 st
b) ca 1 800 bakterier/h
c) Efter ca 23 h.

7 a) $P'(0{,}1) \approx -58$ mm Hg/s
b) Trycket sjunker med 58 mm Hg/s vid tiden 0,1 s.

8 Bakterietillväxten är ca 7 900 bakterier/h efter 10 h.

BLANDADE ÖVNINGAR

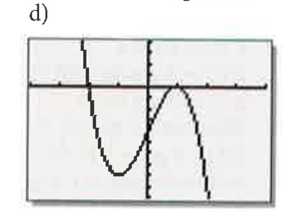
1



2 a) $f'(-1) < 0$ b) $f'(0) = 0$
c) $f'(1) > 0$ d) $f'(2) = 0$
e) $f'(3) < 0$

3 2

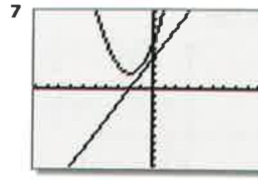
4 a) $f'(2) = -18$. Kurvans lutning i punkten (2, –8) är –18.
b) $x = \pm 1$
c) När $f'(x) = 0$ har funktionen en extrempunkt eller en terrasspunkt. Genom att undersöka derivatans teckenväxling kring dess nollställen får man veta om funktionen har maximipunkt, minimipunkt eller terrasspunkt. Sammanställer man resultatet i ett teckenschema får man en bild av funktionens utseende som man kan ha som underlag när man ritar grafen.
d)



5 a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$
b) + 0 –

6 Maximipunkt i (0, 3), minimipunkt i (2, –13)

7



x-koordinaten för minimipunkten = x-koordinaten för derivatans nollställe. Funktionen är växande för de x som derivatan är positiv. Funktionen är avtagande för de x som derivatan är negativ.

8 a) T.ex. $y = x$ b) $k = 1$

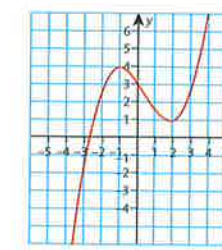
9 I punkten (1, 5) har grafen lutningen –1.

10 –6,75

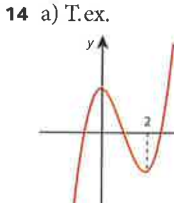
11 a) största värde: 5, minsta värde: saknas
b) största värde: 16, minsta värde: –16
c) största värde: 56, minsta värde: –56
d) största värde: 17, minsta värde: 12

12 a) $x \le 2$ b) maximipunkt

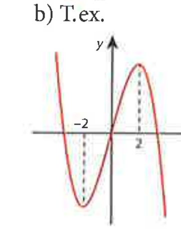
13 T.ex.



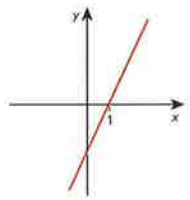
14 a) T.ex.



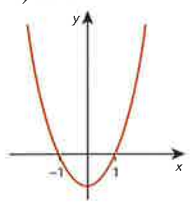
b) T.ex.



15 a) T.ex.



b) T.ex.



16 A och C

17 a) Kvadrater med sidan 1,0 dm
b) 18 dm^3

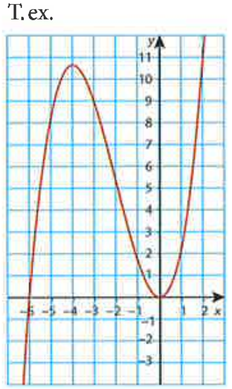
18 1000 π cm^3

19 1

20 a) $x = 11$
b) Längsta sidan = y
$225x + 75 \cdot 2y + 75x = 6600$
$75(3x + 2y + x) = 6600$
$4x + 2y = 88$
$y = 44 - 2x$
$A(x) = x \cdot y = x \cdot (44 - 2x) =$
$= 44x - 2x^2$

21 Efter 100 m

22 T.ex.



23 $p : C, q : A, r : D$ och $s : B$

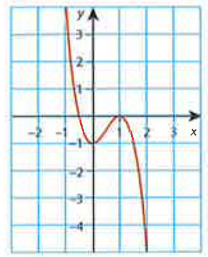
24 $y = 3x + 2$

25 a) $A(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$
b) $0 < x < 3$ c) $\frac{2}{3}$ cm^2

26 $f(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 6$

27 För att grafen till funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ ska ha en lokal minimipunkt på den negativa y-axeln måste $b = 0$ och $c < 0$.

