

## INNEHÅLL

### ❶ Funktioner och gränsvärden 8

Inledning, 9

#### 1.1 Polynom 10

Några grundläggande polynom, 10

Räknelagar för polynom, 18

Egenskaper hos polynom, 20

Antal nollställen och lokala extrempunkter hos polynom, 24

Nollställen till faktorerade polynom, 27

Nollställen till polynom av högre grad, 29

Att bestämma polynom, 31

#### 1.2 Absolutbelopp 35

#### 1.3 Rationella uttryck 41

Förenkling av rationella uttryck, 41

Lösning av rationella ekvationer, 45

#### 1.4 Diskreta och kontinuerliga funktioner samt gränsvärden 48

Diskreta och kontinuerliga funktioner, 48

Gränsvärden, 51

Gränsvärde av typen "0/0", 52

#### 1.5 Problemlösning 57

### ❷ Derivata 66

Inledning, 67

#### 2.1 Ändringskvot 68

#### 2.2 Derivata 73

Grafisk tolkning av derivata, 73

Uppskattning av derivata med symmetrisk ändringskvot, 77

Funktionen  $y = kx + m$ , 79

Analys av en kulas rörelse, 82

Derivatans definition, 84

#### 2.3 Deriveringsregler för potensfunktioner 87

Deriveringsregel för potensfunktioner med positiv heltalsexponent, 87

Deriveringsregler för summor av funktioner, 90

Deriveringsregel för potensfunktioner, 93

Andra beteckningar för derivata, 97

Derivata med digitala verktyg, 99

#### 2.4 Tangenter 101

Tangent och derivata, 101

Tangentens ekvation, 104

Problemlösning, 107

### ❸ Användning av derivata 118

Inledning, 119

#### 3.1 Extremvärdesproblem 120

Växande och avtagande funktioner, 120

Lokala extrempunkter, 124

Största och minsta värde, 128

Tillämpningar, 131

Andraderivata, 135

Extrempunktsbestämning med andraderivata, 136

Andraderivatan och konkavitet, 138

#### 3.2 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata 142

Derivatans graf, 142

#### 3.3 Deriveringsregler för exponentialfunktioner 149

Derivata av exponentialfunktioner och talet  $e$ , 149

Talet  $e$  och den naturliga logaritmen, 153

Derivatans av  $a^x$ , 155

Naturvetenskapliga tillämpningar, 157

### ❹ Primitiva funktioner och enkla integraler 170

Inledning, 171

#### 4.1 Primitiva funktioner 172

Primitiva funktioner med villkor, 177

#### 4.2 Integraler 179

Samband mellan integral och derivata, 183

Beräkning av bestämda integraler med primitiva funktioner, 184

#### 4.3 Beräkning av integraler med digitala verktyg 187

#### 4.4 Tillämpningar och problemlösning 189

### ❺ Trigonometri 196

Trigonometri i olika sammanhang, 197

#### 5.1 Trigonometriska grundbegrepp 198

#### 5.2 Cirkelns ekvation och enhetscirkeln 202

Cirkelns ekvation, 202

Enhetscirkeln och trigonometri, 205

Vinklar på enhetscirkeln, 209

Samband mellan trigonometriska värden i de fyra kvadranterna, 213

Trigonometriska ekvationer, 217

#### 5.3 Triangelsatser 221

Areasatsen, 222

Sinussatsen, 224

Mer om sinussatsen, 227

Cosinussatsen, 230

#### 5.4 Problemlösning 234

Tips 244

Lösningar 246

Facit 252

# Funktioner och gränsvärden

## Centralt innehåll

- Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp, såväl med som utan symbolhanterande verktyg.
- Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad
- Begreppet absolutbelopp
- Orientering när det gäller kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde

## Inledning

En stor del av kurs 3c handlar om att med olika hjälpmedel studera och förstå funktioner. Ibland är vi intresserade av att veta om funktioner växer eller avtar och hur snabbt dessa förändringar i så fall sker. I andra sammanhang kan vi söka efter optimala värden. Med det menar vi exempelvis värden hos en variabel som ger ett så stort eller så litet värde som möjligt hos en funktion. Detta kan till exempel användas för att bestämma hur en förpackning ska utformas för att få en given volym med så lite material som möjligt. Inom ekonomi kan det vara intressant att avgöra hur priset på en produkt påverkar försäljningen och därmed inkomsterna och beräkna det pris som ger den största inkomsten.

För att underlätta förståelsen av sådana problemställningar inleds boken med ett kapitel där sambandet mellan funktioners uttryck och egenskaper undersöks. Vilka faktorer påverkar funktionernas egenskaper och på vilket sätt? Vi studerar även hur aritmetikens lagar används för att hantera funktioner och lösa ekvationer samt begreppet gränsvärde, som vi återkommer till i kapitel 2.

## Din första uppgift

Rita följande grafer med hjälp av räknare eller dator. Besvara därefter frågorna som följer.

A:  $y = x + 1$       B:  $y = x^2 - 1$       C:  $y = x^3 - 3x - 1$       D:  $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

Hur många nollställen har graferna A–D?

Hur många extrempunkter har graferna A–D?

Hur många gånger byter graferna A–D riktning?

Sammanfatta dina svar i en tabell med tabellhuvud enligt figuren:

| Exponent med<br>högst värde | Antal<br>nollställen | Antal extrem-<br>punkter | Antal riktnings-<br>ändringar |
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|-------------------------------|
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|-------------------------------|

Formulera dina slutsatser i ord.

De slutsatser du förhoppningsvis kommit fram till är maximalt tänkbara värden. För fallen B–D kan slutsatserna delvis se annorlunda om funktionsuttrycken ges ett annat utseende. Du får möjlighet att undersöka den här typen av funktioner mer i detta kapitel.

## 1.1 Polynom



Teorigenomgång  
Simulering

Ett polynom består av minst en term. De enklaste polynomen innehåller bara en konstant. Exempelvis är  $f(x) = 0$  ett polynom, det så kallade **nollpolynomet**. Om det ingår variabler får dessa endast upphöjas till positiva heltal, som exempelvis i polynomet  $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ .

Här följer några exempel på polynom och några funktioner som inte är polynom. Gemensamt för polynomen är att variablerna bara är upphöjda till naturliga tal  $(0, 1, 2, \dots)$ .

| Polynom                      | Inte polynom                 |
|------------------------------|------------------------------|
| $p_1(x) = -5x^4$             | $f_1(x) = 4x^{1.5} - 3x + 2$ |
| $p_2(x) = 4x^2 - 2.5x + \pi$ | $f_2(x) = 5x^{-1}$           |
| $p_3(x) = 2x + 3$            | $f_3(x) = \sqrt{x}$          |
| $p_4(x) = -6$                | $f_4(x) = 3^x$               |

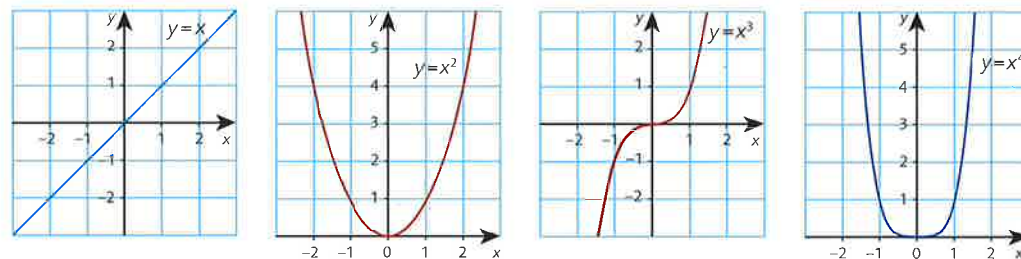
Den högsta exponenten som förekommer till variabeln  $x$  i ett polynom  $p(x)$  avgör polynomets **grad**. Polynomen  $p_1 - p_4$  i den vänstra kolumnen har gradtalen fyra, tre, ett respektive noll. Nollpolynomet,  $p(x) = 0$ , saknar grad av skäl som vi återkommer till.

ETT POLYNOM AV GRAD  $n$  KAN SKRIVAS

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ,  
där  $n$  är ett naturligt tal,  $a_n \neq 0$  och alla koefficienter är reella tal.

### Några grundläggande polynom

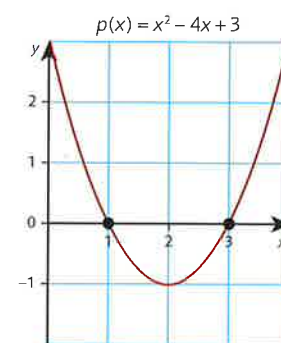
Följande figurer kan illustrera viktiga egenskaper hos några enkla polynom med endast en term vardera. Funktionerna  $y = x$  och  $y = x^3$  är **växande** medan  $y = x^2$  och  $y = x^4$  både avtar och växer och har **lokala minimipunkter** i origo.



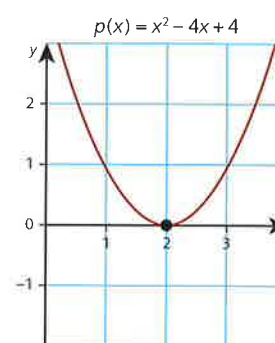
Figurerna visar i tur och ordning en **proportionalitet**, en **parabel**, en **tredjegrads-** och en **fjärdegradskurva**.

Det kan också vara viktigt att avgöra om ett polynom har ett eller flera **nollställen**. Med ett nollställe till ett polynom  $p(x)$  menas ett  $x$ -värde, där polynomets graf skär  $x$ -axeln. Algebraiskt kan nollställen bestämmas genom att lösa ekvationen  $p(x) = 0$ .

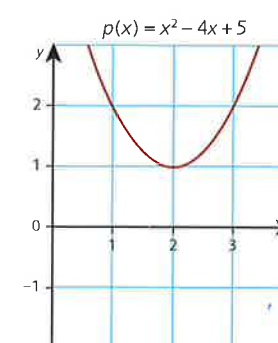
Studera graferna till de tre polynomen av grad två nedan och jämför med lösningarna av ekvationerna  $p(x) = 0$ .



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \\ x &= 2 \pm \sqrt{1} \\ x &= 2 \pm 1 \\ \begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4} \\ x &= 2 \pm \sqrt{0} \\ x &= 2 \pm 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 5} \\ x &= 2 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ekvationen saknar reella rötter.

De tre exemplen visar att polynom av grad två kan ha två, ett eller inget nollställe. Dessa tre polynom har en gemensam egenskap, de har alla en **lokal minimipunkt** som ligger på grafens symmetrilinje,  $x = 2$ . Dessa extrempunkter är  $(2, -1)$ ,  $(2, 0)$  respektive  $(2, 1)$ . En extrempunkt hos en graf till ett polynom av grad två ligger alltid på symmetrilinjen. Om koefficienten framför  $x^2$ -termen är negativ, är extrempunkten istället en **lokal maximipunkt**.

### Algebraisk lösning av potensekvation

Lös ekvationerna

a)  $4x^2 = 196$       b)  $x^7 = 777$       c)  $3x^4 = 48$

**LÖSNING:**

a)  $4x^2 = 196$   
 $x^2 = 49$   
 $x = \pm \sqrt{49}$   
 $x = \pm 7$

Dividera båda leden med 4.

Ta kvadratroten ur båda leden. Glöm inte den negativa lösningen.

Förenkla.

$$\begin{aligned} \text{b) } x^7 &= 777 \\ (x^7)^{\frac{1}{7}} &= 777^{\frac{1}{7}} \\ x &= 777^{\frac{1}{7}} \\ x &\approx 2,59 \end{aligned}$$

Upphöj båda leden till  $\frac{1}{7}$ .

Förenkla vänsterledet.

Beräkna ett närmevärde med räknaren.

Det finns ett alternativt sätt att skriva  $777^{\frac{1}{7}}$  som visas nedan.

$$x^7 = 777$$

Lösningen fås genom att ta sjunde roten ur 777.

$$x = \sqrt[7]{777}$$

$$x \approx 2,59$$

Skriv 7 Math  $\sqrt[7]{777}$  eller motsvarande på din räknare.

$$\text{c) } 3x^4 = 48$$

Dividera båda leden med 3.

$$x^4 = 16$$

Upphöj båda leden till  $\frac{1}{4}$ . Observera att det också finns en negativ lösning då exponenten är ett jämnt tal.

$$(x^4)^{\frac{1}{4}} = \pm 16^{\frac{1}{4}}$$

Förenkla vänsterledet och beräkna högerledet.

$$x = \pm 2$$

**SVAR:** a)  $x = \pm 7$    b)  $x = 777^{\frac{1}{7}} \approx 2,59$    c)  $x = \pm 2$

### Användning av grafiska metoder och CAS-verktyget

Då kroppar utstrålar värme finns det ett samband mellan kroppens temperatur  $T$  och den utstrålade effekten  $P$ . Enligt Stefan-Boltzmanns lag gäller följande för utstrålad effekt  $P$  per areaenhet  $A$ :

$$\frac{P}{A} = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$$

Formeln förutsätter att effekten anges i W (watt), arean i  $\text{m}^2$  och temperaturen i K (Kelvin).

Sambandet mellan temperaturen  $T_1$  Kelvin och  $T_2$  °C ges av  $T_1 \approx T_2 + 273$ .

a) En rund spisplatta med diametern 18,5 cm utstrålar effekten 1500 W. Hur varm är plattan?

b) En annan rund spisplatta på 1200 W har temperaturen 1 050 K. Bestäm plattans diameter.



### LÖSNING:

Vi löser uppgift a) grafiskt och uppgift b) med CAS-verktyget i GeoGebra.

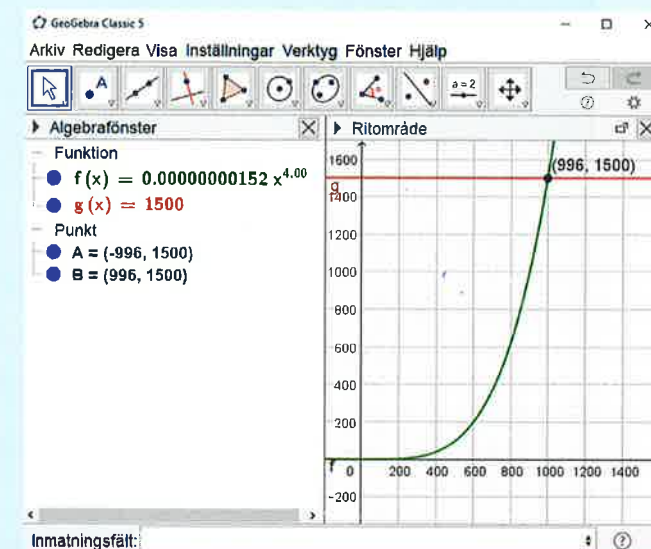
a) Vi löser först ut  $P$  ur formeln:  $P = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot A \cdot T^4$

Eftersom arean hos en cirkel ges av  $A = \pi \cdot r^2$  och  $r = \frac{d}{2} = \frac{0,185}{2} \text{ m} = 0,0925 \text{ m}$  får vi att

$$P = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 0,0925^2 \cdot T^4$$

Vi skriver in funktionen tillsammans med villkoret  $P = 1\,500$  i GeoGebra och väljer inställningen 3 gällande siffror. GeoGebra bestämmer automatiskt ett närmevärde till produkten i formeln som föregår  $T^4$ . Därefter väljer vi skärningspunkt mellan två objekt.

Avläsning ger  $T = 996$ .

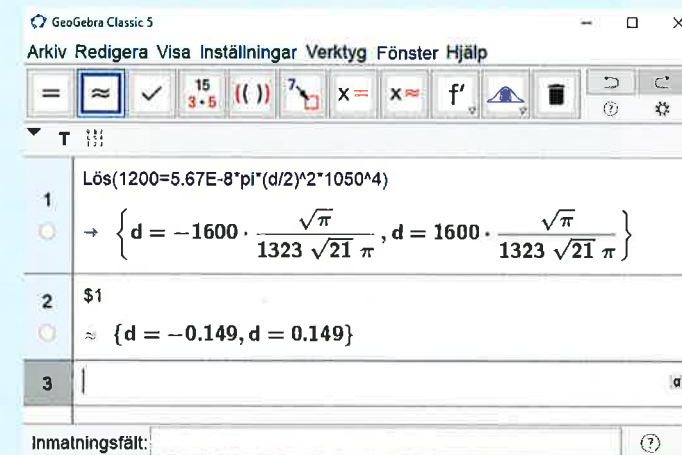


b) Vi väljer **Visa CAS**. Eftersom  $P = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot T^4$  skriver vi in ekvationen

$1200 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 1050^4$  på det sättet som visas i figuren. Efter att ha valt symbolen  $\approx$  får vi svaret som ett närmevärde i m.

Avläsning ger  $d = 0,149$ .

**SVAR:** a)  $T = 996 \text{ K}$   
b)  $d = 0,149 \text{ m}$



**Bestämning av lokal extrempunkt och nollställen med pq-formeln**

Bestäm nollställen och den lokala extrempunkten för polynomet  $p(x) = 2x^2 + 8x - 10$ .

Avgör också om den lokala extrempunkten är ett lokalt maximum eller minimum.

**LÖSNING:**

Använd pq-formeln för att lösa ekvationen  $p(x) = 0$ .

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$$

$$x = -2 \pm 3$$

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Det innebär att symmetrilinjen ges av  $x = -2$ .

Insättning av  $x = -2$  i  $p(x) = 2x^2 + 8x - 10$  ger

$$p(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) - 10 = -18$$

Eftersom koefficienten framför  $x^2$ -termen är positiv, är det ett lokalt minimum.

**SVAR:** Polynomet har nollställen  $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$  och ett lokalt minimum i punkten  $(-2, -18)$ .

**Bestämning av lokal extrempunkt genom kvadratkomplettering**

Bestäm den lokala extrempunkten för polynomet  $p(x) = -3x^2 + 6x - 9$ .

Avgör också om det är ett lokalt maximum eller minimum.

**LÖSNING:**

Faktorisera först genom att bryta ut värdet  $-3$ .

$$p(x) = -3x^2 + 6x - 9 = -3(x^2 - 2x + 3)$$

Kvadratkomplettera  $x^2 - 2x + 3$  genom att utnyttja att  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$  (kvadreringsregeln).

$$p(x) = -3(x^2 - 2x + 3) = -3(x^2 - 2x + 1 + 2) = -3((x - 1)^2 + 2) = -3(x - 1)^2 - 6$$

Eftersom kvadratuttryck som  $(x - 1)^2$  inte kan vara negativa måste det, oavsett värde på  $x$ , gälla att  $-3(x - 1)^2 \leq 0$

Polynomets maximivärde är därför  $-6$  och det inträffar då

$$-3(x - 1)^2 = 0, \text{ dvs. då } x = 1$$

**SVAR:** Polynomet har ett lokalt maximum i punkten  $(1, -6)$ .

**ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR**

**1001** Lös ekvationerna utan räknare.

a)  $x^3 = 64$

b)  $2x^3 - 5 = 49$

c)  $x^4 = 625$

**1002** Lös ekvationerna och ge svaren med tre gällande siffror.

a)  $x^5 = 550$

b)  $3x^3 - 5 = 520$

c)  $x^4 = 6\,250$

**1003** Lös ekvationerna (helst utan räknare).

a)  $x^{100} = 2^{100}$

b)  $x^{100} = 2^{200}$

c)  $x^6 = 10^{24}$

**1004** Hastigheten  $v$  m/s hos ett föremål som fallit  $x$  m ges av sambandet  $v^2 = 19,6x$ . Hur stor hastighet har ett föremål som fallit 25 m?

**1005** En förvaringslåda ska rymma  $27 \text{ dm}^3$ . Vilken sidlängd ska den ha om den ges formen av en kub?



**1006** En rätvinklig triangel har kateterna  $a$  och  $b$  och hypotenusan  $c$ . Bestäm den okända sidan då

a)  $a = 5 \text{ cm}$  och  $b = 12 \text{ cm}$

b)  $a = 15 \text{ cm}$  och  $c = 17 \text{ cm}$

**1007** Sidorna hos en låda, som är formad som ett rätblock, har proportionerna  $3:4:5$ . Lådans volym är  $7,5 \text{ l}$ . Beräkna lådans sidor.

**1008** Bestäm polynomens nollställen.

a)  $f(x) = x^2 + 8x + 7$

b)  $g(x) = x^2 - 6x + 5$

c)  $h(x) = x^2 - 4x - 5$

**1009** Bestäm polynomens nollställen.

a)  $f(x) = x^2 + 3x - 4$

b)  $g(x) = -x^2 + 5x - 4$

c)  $h(x) = 2x^2 + 3x - 2$

**1010** Bestäm lokala extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

a)  $f(x) = x^2 + 5$

b)  $g(x) = -2x^2 + 3$

c)  $h(x) = x^2 + 6x + 5$

**1011** Bestäm lokala extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

a)  $f(x) = 2x^2 - 8x - 5$

b)  $g(x) = -2x^2 - 4x - 6$

c)  $h(x) = -3x^2 + 9x - 8$

**1012** Bestäm lokala extrempunkter och avgör om de är lokala maximi- eller minimipunkter.

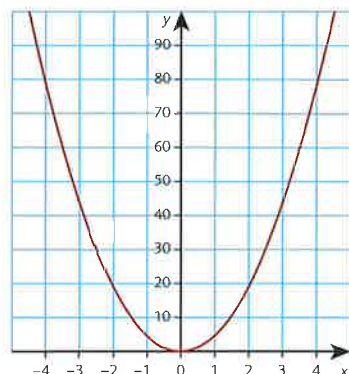
a)  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

b)  $g(x) = -2(x + 3)^2 + 2$

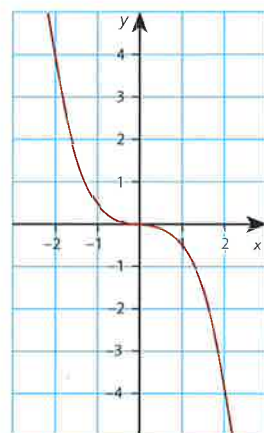
c)  $h(x) = 2((x + 3)^2 + 3)$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 1013** Grafen visar en funktion som kan skrivas  $y = kx^2$ . Vilket värde har konstanten  $k$ ? **T**



- 1014** Grafen visar en funktion som kan skrivas  $y = kx^3$ . Vilket värde har konstanten  $k$ ?



- 1015** Hanna säger: ”Jag tänker på ett positivt tal, lägger till tre, kvadrerar resultatet och drar ifrån det tal jag först tänkte på. Då har jag resultatet 113.” Vilket tal tänkte Hanna på?

- 1016** Vid kast med en liten boll anger  $y$  m dess höjd och  $x$  m dess vågräta avstånd från kastaren. Funktionen  $y = -0,025(x^2 - 38x - 80)$  ger sambandet mellan  $y$  och  $x$ . Hur högt når bollen?



- 1017** Solen utstrålar effekten  $P = 3,9 \cdot 10^{26}$  W och har radien  $r = 7,0 \cdot 10^8$  m. Använd Stefan-Boltzmanns lag för att uppskatta solens yttemperatur  $T$ :

$$\frac{P}{A} = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4$$

$A$  är klotets area och kan bestämmas med formeln  $A = 4\pi r^2$ .

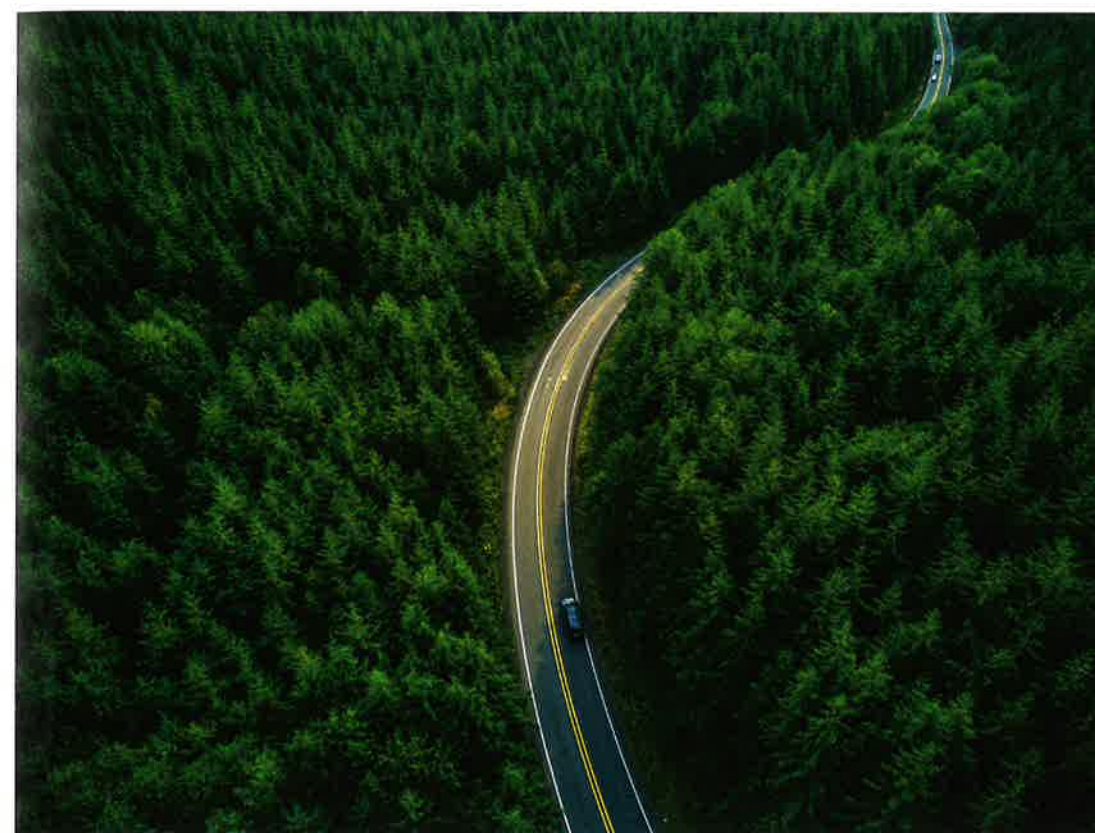
- \* 1018** En affär säljer mobilskal. Antalet sålda skal per dag ( $x$ ) beror på priset ( $p$  kr) enligt sambandet  $x = 600 - 2p$ .
- Teckna ett samband för dagsinkomsten  $y$  kr som funktion av priset  $p$  kr. **T**
  - Bestäm det pris som ger den högsta dagsinkomsten.
- \* 1019**
- Beskriv gemensamma drag hos graferna till  $y = x$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^5$  och  $y = x^7$ .
  - Beskriv gemensamma drag hos graferna till  $y = x^2$ ,  $y = x^4$ ,  $y = x^6$  och  $y = x^8$ .
  - Hur många rötter har ekvationen  $x^n = a$  om  $n$  är ett udda tal.
  - Hur många rötter har ekvationen  $x^n = a$  om  $n$  är ett jämnt tal.

- \* 1020** Vid konstant acceleration ges sträckan  $s$  m av formeln  $s = v_0 t + at^2/2$ , där  $v_0$  m/s är starthastigheten,  $a$  m/s<sup>2</sup> är accelerationen och  $t$  s är tiden för rörelsen.

Hur lång tid har det gått då en bil med starthastigheten 11 m/s och accelerationen 4,0 m/s<sup>2</sup> har kört 90 m?

- \* 1021** I ett koordinatsystem är linjen  $y = -4x + 8$  ritad. En rektangel är placerad så att den har två sidor på de positiva koordinataxlarna, ett hörn i origo, och det motsatta hörnet på en punkt på linjen.

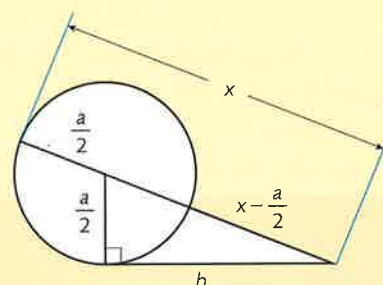
- Teckna en funktion som beskriver rektangelns area. Låt  $x$ -koordinaten för punkten på linjen vara din variabel. **T**
- Bestäm var punkten ska placeras för att rektangelns area ska bli så stor som möjligt.



## UTMANING

### GEOMETRISK LÖSNING AV ANDRAGRADSEKVATION

René Descartes visade på 1600-talet hur man geometriskt kan lösa en andragradsekvation. För att lösa en ekvation av typen  $x^2 - ax - b^2 = 0$  ritade han en rätvinklig triangel med kateterna  $b$  och  $a/2$  tillsammans med en cirkel enligt figuren. Med hjälp av Pythagoras sats tecknade han ett samband som han sedan använde för att geometriskt bestämma en rot till ekvationen. Förklara varför sträckan  $x$  (den förlängda hypotenusan i figuren) motsvarar den positiva roten till ekvationen  $x^2 - ax - b^2 = 0$ . Negativa rötter var på den tiden ointressanta.



1  
2  
3  
5

## Räknelagar för polynom

Polynom kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras med hjälp av samma räknelagar som du är van vid. Vi utgår från två polynom och studerar resultaten av tre av räkneoperationerna. Division ingår inte i kursen.

$$q(x) = x^2 + 3x$$

$$r(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$p_1(x) = q(x) + r(x) = (x^2 + 3x) + (x^2 - 2x + 4) = x^2 + 3x + x^2 - 2x + 4 = 2x^2 + x + 4$$

$$p_2(x) = q(x) - r(x) = (x^2 + 3x) - (x^2 - 2x + 4) = x^2 + 3x - x^2 + 2x - 4 = 5x - 4$$

$$p_3(x) = q(x) \cdot r(x) = (x^2 + 3x)(x^2 - 2x + 4) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x^3 - 6x^2 + 12x = x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x$$

Lägg märke till följande:

- Vid addition och subtraktion av två polynom får summan och differensen högst samma grad som polynomet med högst grad ( $\text{grad}(p) \leq \max(\text{grad}(q), \text{grad}(r))$ ).
- Vid multiplikation av två polynom multipliceras varje term i det första polynomet med varje term i det andra polynomet. En följd av det är att graden hos produkten av två polynom är summan av graderna hos de två polynomen ( $\text{grad}(p) = \text{grad}(q) + \text{grad}(r)$ ). Regeln gäller dock inte om ett av polynomen är nollpolynomet ( $p(x) = 0$ ) eftersom detta polynom saknar grad.