- Andragradsfunktion vars graf har lokalt maximum i (1, 0):
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$
$f'(1) = 0$ ger $2a + b = 0$
$f''(x) = 2a$ ger $a < 0$ eftersom
$f''(1) < 0$
$b = -2a$ ger $b > 0$
$f(1) = 0$ ger $a + b + c = 0$
$b = -2a$ ger $a = c < 0$.
T.ex. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- Tredjegradsfunktion vars graf har lokalt minimum på y-axeln och lokalt maximum i punkten (1, 0):
$f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$



- För att grafen till $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ska ha ett lokalt minimum på y-axeln och ett lokalt maximum i punkten (1, 0) måste följande gälla:
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f'(0) = 0$ ger $c = 0$
$f'(1) = 0$ ger $3a + 2b = 0$
$b = -1{,}5a$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f''(0) > 0$ ger $b > 0$
$f''(1) < 1$ ger $6a + 2b < 0$
$a < -b/3$ ger $a < 0$
eftersom $b > 0$
$f(1) = 0$ ger $a + b + c + d = 0$
och insättning av $c = 0$ och
$b = -1{,}5a$ ger $d = 0{,}5a$
Villkoren för att grafen till $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ska ha ett lokalt minimum på y-axeln och ett lokalt maximum i punkten (1, 0) är:
$a < 0, b > 0, c = 0, d = 0{,}5a$
och $b = -1{,}5a$.

5 PRIMITIVA FUNKTIONER OCH ENKLA INTEGRALER

5001 a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
b) $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$
c) $F(x) = \frac{x^{11}}{11} + C$
d) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5002 a) $F(x) = -\frac{x^{-4}}{4} + C$
b) $F(x) = -\frac{1}{x} + C$
c) $F(x) = 10x + C$
d) $F(x) = C$

5003 a) $F(x) = x^2 + C$
b) $F(x) = x^5 + C$
c) $F(x) = x + C$
d) $F(x) = x^3 + C$

5004 a) $F(x) = \frac{3x^2}{2} + C$
b) $F(x) = \frac{x}{3} + C$
c) $F(x) = \frac{x^4}{16} + C$
d) $F(x) = -\frac{3}{x} + C$

5005 a) $F(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 5x + C$
b) $F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + C$
c) $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

5006 a) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
b) $F(x) = 4\sqrt{x} + C$
c) $F(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{5} + C$

5007 a) T.ex. $f(x) = \frac{25x^3}{3} - 5x^2 + x$
b) T.ex. $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2}$

5008 a) T.ex. $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$
b) T.ex. $F(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$

5009 Funktionen g. x-koordinaterna för funktionen g:s extrempunkter är nollställen till funktionen f.

5010 a) $F(x) = x + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$
b) $F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$
c) $F(x) = \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x} + C$

5011 a) $F(x) = \frac{e^{5x}}{5} + C$
b) $F(x) = \frac{e^{10x}}{10} + C$

5012 a) T.ex. $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$
b) T.ex. $F(x) = \frac{10^x}{\ln 10}$

5013 a) $F(x) = 3e^x + C$
b) $F(x) = \frac{2e^{3x}}{3} + C$
c) $F(x) = -e^{-x} + C$
d) $F(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} + C$

5014 a) T.ex. $F(x) = -\frac{e^{-4x}}{4} + x$
b) T.ex. $F(x) = x^2 - \frac{8^x}{\ln 8}$

5015 a) $F(x) = e^3x + C$
b) $F(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + C$
c) $F(x) = -\frac{e^{-5x}}{5} + C$
d) $F(x) = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$