## EXEMPEL

### Förenkla och bestäm graden

Förenkla polynomen och bestäm dess grader.

- $(x^3 - 6x^2 - 4x) + (6x^2 - x^3)$
- $(x^3 - 6x^2 - 4x) - (6x^2 - x^3)$
- $(x^3 - 6x^2 - 4x)(6x^2 - x^3)$

### LÖSNING:

$$\text{a) } (x^3 - 6x^2 - 4x) + (6x^2 - x^3) = x^3 - 6x^2 - 4x + 6x^2 - x^3 = -4x$$

Grad: 1

$$\text{b) } (x^3 - 6x^2 - 4x) - (6x^2 - x^3) = x^3 - 6x^2 - 4x - 6x^2 + x^3 = 2x^3 - 12x^2 - 4x$$

Grad: 3

$$\text{c) } (x^3 - 6x^2 - 4x)(6x^2 - x^3) = 6x^5 - x^6 - 36x^4 + 6x^5 - 24x^3 + 4x^4 = -x^6 + 12x^5 - 32x^4 - 24x^3$$

Grad: 6

**SVAR:** se ovan

### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

1022 Förenkla och bestäm graden.

- $(3x^2 - 4x) + (2x^2 - 5)$
- $(4x^2 - 1) + (5x^2 + 4x - 3)$
- $(2x^3 - 3x^2 + 4x) + (5 - 3x^2 - 2x^3)$

1023 Förenkla och bestäm graden.

- $(x^2 + 3x - 4) - (x^2 - 4)$
- $(x^4 - x^2 - x) - (x^2 + x^4)$
- $(x^3 + 8x^2 + 3) - (7x^2 - x^3)$

1024 Förenkla och bestäm graden.

- $(3x^2 - 2x)(x^2 - 5)$
- $(2x^3 + x^2 + 3)(x^2 - x)$
- $(1 - x^2)(6x^2 + 3x - 1)$

1025 Förenkla och bestäm graden då

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - 4x \text{ och}$$

$$r(x) = x^3 - 2x^2 - 4.$$

- $p_1(x) = q(x) + r(x)$
- $p_2(x) = q(x) - r(x)$
- $p_3(x) = q(x) \cdot r(x)$

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

1026 Förenkla och bestäm graden.

- $(x^3 + x^2 - x + 1)(x^2 - x)$
- $(x^2 - 5x + 8)(2x^2 + 2x - 2)$
- $(x - 3)(3x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$  **T**

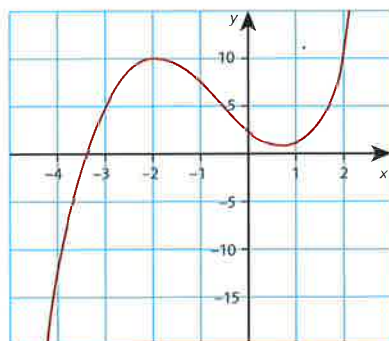
\* 1027  $p(x)$  och  $q(x)$  är två polynom, där inget av dem är nollpolynomet och där  $\text{grad}(p) = m$  och  $\text{grad}(q) = n$ . Dessutom gäller olikheten  $m \geq n$ . Vad kan man säga om graden hos

- $p(x) + q(x)$
- $p(x) - q(x)$
- $p(x) \cdot q(x)$

\*\* 1028 För polynomen  $p(x)$  och  $q(x)$  gäller att  $\text{grad}(p(x) + q(x)) < \text{grad}(p(x))$ . Kan man dra någon slutsats av det vid en jämförelse av  $\text{grad}(p(x))$  och  $\text{grad}(q(x))$ ?

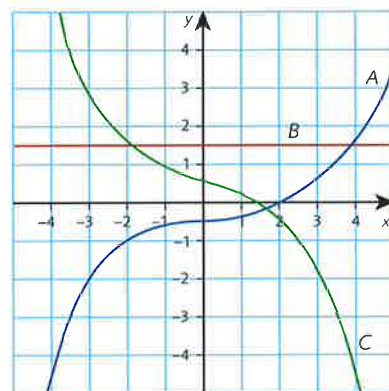
## Egenskaper hos polynom

Funktionen  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$  är en polynomfunktion av grad tre. Dess graf visas i figuren. Koefficienterna framför de termer som innehåller variabeln  $x$  avgör grafens form och om dessa ändras kan grafen få ett helt annat utseende. I det kommande avsnittet ska vi titta närmare på polynom av högre grad och undersöka hur utseende, antalet nollställen och lokala extrempunkter beror av dess funktionsuttryck. För att kunna ge grafers utseende en tydlig beskrivning, behövs ett antal begrepp. Vi ska därför börja med att definiera några sådana begrepp.



### Växande och avtagande funktioner

En funktion är **växande** om dess graf växer från vänster till höger. På motsvarande sätt är en funktion **avtagande** om dess graf avtar från vänster till höger. En vågrät funktion är både växande och avtagande. I figuren är grafen A växande, grafen B både växande och avtagande och grafen C avtagande.



Om en funktion är växande i ett intervall och vi här godtyckligt väljer två punkter  $x_1$  och  $x_2$  gäller:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

På motsvarande sätt gäller för avtagande funktioner:

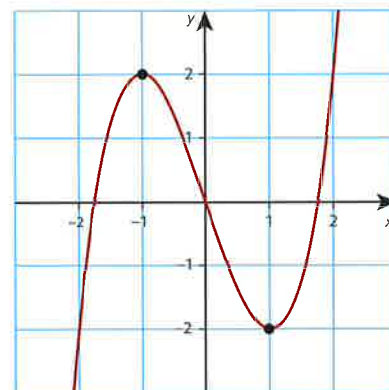
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Om man vet att implikationerna ovan är sanna även för stränga olikheter i högerleden,  $f(x_1) < f(x_2)$  och  $f(x_1) > f(x_2)$ , säger man att funktionen är **strängt växande** respektive **strängt avtagande**.

### Lokala extrempunkter

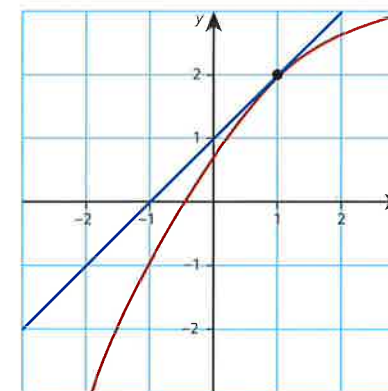
Betrakta grafen i figuren. Den är omväxlande växande och avtagande. Den innehåller också **lokala extrempunkter**. En lokal extrempunkt kan vara antingen ett **lokalt maximum** eller ett **lokalt minimum**. I figuren finns det ett lokalt maximum i punkten  $(-1, 2)$  och ett lokalt minimum i punkten  $(1, -2)$ .

Med ett lokalt maximum menas ett funktionsvärde som är större än eller lika med alla andra funktionsvärden i den närmaste omgivningen. Motsvarande definition för ett lokalt minimum är ett funktionsvärde som är mindre än eller lika med alla andra funktionsvärden i den närmaste omgivningen.

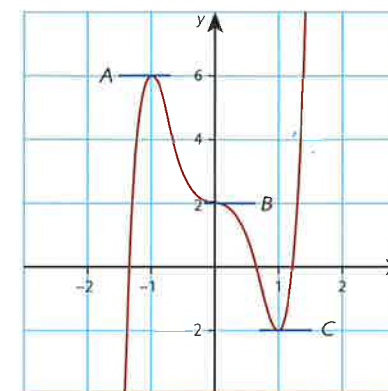


### Tangenter och terrasspunkter

En **tangent** är en rät linje som tangerar en kurva i en punkt. Det innebär att den har en punkt gemensam med kurvan och att kurvans riktning i tangeringspunkten sammanfaller med riktningen hos tangenten. I figuren tangerar den blå linjen kurvan i punkten  $(1, 2)$  och är därmed en tangent.



En tangent till ett lokalt maximum eller minimum hos ett polynom är alltid en vågrät linje (A och C i figuren). I figuren finns dessutom den vågräta tangenten B. Den tangerar kurvan i en **terrasspunkt**. I den närmsta omgivningen till en terrasspunkt är en kurva antingen enbart växande eller enbart avtagande. I figuren är kurvan avtagande på båda sidor om terrasspunkten.



EXEMPEL

### Växande och avtagande

Rita funktionen  $f(x) = 2x^3 + 3x^2$  med hjälp av dator och undersök i vilka intervall den är växande respektive avtagande.

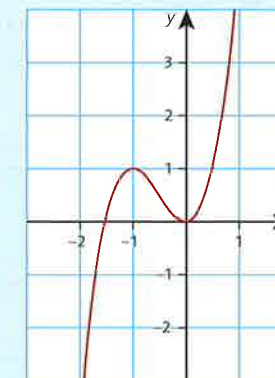
#### LÖSNING:

Skriv in funktionen i t.ex. GeoGebra och låt programmet rita grafen enligt figuren.

Kurvan byter riktning då  $x = -1$  och  $x = 0$ . Det ger slutsatserna i svaret nedan.

#### SVAR:

Funktionen är växande för  $x \leq -1$  eller  $x \geq 0$  samt avtagande för  $-1 \leq x \leq 0$ .



### Terrass- och lokala extrempunkter

Bestäm terrass- och lokala extrempunkter för funktionen  $y = 6x^5 - 10x^3 + 2$ .

#### LÖSNING:

Grafen har vågräta tangenter för punkterna  $(-1, 6)$ ,  $(0, 2)$  och  $(1, -2)$ . Punkternas  $y$ -koordinater kan även beräknas med hjälp av respektive  $x$ -koordinat:

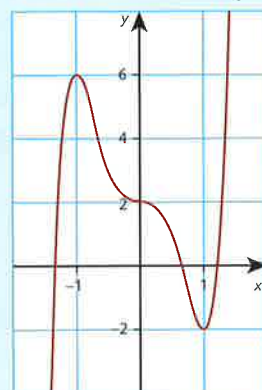
$$x = -1 \Rightarrow y = 6(-1)^5 - 10(-1)^3 + 2 = 6$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \cdot 0^5 - 10 \cdot 0^3 + 2 = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 6 \cdot 1^5 - 10 \cdot 1^3 + 2 = -2$$

#### SVAR:

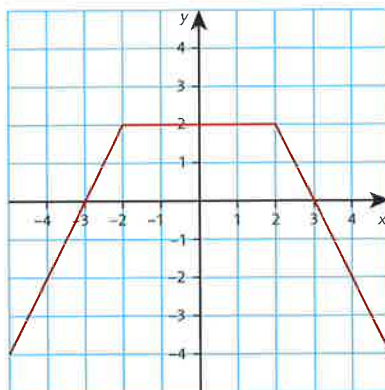
Lokal maximipunkt i  $(-1, 6)$ , terrasspunkt i  $(0, 2)$  och lokal minimipunkt i  $(1, -2)$ .



### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

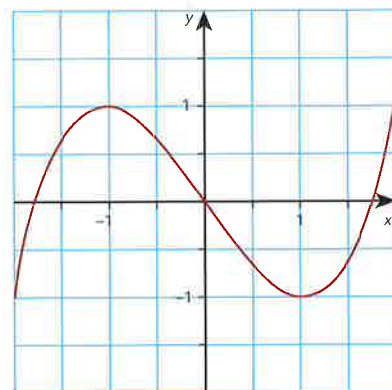
1029 Ange för den funktion som illustreras av grafen om den är avtagande eller växande i följande intervall:

- a)  $2 \leq x \leq 5$
- b)  $-2 \leq x \leq 5$
- c)  $-2 \leq x \leq 2$
- d)  $-5 \leq x \leq -2$
- e)  $-5 \leq x \leq 2$
- f)  $-5 \leq x \leq 5$



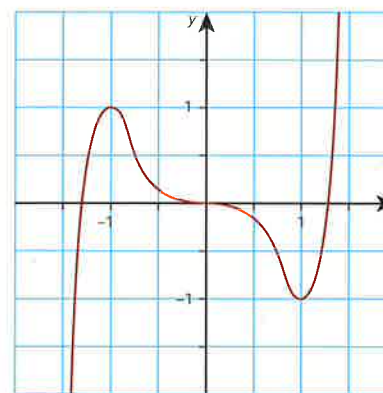
1030 Grafen i figuren har två lokala extrempunkter, en i  $(-1, 1)$  och en i  $(1, -1)$ . Ange de intervall för vilka gäller att funktionen i figuren är

- a) avtagande
- b) växande



1031 Vilka punkter på grafen från övning 1030 ger vågräta tangenter?

1032 Figuren visar grafen till ett polynom. Den har tre punkter med vågräta tangenter. Ange lokala maximi-, lokala minimi- och terrasspunkter för grafen.



1033 Ange för varje polynom om det är växande eller avtagande.

- a)  $p_1(x) = -2x + 3$
- b)  $p_2(x) = 2x^3$
- c)  $p_3(x) = -x^4, x > 0$
- d)  $p_4(x) = -x^4, x < 0$

1034 Rita funktionen  $f(x) = x^3 - 12x$  och bestäm dess lokala extrempunkter.

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

1035 För vilka värden på  $x$  är polynomet växande?

- a)  $f(x) = x^2 + 4x - 4$
- b)  $g(x) = -x^2 + 6x + 4$
- c)  $h(x) = 2x^2 - 8x - 2$

\* 1036 Ge ett andragradspolynom som har en lokal minimipunkt i  $(1, 3)$ . T

\* 1037 Funktionerna  $g(x) = x^3$  och  $h(x) = x$  är växande för samtliga  $x$ -värden. Vilka av följande funktioner kan vara avtagande i något intervall? Motivera och försök att svara utan att rita kurvorna.

- a)  $f(x) = g(x) + h(x)$
- b)  $f(x) = 2g(x) + 3h(x)$
- c)  $f(x) = g(x) - h(x)$  T

\*\* 1038 Kan man dra några slutsatser om funktionen  $g(x) = (p(x))^2$  då följande förutsättningar gäller?

- a)  $p(x)$  är växande för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- b)  $p(x)$  är växande och positiv för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- c)  $p(x)$  är växande och negativ för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- d)  $p(x)$  är avtagande för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- e)  $p(x)$  är avtagande och positiv för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.
- f)  $p(x)$  är avtagande och negativ för alla  $x$ -värden i definitionsmängden.

### UTMANING

#### VÄXANDE POLYNOM

Polynomet  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , där  $a \neq 0$ , är givet. Ange för vilka intervall polynomet är växande och om dessa intervall gäller under några särskilda villkor. Motivera dina svar.

- 1
- 2
- 3
- 5
- 6

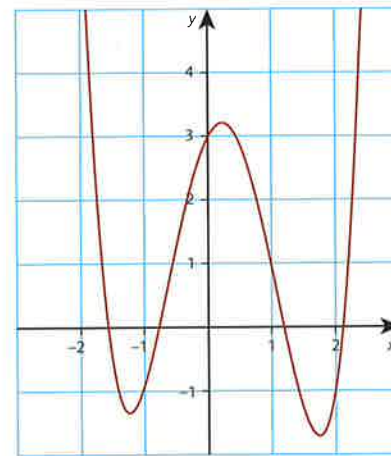
## Antal nollställen och lokala extrempunkter hos polynom



Teorigenomgång

I den inledande uppgiften hade du möjlighet att undersöka hur många lokala extrempunkter och nollställen polynom av olika grad kan ha. Tidigare har du arbetat med andragradspolynom och sett att de alltid har en lokal extrempunkt och högst två nollställen.

Grafen visar ett polynom av grad 4,  $p(x)$ . Polynomet har fyra nollställen och tre lokala extrempunkter. Man kan visa att varje polynom av grad fyra har högst fyra nollställen och högst tre lokala extrempunkter. För polynom av grad  $n$  kan man visa motsvarande slutsatser.



$$p(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 3$$

FÖR POLYNOM AV GRAD  $n$  GÄLLER:

**Antal nollställen: Högst  $n$ .**

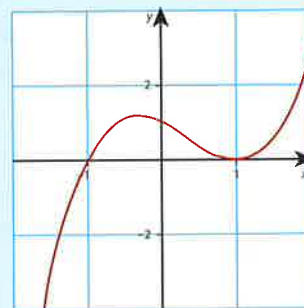
**Antal lokala extrempunkter: Högst  $n-1$**

Dessutom kan man visa följande (vilket du får chans att undersöka i en utmaning senare):  
För polynom av jämn grad finns det minst en lokal extrempunkt.  
För polynom av udda grad finns det minst ett nollställe.

### Avläsa antalet nollställen grafiskt

I figuren visas grafen till en tredjegradsfunktion  $f(x)$ . Den tangerar  $x$ -axeln i punkten  $(1, 0)$ . Hur många nollställen har funktionen

- a)  $f(x)$
- b)  $g(x) = f(x) + 0,1$
- c)  $h(x) = f(x) - 0,1$



**LÖSNING:**

- a) Antalet skärningspunkter med  $x$ -axeln ger två nollställen.
- b) Om kurvan flyttas en aning uppåt kommer den högra minimipunkten att hamna ovanför  $x$ -axeln. Det resulterar i att det bara blir ett nollställe.
- c) Om kurvan flyttas en aning neråt kommer den högra minimipunkten att hamna under  $x$ -axeln. Det resulterar i att det blir tre nollställen.

**SVAR:** a) Två nollställen   b) Ett nollställe   c) Tre nollställen

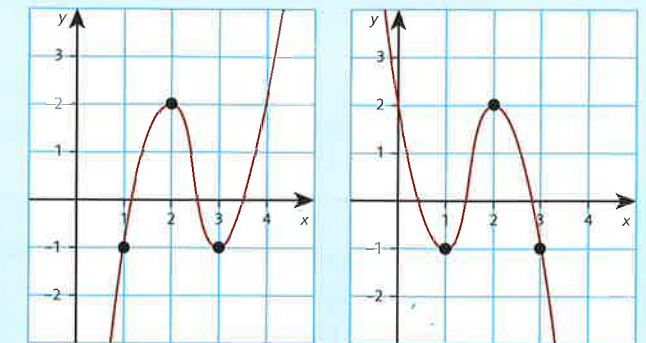
EXEMPEL

### Bestäm antalet nollställen med hjälp av givna punkter

Grafen för en tredjegradsfunktion går genom punkterna  $(1, -1)$ ,  $(2, 2)$  och  $(3, -1)$ . Hur många nollställen har funktionen?

**LÖSNING:**

Punkterna markeras i ett koordinatsystem för att kunna få en bild över hur grafen ser ut. En tredjegradsfunktion har i stora drag ett av de två utseenden som visas i figurerna. Eftersom de givna punkterna växelvis är placerade under och över  $x$ -axeln måste grafen skära denna i tre punkter. Det innebär att det finns tre nollställen.



**SVAR:** Tre nollställen

### ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1039** Hur många nollställen kan det högst finnas hos en polynomfunktion av graden

- a) 3   b) 5   c) 8   d)  $n$

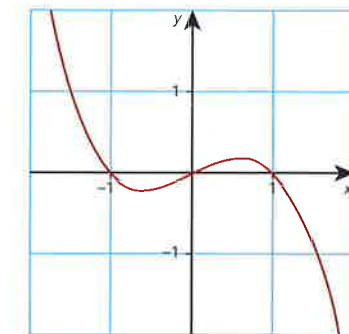
**1040** Hur många lokala extrempunkter kan det högst finnas hos en polynomfunktion av graden

- a) 3   b) 5   c) 8   d)  $n$

**1041** Grafen till en polynomfunktion av andra graden går genom punkterna  $(-1, 3)$  och  $(1, -3)$ . Hur många nollställen har funktionen?

**1042** I figuren visas grafen till tredjegrads-polynomet  $p(x)$ .

- a) Bestäm funktionens nollställen.
- b) Hur många nollställen har funktionen  $q(x) = p(x) + 1$ ?
- c) Hur många nollställen har funktionen  $r(x) = p(x) - 1$ ?



**1043** Rita grafen till funktionen

$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  och bestäm dess nollställen.

**1044** Hur många nollställen har funktionerna

- a)  $y = x^2 + 1$    b)  $y = x^3 + 1$
- c)  $y = x^4 + 1$

**1045** Hur många nollställen har funktionerna

- a)  $y = x^2 - 1$    b)  $y = x^3 - 1$
- c)  $y = x^4 - 1$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* **1046** Hur många nollställen har funktionen  $y = x^n - x^{n-1}$  då  $n$  är ett heltal större än 1.
- \* **1047** Hur många nollställen har funktionen  $y = x^n - x^{n-2}$  då  $n$  är ett heltal större än 2.
- \* **1048** Hur många nollställen har funktionen  $y = x^n + x^{n-2}$  då  $n$  är ett heltal större än 2.
- \* **1049** Ett polynom av grad 2 har precis ett nollställe. Kan man dra någon slutsats om den lokala extrempunktens placering?

### UTMANING

#### LOKALA EXTREMPUNKTER OCH NOLLSTÄLLEN

Den här uppgiften knyter an till två påståenden på sidan 24 om antalet nollställen och lokala extrempunkter till polynom.

- Finns det exempel på polynom av grad  $n$ , där  $n$  är ett jämnt tal, som saknar nollställen? Motivera.
- Finns det exempel på polynom av grad  $n$ , där  $n$  är ett udda tal, som saknar nollställen? Motivera.
- Finns det exempel på polynom av grad  $n$ , där  $n$  är ett jämnt tal, som saknar lokala extrempunkter? Motivera.
- Finns det exempel på polynom av grad  $n$ , där  $n$  är ett udda tal, som saknar lokala extrempunkter? Motivera.

|   |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 5 |
|   |
|   |

- \* **1050** Ett polynom av grad 3 har tre nollställen. Kan man dra någon slutsats om antalet lokala extrempunkter?
- \* **1051** Ett polynom av grad 3 har två lokala extrempunkter. Kan man dra någon slutsats om antalet nollställen?
- \* **1052** Ett polynom av grad 4 har fyra nollställen. Kan man dra någon slutsats om antalet lokala extrempunkter?
- \* **1053** Ett polynom av grad 4 har tre lokala extrempunkter. Kan man dra någon slutsats om antalet nollställen?

## Nollställen till faktorerade polynom



Nollställen till andragradspolynom, dvs. polynom på formen  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , har du bestämt tidigare. Det är ofta komplicerat att bestämma nollställen till polynom av högre grad än två. Det finns emellertid några undantag. Om ett polynom är skrivet i faktorerad form, är det vanligtvis lätt att bestämma dess nollställen. Med faktorerad form menas att det är skrivet som en produkt av faktorer. Ett polynom av tredje graden i faktorerad form kan exempelvis se ut så här:

$$p(x) = x(x-1)(x+3)$$

Om polynomet ska ha värdet 0, krävs det att en av faktorerna  $x$ ,  $(x-1)$  och  $(x+3)$  är 0. Detta används för att hitta polynomets nollställen. Tekniken illustreras i det följande exemplet.

### Nollställen till en faktorerad polynomfunktion

Bestäm samtliga nollställen till polynomet  $p(x) = x(x-1)(x+3)$ .

#### LÖSNING:

$$p(x) = 0 \text{ ger oss ekvationen } x(x-1)(x+3) = 0$$

Minst en av faktorerna i vänsterledet måste ha värdet 0. Det ger följande tre ekvationer:

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x - 1 = 0 & x + 3 = 0 \\ & x = 1 & x = -3 \end{array}$$

**SVAR:**  $x = 0$ ,  $x = 1$  och  $x = -3$

## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1054** Bestäm polynomens nollställen.

- a)  $p(x) = (x+3)(x-5)(x-2)$
- b)  $p(x) = (x+1)(x-4)(x+2)$
- c)  $p(x) = x(x-8)(x+8)$

**1055** Bestäm polynomens nollställen.

- a)  $p(x) = (x-3)^2(x-5)^3$
- b)  $p(x) = (x+4)(2x-4)^6$
- c)  $p(x) = x^2(x+7)(x-7)$

**1056** Bestäm polynomens nollställen.

- a)  $p(x) = x(x-1)^2$
- b)  $p(x) = x(x^2-1)$
- c)  $p(x) = x^2(x^2-1)^2$

**1057** a) Lös ekvationen  $(x-1)(x-5) = 0$ .

b) Lös ekvationen  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

c) Utför parentesmultiplikationen  $(x-1)(x-5)$ .

d) Varför har ekvationerna i a- och b-uppgifterna samma lösning?

e) Hur kan funktionen  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  skrivas om i faktorerad form, som en produkt av två parenteser?

**1058** Funktionen  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  har två nollställen,  $x = 1$  och  $x = 3$ .

Skriv i faktorerad form

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b)  $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$  **T**

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* 1059 Lös ekvationerna **T**

- $x(x+1)^2 = (x+1)^2$
- $x(x-1)(x+1) = 2(x-1)(x+1)$
- $x^2(x^2-1)^2 = 2x(x^2-1)^2$

1060 Produkten av tre på varandra följande heltal har värdet 0. Vilka är de tre möjliga heltalen?

1061 Då ett tal multipliceras med summan av talet och 5 blir produkten 0. Bestäm talet.

\* 1062 Produkten av tre tal,  $a$ ,  $b$  och  $c$ , är 0. Talet  $b$  är dubbelt så stort som  $a+1$ . Talet  $c$  fås genom att subtrahera  $b$  med 4. Vilka är talen? **L**

- \* 1063 a) Ekvationen  $x^2 - 6x + 5 = 0$  har lösningarna  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 5$ . Försök att hitta ett sätt att kombinera lösningarnas värden 1 och 5 så att du får koefficienterna  $-6$  och  $5$  i ekvationen.
- b) Undersök därefter om din metod fungerar på ekvationen  $x^2 + 8x + 12 = 0$  som har lösningarna  $x_1 = -2$  och  $x_2 = -6$ .
- c) Uttryck ett möjligt samband mellan koefficienterna  $p$  och  $q$  och lösningarna  $x_1$  och  $x_2$  i ekvationen  $x^2 + px + q = 0$ .
- d) Undersök om detta samband alltid gäller.

## PASCALS TRIANGEL

Blaise Pascal (1623–62) var en fransk filosof, matematiker och författare. Hans berömda triangel används framför allt inom sannolikhetsläran, en gren av matematiken som till stor del Pascal och Pierre de Fermat (1601–65) ligger bakom. De sex första raderna i triangeln ser du i figuren.

■ Hur bör den sjunde raden se ut enligt det mönster som finns?

■ Den tredje raden visar koefficienterna för kvadreringsregeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

På motsvarande sätt kan man ur triangeln utläsa att

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Hur kan  $(a+b)^4$  utvecklas med hjälp av triangeln?

■ Hur bör motsvarande uttryck för  $(a-b)^2$ ,  $(a-b)^3$  och  $(a-b)^4$  se ut?

■ Då man bygger tresidiga pyramider med kulor innehåller varje lager olika antal kulor. I det översta lagret finns det bara en kula, i nästa finns det tre och i det tredje lagret från ovan finns det sex kulor. Hur många finns det i det fjärde lagret? Kan Pascals triangel hjälpa dig att få fram det värdet? På vilket sätt? Hur många kulor blir det i nästa lager?

■ Kan du även använda Pascals triangel för att beräkna det sammanlagda antalet kulor i en tresidig pyramid om du vet höjden på den?