5016 a) $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}x^2 + C$
b) $F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{x^6}{6} + C$
c) $F(x) = -\frac{2}{e^x} - 2x + C$
d) $F(x) = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^2}{2} + C$

5017 a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{7e^{5x}}{5} - \frac{4}{x} + C$
b) $F(x) = -\frac{e^{5-2x}}{2} + C$

5018 T.ex. $F(x) = 1{,}6e^{2{,}5x} + 2x^2 + 5x$

5019 $F(x) = \frac{2 \cdot 5^{3x}}{3\ln 5} + C$

5020 h är primitiv funktion till f eftersom den är mindre brant än f. Nämnaren för funktionsuttrycket för h är större än för f.

5021 $F(x) = x - \frac{1}{e^x} + C = \frac{xe^x - 1}{e^x} + C$

5022 a) $F(x) = e^{x+1} + C$
b) $F(x) = \frac{4^{x+1}}{\ln 4} + C$
c) $F(x) = 4^3x + C$
d) $F(x) = -\frac{1}{2e^{2x-3}} + C$

5023 a) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^{1+x} + e^2x$
b) $F(x) = -\frac{2}{3\ln 2 \cdot 2^x} - \frac{x^4}{12}$

5024 a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$
b) $F(x) = 2x^3 + x - 1$
c) $F(x) = \frac{e^{2x} - x^2 + 5}{2}$
d) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - \frac{28}{3}$

5025 $f(x) = x^3 - x^2 + e^{-x} + 1$

5026 7

5027 a) $v(10) = 45$ m/s
b) $s(10) = 250$ m

5028 a) $y = x + x^2 - 3$
b) $F(x) = \frac{x^2}{2} - e^{-x} + 2$
c) $F(x) = \frac{e^{0{,}008x}}{0{,}008} - 125 =$
$= 125\,e^{0{,}008x} - 125$
d) $y = 2\sqrt{x} - 4$

5029 1 475 personer

5030 $K(x) = 0{,}012x^2 + 14x + 7\,500$

5031 $a = 1{,}4$

5032 a) $\int_0^2 (0{,}5x^2 + 2)\,dx$
b) $\int_{-2}^1 e^{-x}\,dx$

5033 a) 9
b) 1,5
c) 4
d) 2

5034 4 a.e.

5035 11,5

5036 a) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$
b) $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

5037 $16 - \int_0^4 (0{,}5x^2)\,dx$

5038 a) $0{,}5 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$
b) $8 - \int_0^2 x^2\,dx$

5039 a) 1
b) $-\frac{2}{3}$
c) $\frac{10}{3}$

5040 -2

5041 a) $\frac{e^5 - 1}{5}$
b) 2
c) $\frac{5}{4} = 1{,}25$

5042 -1

5043 a) $\frac{56}{3}$ b) $2 - e$
c) $\frac{14}{3}$

5044 $a_1 = -4, a_2 = 2$

5045 -5

5046 a) $\frac{14}{3}$ b) 2 c) $\frac{2}{5}$

5047 1

5048 $k = 3$

5049 a) $2 - \frac{1}{e} - e$ b) $\frac{3}{2\ln 2}$
c) $\frac{5}{2}$

5050 3

GRUPPAKTIVITET *Räkneregler för integraler*

1. Likheten gäller om $a < c < b$.
2. Likheten gäller.
3. $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$
4. Likheten gäller om k är en konstant.
5. $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$
$\int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$
$= -(F(a) - F(b)) = -\int_a^b f(x)\,dx$

UTMANING *Minsta värde för en integral*

$a=-\frac{1}{2}$

5051 300 m

5052 a) $s(t)=\int_0^2 (25+2{,}5t)\,dt$
b) 55 meter

5053 11 °C

5054 På 1 h minskar vattenvolymen med 5 liter.

5055 1 400 bakterier

5056 a) Efter 2,5 h
b) 2 200 m^3 strömmar in i hamnen under de fyra första timmarna.