|   |   |    |     |        |        |       |
|---|---|----|-----|--------|--------|-------|
|   |   |    |     |        |        |       |
|   |   |    | 1   |        |        |       |
|   |   | 1  |     | 1      |        |       |
|   | 1 |    | 2   |        | 1      |       |
| 1 |   | 3  |     | 3      |        | 1     |
|   | 1 |    | 4   |        | 6      |       |
| 1 |   | 5  |     | 10     |        | 10    |
|   | 1 |    | 6   |        | 15     |       |
| 1 |   | 7  |     | 21     |        | 28    |
|   | 1 |    | 8   |        | 28     |       |
| 1 |   | 9  |     | 36     |        | 45    |
|   | 1 |    | 10  |        | 45     |       |
| 1 |   | 11 |     | 55     |        | 66    |
|   | 1 |    | 12  |        | 66     |       |
| 1 |   | 13 |     | 78     |        | 91    |
|   | 1 |    | 14  |        | 91     |       |
| 1 |   | 15 |     | 105    |        | 136   |
|   | 1 |    | 16  |        | 136    |       |
| 1 |   | 17 |     | 153    |        | 182   |
|   | 1 |    | 18  |        | 182    |       |
| 1 |   | 19 |     | 210    |        | 228   |
|   | 1 |    | 20  |        | 252    |       |
| 1 |   | 21 |     | 300    |        | 351   |
|   | 1 |    | 22  |        | 352    |       |
| 1 |   | 23 |     | 406    |        | 429   |
|   | 1 |    | 24  |        | 476    |       |
| 1 |   | 25 |     | 550    |        | 510   |
|   | 1 |    | 26  |        | 636    |       |
| 1 |   | 27 |     | 735    |        | 609   |
|   | 1 |    | 28  |        | 840    |       |
| 1 |   | 29 |     | 961    |        | 714   |
|   | 1 |    | 30  |        | 1080   |       |
| 1 |   | 31 |     | 1218   |        | 833   |
|   | 1 |    | 32  |        | 1364   |       |
| 1 |   | 33 |     | 1528   |        | 969   |
|   | 1 |    | 34  |        | 1700   |       |
| 1 |   | 35 |     | 1890   |        | 1122  |
|   | 1 |    | 36  |        | 2090   |       |
| 1 |   | 37 |     | 2301   |        | 1293  |
|   | 1 |    | 38  |        | 2524   |       |
| 1 |   | 39 |     | 2760   |        | 1482  |
|   | 1 |    | 40  |        | 3010   |       |
| 1 |   | 41 |     | 3274   |        | 1689  |
|   | 1 |    | 42  |        | 3552   |       |
| 1 |   | 43 |     | 3845   |        | 1914  |
|   | 1 |    | 44  |        | 4156   |       |
| 1 |   | 45 |     | 4485   |        | 2157  |
|   | 1 |    | 46  |        | 4834   |       |
| 1 |   | 47 |     | 5205   |        | 2418  |
|   | 1 |    | 48  |        | 5600   |       |
| 1 |   | 49 |     | 6021   |        | 2697  |
|   | 1 |    | 50  |        | 6470   |       |
| 1 |   | 51 |     | 6949   |        | 2994  |
|   | 1 |    | 52  |        | 6950   |       |
| 1 |   | 53 |     | 7485   |        | 3309  |
|   | 1 |    | 54  |        | 8058   |       |
| 1 |   | 55 |     | 8671   |        | 3642  |
|   | 1 |    | 56  |        | 9326   |       |
| 1 |   | 57 |     | 10025  |        | 4003  |
|   | 1 |    | 58  |        | 10770  |       |
| 1 |   | 59 |     | 11563  |        | 4382  |
|   | 1 |    | 60  |        | 12408  |       |
| 1 |   | 61 |     | 13307  |        | 4789  |
|   | 1 |    | 62  |        | 14264  |       |
| 1 |   | 63 |     | 15281  |        | 5224  |
|   | 1 |    | 64  |        | 16360  |       |
| 1 |   | 65 |     | 17505  |        | 5687  |
|   | 1 |    | 66  |        | 18718  |       |
| 1 |   | 67 |     | 20003  |        | 6179  |
|   | 1 |    | 68  |        | 21274  |       |
| 1 |   | 69 |     | 22635  |        | 6700  |
|   | 1 |    | 70  |        | 24090  |       |
| 1 |   | 71 |     | 25643  |        | 7251  |
|   | 1 |    | 72  |        | 27300  |       |
| 1 |   | 73 |     | 29065  |        | 7832  |
|   | 1 |    | 74  |        | 30944  |       |
| 1 |   | 75 |     | 32941  |        | 8445  |
|   | 1 |    | 76  |        | 35060  |       |
| 1 |   | 77 |     | 37305  |        | 9090  |
|   | 1 |    | 78  |        | 39680  |       |
| 1 |   | 79 |     | 42191  |        | 9767  |
|   | 1 |    | 80  |        | 44834  |       |
| 1 |   | 81 |     | 47615  |        | 10478 |
|   | 1 |    | 82  |        | 50540  |       |
| 1 |   | 83 |     | 53615  |        | 11223 |
|   | 1 |    | 84  |        | 56846  |       |
| 1 |   | 85 |     | 60230  |        | 12003 |
|   | 1 |    | 86  |        | 63774  |       |
| 1 |   | 87 |     | 67485  |        | 12818 |
|   | 1 |    | 88  |        | 71360  |       |
| 1 |   | 89 |     | 75407  |        | 13669 |
|   | 1 |    | 90  |        | 79636  |       |
| 1 |   | 91 |     | 84057  |        | 14557 |
|   | 1 |    | 92  |        | 88680  |       |
| 1 |   | 93 |     | 93515  |        | 15482 |
|   | 1 |    | 94  |        | 98572  |       |
| 1 |   | 95 |     | 103861 |        | 16445 |
|   | 1 |    | 96  |        | 109394 |       |
| 1 |   | 97 |     | 115181 |        | 17447 |
|   | 1 |    | 98  |        | 121234 |       |
| 1 |   | 99 |     | 127565 |        | 18489 |
|   | 1 |    | 100 |        | 134188 |       |

## UTMANING

1  
2  
3  
4  
5

## Nollställena till polynom av högre grad

Om ett polynom av grad tre eller högre inte är skrivet i faktoreriserad form är det vanligtvis svårt att bestämma dess nollställena. Då kan man ta hjälp av något digitalt verktyg.

### Bestämning av nollställena med hjälp av digitala verktyg

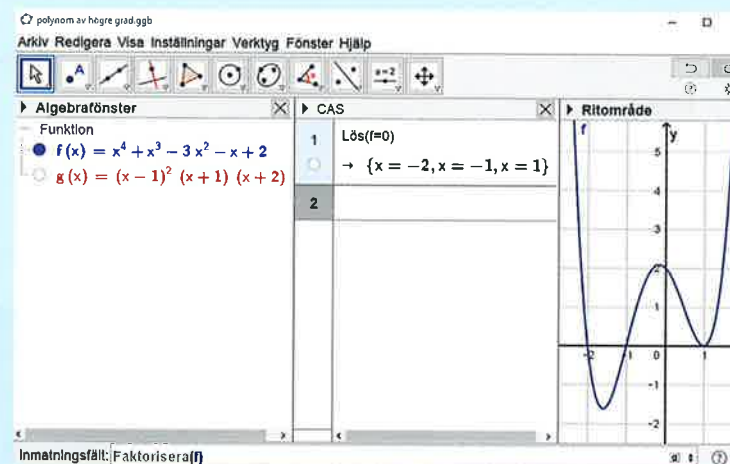
Ett polynom av grad fyra ges av  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ .

Bestäm dess nollställena och skriv polynomet i faktoreriserad form.

### LÖSNING:

Vi visar tre sätt att använda GeoGebra för att undersöka polynomet.

- Grafiskt: Polynomet  $f(x)$  skrivs in i inmatningsfältet och grafen ritas.
- CAS: Ekvationen  $f(x) = 0$  löses genom att skriva **Lös(f = 0)** i CAS. Om man skriver ekvationen  $f = 0$  här, förutsätter det att  $f$  först har definierats enligt punkt 1.
- Faktorisera: Polynomet ges i faktoreriserad form genom att i inmatningsfältet skriva **Faktorisera(f)**. Då bildas funktionen  $g(x)$  i figuren.



Oavsett om vi väljer grafisk metod, symbolhanterande verktyg (CAS) eller faktorisering, får vi fram polynomet tre nollställena,  $x = -2$ ,  $x = -1$  och  $x = 1$ . Fördelen med den faktoreriserade formen är att man kan se att  $x = 1$  är en så kallad dubbelrot. I koordinatsystemet kan vi se att grafen tangerar  $x$ -axeln just för det  $x$ -värdet, där det finns en dubbelrot. Det är ingen tillfällighet att grafen vänder på  $x$ -axeln. I en kommande övning kan du själv försöka förklara det.

**SVAR:** Nollställena:  $x = -2$ ,  $x = -1$  och  $x = 2$ . Faktoreriserad form:  $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x+2)$

## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1064** Använd något digitalt verktyg för att bestämma nollställena till funktionerna

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- $f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
- $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 26x^2 - 24x + 8$
- $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

**1065** Använd något digitalt verktyg för att bestämma rötterna till ekvationerna

- $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = 0$
- $2x^4 - 18x^2 - 8x + 24 = 0$
- $3x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 33x - 18 = 0$

**1066** Använd något digitalt verktyg för att faktorisera funktionsuttrycken

- $f(x) = x^3 + 10x^2 - 125x - 750$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 - 52x^2 + 112x + 384$
- $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
- $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

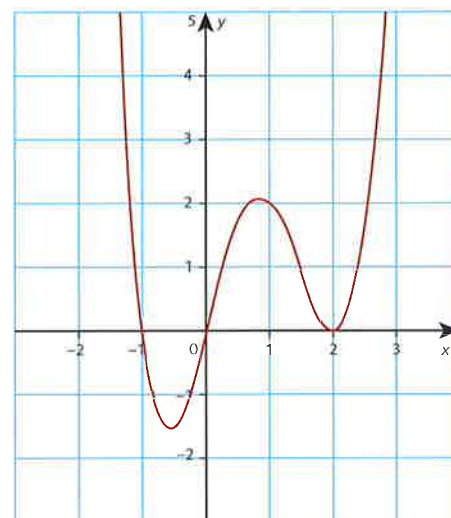
**1067** Om du i GeoGebra skriver in ett polynom  $f$  i faktorerad form, kan polynomet fås i den vanliga standardformen genom att skriva **Expandera(f)**. Använd valfri metod, t.ex. GeoGebras möjligheter, för att skriva följande polynom på standardformen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 5)$
- $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)(x + 5)$
- $f(x) = (x + 1)^4$
- $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

**\*\* 1068** I figuren visas grafen till polynomet  $p(x) = x(x - 2)^2(x + 1)$ . I polynomet finns det en faktor i kvadrat,  $(x - 2)^2$ . Förklara varför detta medför att  $x$ -axeln tangerar grafen i punkten  $(2, 0)$ . Gäller generellt även det omvända, att faktorn  $(x - a)^2$  måste ingå i polynomet, om  $x$ -axeln tangerar grafen i punkten  $(a, 0)$ ? **T**



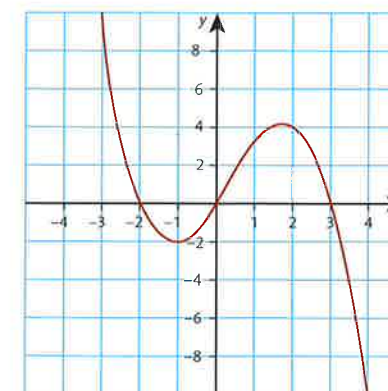
## Att bestämma polynom

Faktorer till ett polynom kan bestämmas genom att bestämma dess nollställena. Om exempelvis  $x = 3$  är ett nollställe, innehåller polynomet faktorn  $(x - 3)$ .

Polynomfunktionen i figuren är av tredje graden. Genom att avläsa dess nollställena kan vi konstatera att faktorerna  $(x + 2)$ ,  $x$  och  $(x - 3)$  ingår i polynomet. Eftersom det är ett polynom av tredje graden kan det inte finnas fler faktorer som innehåller variabeln  $x$ . Det innebär att polynomet kan skrivas

$$p(x) = kx(x + 2)(x - 3)$$

Hur konstanten  $k$  bestäms visas i exemplet.



### EXEMPEL

#### Bestämma ett polynom med hjälp av en graf

Skriv tredjegradspolynomet i grafen ovan på formen  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

#### LÖSNING:

Avläsning av nollställena ger att polynomet kan skrivas

$$p(x) = kx(x + 2)(x - 3)$$

Välj en punkt på grafen som inte motsvarar ett nollställe:  $(2, 4)$

Det innebär att  $p(2) = 4$ .

Det ger

$$4 = k \cdot 2(2 + 2) \cdot (2 - 3)$$

$$4 = k \cdot (-8)$$

$$k = \frac{4}{-8}$$

$$k = -0,5$$

Vi sätter in  $k = -0,5$  och multiplicerar parenteserna

$$p(x) = -0,5x(x + 2)(x - 3) = -0,5x(x^2 - 3x + 2x - 6) = -0,5x(x^2 - x - 6) = -0,5x^3 + 0,5x^2 + 3x$$

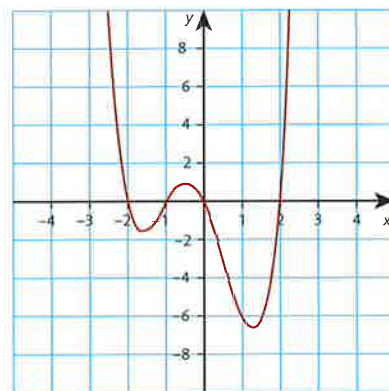
**SVAR:**  $p(x) = -0,5x^3 + 0,5x^2 + 3x$

## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

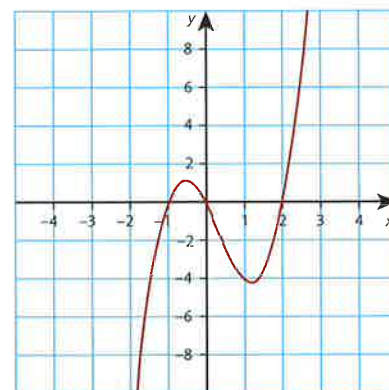
- 1069** Polynomet  $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  har tre nollställen,  $-2$ ,  $1$  och  $3$ . Faktorisera polynomet.
- 1070** Polynomet  $p(x) = 2x^3 + 8x^2 + 6x$  har tre nollställen,  $-3$ ,  $-1$  och  $0$ . Faktorisera polynomet.
- 1071** Ett polynom av andra graden har två nollställen,  $-1$  och  $3$ . Dessutom vet vi att  $p(0) = 6$ . Skriv polynomet i faktorerad form. **T**
- 1072** Ett polynom av tredje graden kan skrivas  $p(x) = k(x - 1)^3$ . Bestäm  $k$  då  $p(0) = 2$ .
- 1073** Ett polynom av tredje graden har tre nollställen,  $-1$ ,  $1$  och  $2$ . Dessutom vet vi att  $p(0) = 6$ . Skriv polynomet i faktorerad form.
- 1074** Ett polynom av tredje graden har tre nollställen,  $-1$ ,  $1$  och  $2$ . Dessutom vet vi att  $p(-2) = 12$ . Skriv polynomet i faktorerad form.
- 1075** Ett polynom av fjärde graden har fyra nollställen,  $-2$ ,  $0$ ,  $1$  och  $2$ . Dessutom vet vi att  $p(-1) = 6$ . Skriv polynomet i faktorerad form.
- 1076** Ett polynom av andra graden kan skrivas  $p(x) = kx^2 + c$ . Bestäm konstanterna  $k$  och  $c$  då  $p(0) = -2$  och  $p(2) = 0$ .
- 1077** Ett polynom av andra graden kan skrivas  $p(x) = k(x - 2)^2 + c$ . Bestäm konstanterna  $k$  och  $c$  då  $p(0) = -2$  och  $p(2) = 0$ .

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

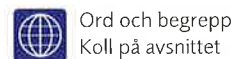
- \* 1078** Grafen visar en polynomfunktion av fjärde graden. Skriv polynomet i faktorerad form.



- \* 1079** Polynomet  $x^3 + px^2 + qx$  innehåller faktorerna  $(x + 2)$  och  $(x + 3)$ .  
a) Vilken är den tredje faktorn?  
b) Bestäm konstanterna  $p$  och  $q$ .
- \* 1080** Grafen visar en polynomfunktion av tredje graden. Skriv polynomet på formen  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ . **L**



- \*\* 1081** Polynomet  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$  har endast två nollställen,  $x = 1$  och  $x = 2$ . Skriv polynomet i faktorerad form. **T**



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## FINN FEM FEL

## UTMANING

1  
2  
3  
5  
6

### EXEMPEL 1

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Varför blir  $-1$  lika med  $1$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 2

$$\frac{6}{9} = \frac{3+3}{3 \cdot 3} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{3}{3}}{\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{1+1}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

Varför blir  $\frac{6}{9}$  lika med  $2$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 3

$$x = 2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x(x - 2) = x \cdot 0$$

$$\frac{x(x - 2)}{x - 2} = \frac{x \cdot 0}{x - 2}$$

$$x = 0$$

Varför ändras  $x = 2$  till  $x = 0$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 4

$$2 = \sqrt{4} = \pm 2$$

Varför blir  $2$  lika med  $\pm 2$ ? Vad är fel?

### EXEMPEL 5

Studera följande omskrivningar av en ekvation.

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$a = 0$$

Varför medför likheten  $a = b$  att  $a = 0$ ? Vad är fel?

Subtrahera med 2 på båda sidor.

Multiplitera med  $x$  på båda sidor.

Dividera med  $(x - 2)$  på båda sidor.

Förkorta i vänsterledet. Förenkla i högerledet.

Multiplitera båda sidor med  $a$ .

Subtrahera båda sidor med  $b^2$ .

Faktorisera båda sidor.

Dividera båda sidor med  $(a - b)$ .

Subtrahera båda sidor med  $b$ .

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 En konstant är ett polynom av grad 0.
- 2 Grafer till polynom med en term går alltid genom origo.
- 3 Uttrycket  $x^3 + 2x^2 - 4x^{-1} + 2$  är ett exempel på ett polynom.
- 4 Vid addition av två polynom av grad  $m$  och  $n$ , får det nya polynomet grad  $(m + n)$ .
- 5 Vid multiplikation av två polynom av grad  $m$  och  $n$ , får det nya polynomet grad  $(m + n)$ .
- 6 Polynomfunktioner av andra graden kan ha en terrasspunkt.
- 7 Om en polynomfunktion av tredje graden har ett lokalt maximum, måste den också ha ett lokalt minimum.
- 8 En funktion kan inte både vara växande och avtagande.
- 9 En tangent kan inte skära en kurva (dvs. korsa den).
- 10 Med ett nollställe menas en punkt, där en kurva skär y-axeln.

 Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

### POLYNOM MED DUBBELROT

Ett polynom kan i faktoreriserad form skrivas  $p(x) = (x - a)(x - b)^2$ , där  $b > a > 0$ .

- Hur många nollställen har polynomet?
- Hur många extrempunkter har polynomet?
- Vad kan man säga om extrempunkternas typ och x-koordinater?

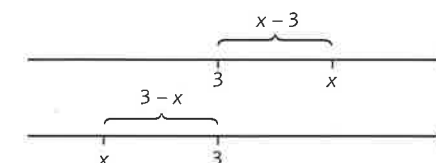
### UTMANING

## 1.2 Absolutbelopp



Absolutbelopp kan användas i en mängd sammanhang, där vi vill bestämma avstånd mellan punkter eller längder hos sträckor och vektorer. Av den anledningen ingår det ett moment i kursen som framförallt behandlar absolutbelopp i samband med avstånd och ekvationslösning.

Studera de två tallinjerna. På dessa är ett värde, 3, och ett obekant värde,  $x$ , markerade. Avståndet mellan dessa värden kan i övre fallet skrivas  $x - 3$ . Om samma uttryck används i det undre fallet, får vi ett negativt avstånd. Det är inte bra eftersom avstånd mellan två punkter brukar anges med positiva tal. I det här fallet skulle det vara bättre att skriva  $3 - x$  för avståndet.



I och med att  $x$  är obekant, kan man inte veta om det är större eller mindre än 3 och därmed vilket skrivsätt som bör användas för att beteckna avståndet. Det är då bättre att ha ett skrivsätt som gör att värdet alltid blir positivt, oavsett vilket tal som är störst. I sådana sammanhang kan man använda **absolutbelopp** som, enkelt uttryckt, förändrar negativa värden till positiva men låter positiva värden vara oförändrade. Exempelvis är absolutbeloppen av både  $-5$  och  $5$  lika med  $5$ . Absolutbelopp skrivs med hjälp av två lodräta streck enligt nedanstående exempel.

$$|-4| = 4$$

$$|-7| = 7$$

$$|12| = 12$$

I exemplet med tallinjen ovan kan vi då skriva att avståndet mellan punkterna 3 och  $x$  är  $|x - 3|$  oavsett värdet hos  $x$ . Exempelvis ges avståndet mellan punkterna  $-1$  och 3 av uttrycket  $|-1 - 3| = |-4| = 4$  (eller av  $|3 - (-1)| = |4| = 4$ ).

Det är dags att ge absolutbelopp en definition.

### Definition

Absolutbeloppet av talet  $a$  definieras enligt följande:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{då } a \geq 0 \\ -a & \text{då } a < 0 \end{cases}$$

Lägg märke till att om talet  $a$  är negativt kommer  $-a$  att vara positivt, vilket innebär att resultatet av absolutbeloppet alltid blir positivt.

Vid ekvationslösning, där absolutbelopp ingår, används vanligtvis definitionen för att dela upp ekvationslösningen i olika fall beroende på om värdet i absolutbeloppet är positivt eller negativt.

**Avstånd på tallinjen**

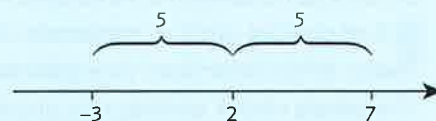
Bestäm alla  $x$  som uppfyller  $|x - 2| = 5$ .

**LÖSNING:**

Vi löser uppgiften både med hjälp av tallinjen och med hjälp av definitionen av absolutbelopp.

Metod 1, tallinje:

Eftersom vi söker de tal  $x$ , som befinner sig på avståndet 5 från punkten 2, kan vi använda tallinjen för att bestämma lösningen. Av figuren följer det därför att lösningarna ges av  $x = -3$  eller  $x = 7$ .



Metod 2, definition av absolutbelopp:

När uttrycket inuti absolutbeloppet är positivt gäller enligt definitionen att  $x \geq 2 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7$ .

När uttrycket inuti absolutbeloppet är negativt gäller istället enligt definitionen att  $x < 2 \Rightarrow x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3$ .

**SVAR:**  $x = -3$  eller  $x = 7$

**Lösning av ekvation med ett absolutbelopp**

Lös algebraiskt ekvationen  $|x + 1| = 7 - 2x$ .

**LÖSNING:**

För att lösa ekvationen använder vi definitionen av absolutbelopp:

$$|x + 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{då } x < -1 \quad (\text{Fall 1 nedan}) \\ x + 1 & \text{då } x \geq -1 \quad (\text{Fall 2 nedan}) \end{cases}$$

Då  $x = -1$ , fungerar båda fallen eftersom  $(x + 1) = 0$ . Det räcker dock att låta värdet  $x = -1$  ingå i det ena fallet.

Uttrycket i absolutbeloppet ändrar tecken då  $x = -1$ . Vi delar därför upp lösningen i två fall:



Fall 1,  $x < -1$ :

$$\begin{aligned} |x + 1| &= 7 - 2x \\ -(x + 1) &= 7 - 2x \\ -x - 1 &= 7 - 2x \\ -x + 2x &= 7 + 1 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$x = 8$  uppfyller inte olikheten  $x < -1$  och är därmed inte godkänd som rot.

Fall 2,  $x \geq -1$ :

$$\begin{aligned} |x + 1| &= 7 - 2x \\ x + 1 &= 7 - 2x \\ x + 2x &= 7 - 1 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$x = 2$  uppfyller olikheten  $x \geq -1$  och är därmed godkänd som rot.

**SVAR:**  $x = 2$

**Lösning av ekvation med flera absolutbelopp**

Lös algebraiskt ekvationen

$$|x + 3| + |2x - 4| = 19$$

**LÖSNING:**

$$|x + 3| = \begin{cases} -(x + 3) & \text{då } x < -3 \quad (\text{Fall 1 nedan}) \\ x + 3 & \text{då } x \geq -3 \quad (\text{Fall 2 och 3 nedan}) \end{cases}$$

$$|2x - 4| = \begin{cases} -(2x - 4) & \text{då } x < 2 \quad (\text{Fall 1 och 2 nedan}) \\ 2x - 4 & \text{då } x \geq 2 \quad (\text{Fall 3 nedan}) \end{cases}$$

Uttrycket  $x + 3$  ändrar tecken då  $x = -3$  och uttrycket  $2x - 4$  ändrar tecken då  $x = 2$ . Vi delar upp lösningen i tre fall,  $x < -3$ ,  $-3 \leq x < 2$  och  $x \geq 2$ .



Fall 1,  $x < -3$ :

$$\begin{aligned} |x + 3| + |2x - 4| &= 19 \\ -(x + 3) - (2x - 4) &= 19 \\ -x - 3 - 2x + 4 &= 19 \\ -3x + 1 &= 19 \\ -3x &= 18 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

$x = -6$  uppfyller olikheten  $x < -3$  och är därmed godkänd som rot.

Fall 2,  $-3 \leq x < 2$ :

$$\begin{aligned} |x + 3| + |2x - 4| &= 19 \\ (x + 3) - (2x - 4) &= 19 \\ x + 3 - 2x + 4 &= 19 \\ -x + 7 &= 19 \\ -x &= 12 \\ x &= -12 \end{aligned}$$

$x = -12$  uppfyller inte dubbelolikheten  $-3 \leq x < 2$  och är därmed inte godkänd som rot.

Fall 3,  $x \geq 2$ :

$$\begin{aligned} |x + 3| + |2x - 4| &= 19 \\ (x + 3) + (2x - 4) &= 19 \\ x + 3 + 2x - 4 &= 19 \\ 3x - 1 &= 19 \\ 3x &= 20 \\ x &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$x = \frac{20}{3}$  uppfyller olikheten  $x \geq 2$  och är därmed godkänd som rot.

**SVAR:**  $x = -6$  eller  $x = \frac{20}{3}$

**Lösning av olikheter**

Lös olikheten  $|2x + 1| > 5$

**LÖSNING:**

Bestäm först  $x$ -värdet då  $2x + 1$  ändrar tecken.

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} -(2x + 1) & \text{då } x < -\frac{1}{2} \quad (\text{Fall 1 nedan}) \\ 2x + 1 & \text{då } x \geq -\frac{1}{2} \quad (\text{Fall 2 nedan}) \end{cases}$$

Uttrycket i absolutbeloppet ändrar tecken då  $x = -\frac{1}{2}$ . Vi delar upp lösningen i två fall:

|                                                                                                                                         |                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Fall 1, <math>x &lt; -\frac{1}{2}</math>:</p> $ 2x + 1  > 5$ $-(2x + 1) > 5$ $-2x - 1 > 5$ $-1 - 5 > 2x$ $-6 > 2x$ $-3 > x$ $x < -3$ | <p>Fall 2, <math>x \geq -\frac{1}{2}</math>:</p> $ 2x + 1  > 5$ $2x + 1 > 5$ $2x > 5 - 1$ $2x > 4$ $x > 2$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$x < -3$  uppfyller olikheten  
 $x < -\frac{1}{2}$  och är därmed  
godkänd.

$x > 2$  uppfyller olikheten  
 $x \geq -\frac{1}{2}$  och är därmed  
godkänd.

**SVAR:**  $x < -3$  eller  $x > 2$

### Dubbelolikheter med hjälp av absolutbelopp

Skriv om följande olikheter med hjälp av absolutbelopp.

- a)  $-3 \leq x \leq 3$       b)  $-1 \leq x \leq 5$       c)  $x < -2$  eller  $x > 4$

#### LÖSNING:

- a) Medelvärde av de två gränspunkterna:  $\frac{-3+3}{2} = 0$   
Avståndet mellan gränspunkt och medelvärde:  $3 - 0 = 3$   
Slutsats:  $|x - 0| = |x| \leq 3$
- b) Medelvärde av de två gränspunkterna:  $\frac{-1+5}{2} = 2$   
Avståndet mellan gränspunkt och medelvärde:  $5 - 2 = 3$   
Slutsats:  $|x - 2| \leq 3$
- c) Medelvärde av de två gränspunkterna:  $\frac{-2+4}{2} = 1$   
Avståndet mellan gränspunkt och medelvärde:  $4 - 1 = 3$   
Slutsats:  $|x - 1| > 3$

**SVAR:** a)  $|x| \leq 3$       b)  $|x - 2| \leq 3$       c)  $|x - 1| > 3$

### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1082** Bestäm absolutbeloppens värden.

- a)  $|2 - 1|$   
b)  $|1 - 2|$   
c)  $|-2 - 1|$

**1083** Bestäm uttryckens värden.

- a)  $|3| + |-3|$   
b)  $|3| - |-3|$   
c)  $|3| - |3|$

**1084** Bestäm uttryckens värden.

- a)  $|2 - 3 \cdot 4|$   
b)  $-3 \cdot |1 - 2|$   
c)  $|-2 - 1|$

**1085** Markera på en tallinje samt tolka följande uttryck med ord.

- a)  $|x| = 4$   
b)  $|x - 2| = 3$   
c)  $|x + 3| = 5$

**1086** Markera på tallinjen de tal  $x$  för vilka det gäller att avståndet mellan

- a)  $x$  och 5 är 8  
b)  $x$  och  $-6$  är 1  
c)  $x$  och 3 är 7

**1087** Bestäm  $x$  om avståndet mellan  $x$  och

- a) punkten 3 är 4  
b) punkten 4 är 3  
c) punkten  $-3$  är 3

**1088** Bestäm  $x$  om avståndet mellan  $x$  och

- a) punkten 5 är större än 3  
b) punkten  $-4$  är mindre än 2  
c) punkten 2 är större än eller lika med 3

**1089** Skriv med hjälp av absolutbelopp ett samband som visar att avståndet mellan

- a)  $x$  och 4 är lika med 3  
b)  $2x$  och  $-3$  är lika med 5  
c)  $3x$  och 7 är mindre än 8

**1090** Bestäm  $x$ .

- a)  $|x - 3| = 4$       b)  $|x + 2| = 5$   
c)  $|x - 4| = 10$

**1091** Bestäm  $x$ .

- a)  $|2x - 3| = 5$       b)  $|2x + 3| = 5$   
c)  $|3 - x| = 2$

**1092** Bestäm  $x$ .

- a)  $|2x + 3| = x$       b)  $|x - 6| = 2x$   
c)  $|6 - x| = 2x$

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* **1093** Bestäm  $x$ .

- a)  $|4 - 2x| < 1$       b)  $|2x + 6| > x$   
c)  $|2x - 6| > x$

\* **1094** Uttryck med hjälp av absolutbelopp.

- a)  $-5 \leq x \leq 5$       b)  $3 < x < 5$   
c)  $x < -6$  eller  $x > 0$

\* **1095** Bestäm  $x$ .

- a)  $|x + 1| = |x + 3|$   
b)  $|x - 1| = |x + 3|$   
c)  $|x + 1| = |x - 3|$

\* **1096** a) Rita graferna till  $f(x) = 2|x - 2|$  och  $g(x) = |x + 1|$  i samma koordinatsystem och bestäm skärningspunkterna mellan graferna.

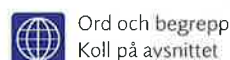
- b) Lös ekvationen  $2|x - 2| = |x + 1|$ .  
c) Jämför dina resultat i a- och b-uppgiften. Vilken slutsats drar du?

**\*\* 1097** Bestäm  $x$ .

- a)  $|x + 1| + |x + 3| = 10$
- b)  $|2x - 2| - |x - 3| = 7$
- c)  $|x + 1| - |1 - x| = 0$

**\*\* 1098** Lös olikheterna. **T**

- a)  $|3x - 2| < |x - 6|$
- b)  $x + |x - 3| \geq 9$
- c)  $2x + |x - 4| \geq |x - 2| + 8$



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

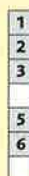
### KVADRATROTEN UR EN KVADRAT ELLER TVÄRTOM

### UTMANING

Jämför de tre funktionerna

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \quad g(x) = \sqrt{x^2} \quad h(x) = |x|$$

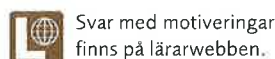
Beskriv med ord de likheter och skillnader du hittar och förklara dem.



## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1  $|x - y| = |y - x|$
- 2  $|x| + |y| = |x + y|$
- 3  $|x| - |y| = |x - y|$
- 4  $|x| \cdot |y| = |xy|$
- 5  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- 6  $|x|^2 = x^2$



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.



## 1.3 Rationella uttryck



Teorigenomgång

En **rationell funktion** är en funktion som kan skrivas på formen:  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

där  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom. Kvoten i högerledet kallas för ett **rationellt uttryck**.

I det här avsnittet ska vi förenkla rationella uttryck och lösa ekvationer som innehåller rationella uttryck.

### Förenkling av rationella uttryck

Ett rationellt uttryck är en kvot av två polynom. Ett exempel är

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, x \neq 3$$

Eftersom nämnaren inte får vara 0, lägger vi till villkoret  $x \neq 3$ . Man kan dock låta bli att skriva villkoret. Det gäller oavsett det skrivs eller inte.

Vi strävar alltid efter att ge matematiska uttryck en så enkel form som möjligt. Om vi vill förenkla ett rationellt uttryck, måste täljare och nämnare skrivas som produkter av faktorer. Vi kan nämligen förkorta som i följande exempel

$$\frac{a \cdot b^2 \cdot c}{b \cdot c} = a \cdot b$$

Däremot är det inte tillåtet att göra några förkortningar om uttrycket har följande utseende

$$\frac{a + b^2 + c}{b + c}$$

Här följer några exempel som illustrerar hur rationella uttryck kan förenklas.

### Förenkling av rationella uttryck

Förenkla så mycket som möjligt.

$$\text{a) } \frac{2x^3y}{4x^2y^2} \quad \text{b) } \frac{2x^2 + y}{4x^2 + y^2}$$

#### LÖSNING:

a) Eftersom både täljaren och nämnaren enbart består av faktorer är det möjligt

$$\text{att göra förkortningar enligt potenslagarna: } \frac{2x^3y}{4x^2y^2} = \frac{x}{2y}$$

b) Täljaren och nämnaren saknar faktorer och kan inte heller faktoriseras. Därmed är det omöjligt att förenkla uttrycket.

**SVAR:** a)  $\frac{x}{2y}$  b) Uttrycket kan inte förenklas.

EXEMPEL

## Förenkling genom ekvationslösning

Förenkla  $\frac{2x^2-8x+6}{x^2-9}$  så mycket som möjligt.

**LÖSNING:**

Nämnaren faktoriseras enligt konjugatregeln

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

För att kunna faktorisera täljaren löser vi ekvationen  $2x^2 - 8x + 6 = 0$ .

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$x = 2 \pm 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Det ger oss följande förenkling:

$$\frac{2x^2-8x+6}{x^2-9} = \frac{2(x^2-4x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x-1)}{(x+3)}$$

**SVAR:**  $\frac{2(x-1)}{(x+3)}$

## Förenkla genom att göra liknämigt

Förenkla  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)}$  så mycket som möjligt.

**LÖSNING:**

Eftersom vi har tre rationella uttryck, inleder vi med att göra dessa liknämiga för att kunna skriva uttrycken på ett gemensamt bråkstreck. Därefter förenklar vi

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{x+2}{x(x+2)} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{3x+x+2-2}{x(x+2)} = \frac{4x}{x(x+2)} = \frac{4}{x+2}$$

**SVAR:**  $\frac{4}{x+2}$

## Förenkla dubbla rationella uttryck

Förenkla  $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y}$

**LÖSNING:**

För att förenkla uttrycket gör vi i tur och ordning följande steg:

- 1 Gör täljaren liknämig. 2 Skriv täljaren på ett gemensamt bråkstreck.
- 3 Skriv nämnaren som ett rationellt uttryck. 4 Gör om division till en multiplikation.
- 5 Skriv på ett bråkstreck. 6 Bryt ut  $-1$  ur täljaren. 7 Förenkta.

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y} = \frac{\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}}{x - y} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{x - y} = \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{1}{x-y} = \frac{y-x}{xy(x-y)} = \frac{-(x-y)}{xy(x-y)} = -\frac{1}{xy}$$

**SVAR:**  $-\frac{1}{xy}$

## Villkor för att förenkling är möjlig

- a) Undersök om det går att förenkla uttrycket  $\frac{x-5}{x^2+2x-35}$  utan att faktorisera andragradspolynomet.
- b) Förenkla uttrycket.

**LÖSNING:**

- a) Om det går att förenkla ett rationellt uttryck måste samma faktor finnas i täljaren och nämnaren. Det innebär att de har ett gemensamt nollställe. Täljaren har värdet 0 för  $x = 5$ . Sätt därför in  $x = 5$  i nämnarens uttryck.

$$x^2 + 2x - 35 = 5^2 + 2 \cdot 5 - 35 = 0$$

Nämnaren har också ett nollställe för  $x = 5$  och innehåller därför faktorn  $(x - 5)$ .

Slutsats: Det går att förenkla uttrycket.

- b) Nämnaren kan skrivas på formen  $(x - 5)(x + 7)$ . Eftersom konstanttermen är  $-35$  måste produkten av  $-5$  och  $a$  ha värdet  $-35$ . Det innebär att  $a = 7$ .

$$\text{Kontroll: } (x - 5)(x + 7) = x^2 + 7x - 5x - 35 = x^2 + 2x - 35$$

Om vi har den ena faktorn till ett andragradspolynom är den här tekniken för att få den andra faktorn oftast snabbare än att lösa motsvarande andragradsekvation.

$$\frac{x-5}{x^2+2x-35} = \frac{x-5}{(x-5)(x+7)} = \frac{1}{x+7}$$

**SVAR:**  $\frac{1}{x+7}$

## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1100** Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{6x^3}{4x^2}$     b)  $\frac{3x}{9x^3}$     c)  $\frac{4x^2y}{2xy}$

**1101** Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{8x^3y^2z}{4x^2y}$     b)  $\frac{x^2y^2z^2}{x^3y^2z}$     c)  $\frac{x+y}{xy}$

**1102** Förenkla om möjligt uttrycken.

a)  $\frac{x+x}{xy}$     b)  $\frac{x+x}{y+y}$     c)  $\frac{x-y}{y-x}$

**1103** Beräkna uttryckets värde genom att först göra förkortningar.

$$\frac{7 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 22}{9 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 20}$$

**1104** Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt genom att bryta ut faktorer.

a)  $\frac{x^2-3x}{2x-6}$     b)  $\frac{4x^2+8x}{4x^2-4x}$   
c)  $\frac{2x^2y-4xy^2}{2xy^2-x^2y}$

**1105** Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt med hjälp av konjugat- eller kvadreringsreglerna.

a)  $\frac{x^2-36}{2x-12}$     b)  $\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$   
c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

**1106** Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{2x+4}$   
b)  $\frac{3}{3x-9} - \frac{2}{2x^2-6x}$   
c)  $\frac{8}{x^2-4} - \frac{2}{x-2}$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* **1107** a) Visa att  $\frac{3-2x}{2x-3} = -1$

b) Förenkla  $\frac{1-4x}{4x-1} - \frac{9-5x}{5x-9}$

c) Förenkla  $\frac{8-6x}{3x-4}$

\* **1108** Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2-2x}$     b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4}$   
c)  $\frac{x^2+16x+15}{x^2+x}$

\* **1109** Undersök om faktorn  $(x+5)$  ingår i båda polynomen i dessa uttryck.

a)  $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$     b)  $\frac{x^2+4x-5}{x^2+25}$   
c)  $\frac{x^2-5x}{x^2+2x-15}$  **T**

\* **1110** Förenkla de uttryck i uppgift 1109, där båda polynomen innehåller faktorn  $(x+5)$ .

\* **1111** Förenkla uttrycket  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{x(x-1)^2}{x^4}$  så mycket som möjligt.

\* **1112** Faktorisera nämnarna, skriv på ett bråkstreck och förenkla.

$$\frac{1}{x^3-4x} + \frac{1}{x^3+4x^2+4x}$$

\*\* **1113** Förenkla uttrycket  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$  **T**

\*\* **1114** Förenkla uttrycket

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
 **L**

## Lösning av rationella ekvationer



Då ekvationer som innehåller uttryck på formen  $\frac{p(x)}{q(x)}$  ska lösas måste följande beaktas:

Polynomet i nämnaren får inte ha värdet 0. Om någon av rötterna ger ett värde som innebär att nämnaren blir 0, måste den roten uteslutas.

Rationella ekvationer på formen  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  löses genom att sätta  $p(x) = 0$ . Kvoten kan aldrig bli 0 om inte täljaren har värdet 0.

Rationella ekvationer på formen  $\frac{p(x)}{q(x)} = h(x)$  löses genom att multiplicera med  $q(x)$  på båda sidor,

vilket ger ekvationen  $p(x) = h(x) \cdot q(x)$ . Fortfarande gäller dock att  $q(x) \neq 0$ .

Tre exempel får illustrera ekvationslösning med rationella uttryck.

### Ekvationslösning med rationellt uttryck (I)

Lös ekvationen  $\frac{x^2-2x}{4x-8} = 0$

**LÖSNING:**

Eftersom nämnaren inte får ha värdet 0 gäller att  $x \neq 2$ .

Vi löser följande ekvation:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = 2$$

Den andra roten är inte tillåten. Då återstår endast  $x = 0$ .

Kommentar: Om lösningen hade inletts med faktorisering av polynomen, hade vi endast fått den godkända roten:

$$\frac{x^2-2x}{4x-8} = 0$$

$$\frac{x(x-2)}{4(x-2)} = 0$$

$$\frac{x}{4} = 0$$

$$x = 0$$

**SVAR:**  $x = 0$

### Ekvationslösning med rationellt uttryck (II)

Lös ekvationen  $\frac{x^2-2x}{4x-5} = 1$

**LÖSNING:**

Eftersom nämnaren inte får ha värdet 0 gäller att  $x \neq \frac{5}{4}$ .

$$\frac{x^2-2x}{4x-5} = 1$$

Multiplitera med  $4x-5$  på båda sidor.

$$x^2-2x = 4x-5$$

Samla alla termer i vänsterledet.

$$x^2-2x-4x+5=0$$

Förenkla.

$$x^2-6x+5=0$$

Lös ekvationen.

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2-5}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 3 \pm 2$$

$$x = 1 \text{ eller } x = 5$$

**SVAR:**  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Båda rötterna är tillåtna.

### Ekvationslösning med rationellt uttryck (III)

Lös ekvationen  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} = 4$

**LÖSNING:** Först undersöker vi förbjudna värden, dvs. sådana som innebär att något av polynomen i nämnarna får värdet 0.

$$\begin{aligned} x &= 0 & x+2 &= 0 \\ & & x &= -2 \end{aligned}$$

Alltså gäller villkoren  $x \neq 0$  och  $x \neq -2$ .

För att slippa rationella uttryck multiplicerar vi båda leden med  $x(x+2)$ .

$$x(x+2) \left( \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+2)} \right) = 4x(x+2)$$

Multiplitera in  $x(x+2)$ .

$$\frac{3x(x+2)}{x+2} + \frac{x(x+2)}{x} - \frac{2x(x+2)}{x(x+2)} = 4x^2 + 8x$$

Förkorta.

$$3x + (x+2) - 2 = 4x^2 + 8x$$

Förenkla.

$$4x = 4x^2 + 8x$$

$$0 = 4x^2 + 4x$$

Faktorisera.

$$4x(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x = -1$$

Roten  $x = 0$  är inte tillåten enligt undersökningen ovan.

**SVAR:**  $x = -1$

### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**1115** Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-9}{2x-12} = 0$     b)  $\frac{2x^2-8x}{x+4} = 0$

c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 0$

**1116** Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-2} = 0$

b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4} = 0$

c)  $\frac{x^2+16x+15}{x^2+x} = 0$

**1117** Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-2} = 1$

b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+4} = 2$

c)  $\frac{x^2+16x}{x^2+x} = x$

**1118** Lös ekvationerna

a)  $\frac{1}{x} - x = 0$     b)  $\frac{x-2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$

c)  $\frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = 0$

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

**\* 1119** Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$     b)  $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{2x+4} = 0$

c)  $\frac{3}{3x-9} - \frac{2}{2x^2-6x} = 0$  

**\* 1120** Lös ekvationen  $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2} = 0$

**\* 1121** Undersök om det finns några värden på  $x$  som medför att kvoten mellan polynomen  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  och  $g(x) = x^2 - 4x + 3$  har värdet 1.

**\*\* 1122** Lös ekvationen

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet



## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Uttrycket  $\frac{1}{p(x)}$  är ett rationellt uttryck.
- 2 En variabel i ett rationellt uttryck kan ha ett värde som inte är definierat.
- 3 En variabel i ett rationellt uttryck har alltid minst ett värde som inte är definierat.
- 4 Om polynomen i ett rationellt uttryck har ett gemensamt nollställe kan uttrycket förenklas.
- 5  $(x+2)^3(x^3-8)^{-2}$  är ett rationellt uttryck.
- 6 Ekvationen  $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$  har samma rötter som ekvationen  $p(x) = 0$ .



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## 1.4 Diskreta och kontinuerliga funktioner samt gränsvärden



Teorigenomgång

Diskreta och kontinuerliga funktioner har du mött många gånger utan att använda just dessa benämningar medan gränsvärde är ett helt nytt begrepp. Gränsvärde introduceras i detta kapitel och används i kapitel 2 för att definiera derivata, en av grundpelarna inom matematik och fysik.

### Diskreta och kontinuerliga funktioner

Betrakta talserien 1, 3, 6, 10, ... Kan du se ett mönster? Kan du bestämma en formel för värdet hos tal nr  $n$ ? Talföljden kan illustrera antalet cirklar som bildar trianglarna i figuren.

Förmodligen är det lättare att se mönstret än att bestämma formeln. Genom att kopiera den fjärde figuren, rotera den 180° och placera den intill den ursprungliga, kan vi se att det blir  $4 \cdot 5$  cirklar i den.

I triangel nr fyra finns det då  $\frac{4 \cdot 5}{2}$  cirklar. På motsvarande sätt kan man visa att triangel nr 3 innehåller  $\frac{3 \cdot 4}{2}$  cirklar. En formel (eller en funktion) för antalet cirklar,  $N$ , i triangel nr  $n$  ges därför generellt av  $N = \frac{n(n+1)}{2}$ , där  $n$  är ett positivt heltal.

Definitionsmängden till funktionen  $N(n)$  består av alla positiva heltal och funktionen är därmed ett exempel på en **diskret funktion**. En diskret funktion är en funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden. I det aktuella fallet är avståndet mellan varje värde ett.

Studera nu istället funktionen  $y = x^2 + x$ . Om man inte anger någon definitionsmängd, tolkas det som att alla reella tal ingår i mängden. Funktionen kan därför illustreras grafiskt av en sammanhängande kurva. Detta är ett exempel på en **kontinuerlig funktion**. En kontinuerlig funktion är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

**DISKRET FUNKTION** En funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden.

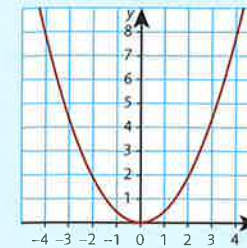
**KONTINUERLIG FUNKTION** En funktion som är sammanhängande (utan avbrott eller hopp) i samtliga intervall i definitionsmängden.