5057 Sjunker ca 25 °C

5058 Efter 5 dagar.

5059 Energiförbrukningen från kl. 8 till kl. 16 är 40 kWh.

5060 0,58 cm^3

5061 Ökningen av antalet invånare under 45 år.

5062 150 insekter

5063 ca 93 meter

UTMANING *Gränsvärde*

Arean $=\dfrac{a^{1-p}-1}{1-p}=\dfrac{\frac{a}{a^p}-1}{1-p}\rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{0-1}{1-p}=-\dfrac{1}{1-p}$ då $a\rightarrow\infty$

TEST 5.1

1 a) $F(x)=2x^2+C$
b) $F(x)=\frac{3x^4}{4}+C$
c) $F(x)=-2e^{-x}+C$

2 a) $f(x)=2x+C$
b) $f(x)=-\frac{2}{x}+C$
c) $f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$

3 a) $F(x)=\frac{2x^3}{3}+5x+4$
b) $F(x)=\frac{3x^2-e^{-2x}+3}{2}$

4 a) 10 m/s
b) 15 meter

5 $F(4)=8$

6 $y=x^3-x^2-1$

7 $b=-\frac{1}{3}$

8 $F(t)=125000\cdot e^{0{,}05t}$

TEST 5.2, 5.3

1 a) $-\frac{2}{3}$
b) $2-0{,}5e^2$

2 6

3 a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{2(5\sqrt{5}-1)}{3}\approx 6{,}79$
c) $\sqrt{3}-1\approx 0{,}732$

4 $\frac{e^{2x}-3x^2}{2}+C$

5 Största värde saknas och minsta värde är -9.

6 Mellan 2 och 5 sekunder förändras hastigheten med 20 m/s.

7 $h(t)=\frac{2t\sqrt{t}}{3}-\frac{t^2}{4}+0{,}10$

8 3 200 laxar

BLANDADE ÖVNINGAR

1 a) $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$
b) $F(x)=\frac{e^{3x}}{3}+C$
c) $F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}+C$

2 $F(x)=x^3+x^2-5x+6$

3 a) 1,5
b) 4
c) 0,01

4 $\int_1^2 x(x+2)\,dx=\int_1^2 (x^2+2x)\,dx=$
$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}-1=\frac{16}{3}$

5 $\frac{15}{16}$

6 4 500 bakterier

7 $F(x)=2x^4-x^2+2x+1$

8 $\frac{1-e^{-2}}{2}$

9 $\frac{62}{3}$

10 72 liter

11 $-\frac{e^{-3x}}{3}+C$

12 $y=2x^2-5x-32$

13 $a=2$

14 $\frac{20x}{3}$

15 4

16 19 200 personer

17 ca 450 smådelar

18 a) $\int f'(t)\,dt=2{,}3t+4{,}8\cdot e^{-0{,}25t}+C$
b) $1{,}6\cdot 10^7$ m^3

19 a) A: Stenen träffar vattenytan och har då hastigheten 5 m/s.
B: Kulan sjunker med hastigheten 3,0 m/s. Hastigheten avtar.
C: Efter 3 s nås gränshastigheten 1,0 m/s.
D: Kulan slår i botten.
b) 1,25 m
c) 4,84 m

20
- Om $n=2$ blir kvoten $\frac{A}{B}=\frac{c}{3}$

$A=\int_0^c x^2\,dx=\frac{c^3}{3}$

$B=c^2$

$\frac{A}{B}=\frac{\frac{c^3}{3}}{c^2}=\frac{c}{3}$

- Om $c=1$ blir kvoten $\frac{A}{B}=1$.

$A=\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=1$

$B=1$

$\frac{A}{B}=1$

- Alla värden på c och n:

$A=\int_0^c x^n\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^c=\frac{c^{n+1}}{n+1}$

$B=c^2$

$\frac{A}{B}=\frac{\frac{c^{n+1}}{n+1}}{c^2}=\frac{c^{n+1}}{(n+1)\cdot c^2}=\frac{c^{n-1}}{n+1}$