Nedan följer exempel på både diskreta och kontinuerliga funktioner. Det finns även ett exempel på en funktion som varken är diskret eller kontinuerlig.

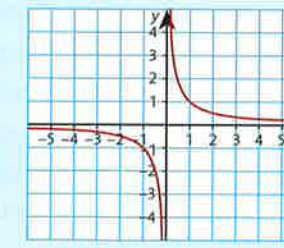
EXEMPEL

### Grafer

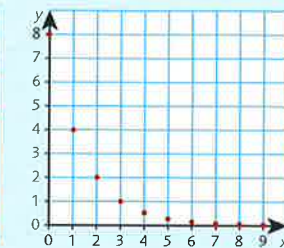
Bestäm för varje funktion om den är diskret, kontinuerlig eller inget av dessa alternativ.



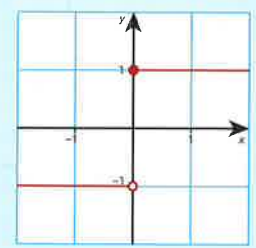
$$f_1(x) = \frac{x^2}{2}, D_f = \mathbb{R}$$



$$f_2(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$



$$f_3(x) = \frac{8}{2^x}, D_f = \mathbb{N}$$



$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

### LÖSNING:

$f_1(x)$  är kontinuerlig eftersom den är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

$f_2(x)$  är kontinuerlig eftersom den är sammanhängande i hela sin definitionsmängd. Hoppet sker då  $x = 0$  men den punkten ingår inte i definitionsmängden.

$f_3(x)$  är diskret eftersom avståndet mellan varje värde i definitionsmängden är ett.

$f_4(x)$  är varken diskret eller kontinuerlig. Definitionsmängden består av hela det reella talplanet och ett hopp sker vid ett värde som ingår i definitionsmängden.

**SVAR:** Kontinuerliga:  $f_1(x)$  och  $f_2(x)$ . Diskret:  $f_3(x)$ .

### ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

Avgör i uppgift 1123–1126 om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

1123 a)  $f(x) = 2x + 3, D_f = \mathbb{R}$

b)  $g(x) = x^2, D_g = \mathbb{R}$

c)  $h(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

1124 a)  $f(x) = -x^3, D_f = \mathbb{R}$

b)  $g(x) = 10^x, D_g = \mathbb{R}$

c)  $h(x) = \lg x, x > 0$

1125 a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

b)  $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$

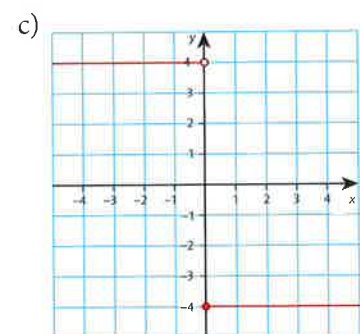
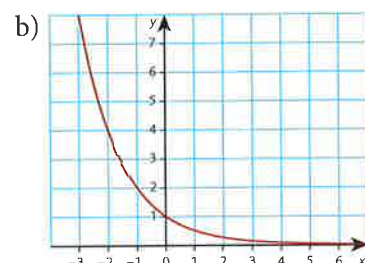
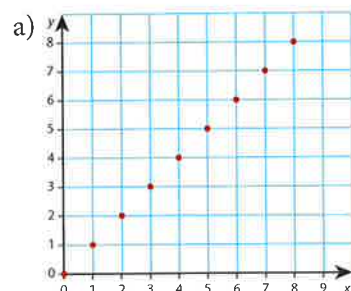
c)  $h(x) = 2x, D_h = \mathbb{N}$

1126 a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, D_f = \mathbb{N}$

- 1127 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.



## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 1128 Inkomsterna  $I(x)$  kr vid försäljning av  $x$  pocketböcker på torget en lördag förmiddag ges av  $I(x) = 29x$ .

Kostnaderna vid försäljningen ges av  $K(x) = 400 + 12x$ .

- Bestäm en funktion för resultatet av försäljningen.
- Avgör om funktionen är diskret eller kontinuerlig.

- 1129 I en fyrsidig pyramid av kulor finns det en kula i översta lagret, fyra kulor i lagret under och nio kulor i nästa..

- Hur många kulor finns det i det fjärde lagret uppifrån?
- Hur många kulor finns det i lager nr  $n$  uppifrån?
- Vilken typ av funktion, diskret eller kontinuerlig, är det som beskriver antalet kulor i lager nr  $n$ ?



- 1130 I den fyrsidiga pyramiden i uppgift 1129 kan man istället räkna det sammanlagda antalet kulor.

- Hur många kulor finns det i en pyramid med ett, två, tre respektive fyra lager?
- Formeln  $N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  anger antalet kulor  $N$  i en pyramid med  $n$  lager. Undersök om formeln stämmer med dina värden.
- Vilken typ av funktion, diskret eller kontinuerlig, är det som beskriver antalet kulor i en pyramid med  $n$  lager?

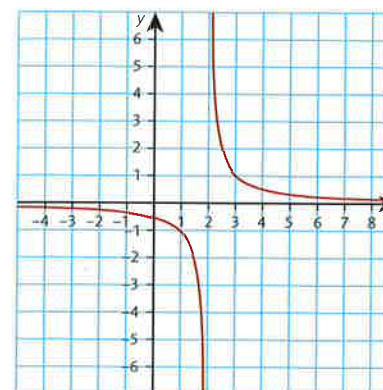
- \* 1131 Förklara varför  $f(x)$  är kontinuerlig och  $g(x)$  inte är kontinuerlig.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ 0 & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

## Gränsvärden

I figuren visas grafen av den kontinuerliga funktionen  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ .



### Vad händer för mycket stora $x$ -värden?

För  $x$ -värden långt från 0 ligger funktionens graf nära  $x$ -axeln. Då  $x = 12$  får vi

$$f(12) = \frac{1}{12-2} = 0,1$$

Ju större värde  $x$  får, ju mindre värde får funktionen  $f(x)$ . Funktionens värde kan komma hur nära 0 som helst men värdet blir aldrig 0 oavsett hur stort  $x$  är. Vi säger att funktionens värde går mot 0 då  $x$  går mot oändligheten eller att **gränsvärdet** av  $f(x)$  är 0 då  $x$  går mot oändligheten. Det finns ett skrivsätt för att uttrycka detta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Skrivsättet läses "limes av  $f(x)$  då  $x$  går mot  $\infty$  är 0". Ordet **limes** kommer från latin och betyder "gräns" och symbolen  $\infty$  betyder oändligheten.

Det går också bra att skriva  $f(x) \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow \infty$ , vilket läses " $f(x)$  går mot noll då  $x$  går mot oändligheten".

### Vad händer då vi närmar oss $x = 2$ ?

Vi ska även studera vad som händer nära  $x = 2$ . Som framgår av grafen avtar funktionen snabbare och snabbare då vi närmar oss  $x = 2$  från vänster. Om vi däremot närmar oss samma värde från höger, växer funktionens värde alltmer. Det finns ingen gräns för hur stort funktionsvärdet kan bli. Exempelvis gäller följande:

$$f(2,00001) = \frac{1}{2,00001-2} = \frac{1}{0,00001} = 100\,000$$

$$f(1,99999) = \frac{1}{1,99999-2} = \frac{1}{-0,00001} = -100\,000$$

Det saknas därför ett gränsvärde då  $x$  närmar sig värdet 2.

Detta uttrycker vi genom att skriva att  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  inte existerar.

## Gränsvärde av typen "0/0"

Låt oss också studera funktionen  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ,  $x \neq 2$ . Grafen av  $g(x)$  visas i figuren.

Funktionen saknar gränsvärde då  $x$  går mot oändligheten eftersom den växer konstant mot allt högre värden. Däremot ser det ut som att  $g(2) = 4$  trots att nämnaren blir noll då  $x = 2$ . Varför växer eller avtar inte funktionen alltså när  $x$  närmar sig värdet 2 som i föregående exempel?

Det som skiljer den här funktionen från den förra är att även täljaren närmar sig värdet 0 då  $x$  närmar sig 2. Faktorn  $(x - 2)$  ingår alltså även i täljaren. Enligt konjugatregeln kan täljaren faktoriseras så att funktionen skrivs

$$g(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Vi får emellertid inte förkorta bort uttryck som har värdet 0. Om det vore tillåtet, skulle exempelvis följande omskrivningar leda fram till en orimlighet.

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| $a = 0$                      | Skriv $a$ som $2a - a$        |
| $2a - a = 0$                 | Addera $a$ till båda leden.   |
| $2a = a$                     | Dividera båda leden med $a$ . |
| $\frac{2a}{a} = \frac{a}{a}$ | Förenkla                      |
| $2 = 1$                      |                               |

Däremot får vi förkorta bort  $(x - 2)$  då  $x \neq 2$ . Genom att inte tillåta att  $x$  har värdet 2 men att det får komma hur nära 2 som helst är förkortningen tillåten. Det löser vi genom att studera gränsvärdet av funktionen då  $x$  närmar sig 2:

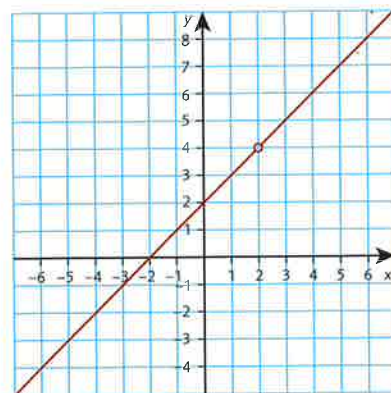
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

Detta tolkas alltså som att  $g(x)$  går mot värdet 4 då  $x$  går mot värdet 2. Vi kan också uttrycka samma sak med skrivsättet

$$g(x) \rightarrow 4 \text{ då } x \rightarrow 2.$$

Däremot kan vi inte skriva att  $g(x) = 4$  då  $x = 2$ , dvs.  $g(2) = 4$ . Den ursprungliga funktionen är ju inte definierad för  $x = 2$ .

**Om faktorn  $(x - a)$  ingår i nämnaren hos en rationell funktion, kan ett gränsvärde endast existera då  $x \rightarrow a$ , om faktorn  $(x - a)$  även ingår i täljaren. Polynomen i täljaren och nämnaren måste med andra ord ha ett gemensamt nollställe för  $x = a$ .**



## Gränsvärden då $x$ går mot oändligheten

Beräkna gränsvärdet då  $x$  går mot oändligheten för funktionerna

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$       b)  $g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1}$       c)  $h(x) = \frac{2x}{x - 1}$

### LÖSNING:

a) Eftersom både täljaren och nämnaren går mot oändligheten måste vi avgöra vilken av dem som växer snabbast då  $x$  går mot oändligheten. Vi börjar därför med att skriva om funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \frac{x^2}{x^2(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

Det innebär att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

b) Även här går både täljaren och nämnaren mot oändligheten. För att avgöra vilken av dem som växer snabbast använder vi en metod där man dividerar alla termer med den dominerande faktorn. Det innebär i det här fallet att man söker den potens av  $x$  som har störst exponent och dividerar både täljare och nämnare med den potensen.

$$g(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Det innebär att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - 3}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 3}{1 + 0} = -3$$

c) Här ska vi visa två alternativa lösningar (förutom en tredje, som görs på samma sätt som ovanstående):

Metod 1:

Om  $x$  är mycket stort (vilket brukar skrivas  $x \gg 0$ ) kan vi göra approximationen  $x - 1 \approx x$ .

Det innebär att  $h(x) = \frac{2x}{x - 1} \approx \frac{2x}{x} = 2$  för stora värden på  $x$ . Slutsatsen blir då att  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$

Metod 2:

Vi skriver om  $f(x)$  enligt följande, där vi delar upp det rationella uttrycket i två delar:

$$\frac{2x}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 2}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} + \frac{2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} + \frac{2}{x - 1} = 2 + \frac{2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{2}{x - 1} \right) = 2 + 0 = 2$$

**SVAR:** a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2} = 0$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{x^2 + 1} = -3$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$

### Gränsvärden då $x$ går mot ett bestämt värde

Undersök om gränsvärden existerar då  $x$  går mot 1 och bestäm i så fall dessa.

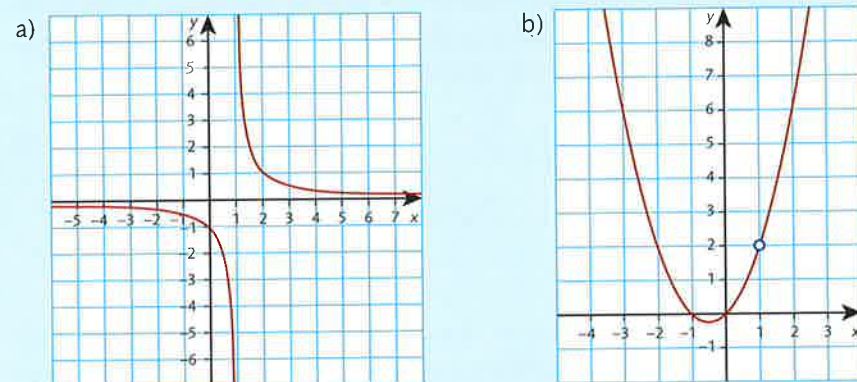
$$a) f(x) = \frac{1}{x-1} \quad b) g(x) = \frac{x^3 - x}{x-1}$$

#### LÖSNING:

- a) Eftersom täljaren har värdet 1 och nämnaren har värdet 0 då  $x = 1$ , existerar inte något gränsvärde då  $x$  går mot 1.
- b) Eftersom både täljaren och nämnaren har värdet 0 då  $x = 1$ , kan det existera ett gränsvärde då  $x$  går mot 1. Vi faktorerar täljaren, förkortar och beräknar gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

En studie av graferna bekräftar våra slutsatser.



**SVAR:** a) Det existerar inget gränsvärde då  $x$  går mot 1.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x-1} = 2$$

Om  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  är en rationell funktion, existerar gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$  om  $\text{grad } p(x) \leq \text{grad } q(x)$  och är lika med noll om  $\text{grad } p(x) < \text{grad } q(x)$ .  
Om  $g(a) = 0$  kan gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  endast existera om  $f(a) = 0$ .

### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 1132 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x+2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1}$$

- 1133 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$$

- 1134 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x-4}$$

- 1135 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x-2} + \frac{4x-8}{x^2 - 4} \right)$$

- 1136  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$  och  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ .

Bestäm

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- 1137 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{100x^2 + 1}$$

- 1138 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* 1139 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - (2-h)^2}{2h}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$$

- \*\* 1140 Bestäm gränsvärdet

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(3+h)^2} - \frac{1}{3^2}}{h}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} \quad \text{T}$$



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 1.4

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 En funktion är antingen diskret eller kontinuerlig.
- 2 Om det finns ett avstånd mellan varje värde i en funktions definitionsmängd är funktionen diskret.
- 3 Om en funktion är diskret, finns det ett avstånd mellan varje värde i funktionens värdemängd
- 4 Funktionen  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , är inte kontinuerlig eftersom funktionen gör ett hopp vid y-axeln.
- 5 Gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  kan existera om  $f(a) = 0$  då  $g(a) = 0$ .
- 6 Gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  kan existera om  $f(a) \neq 0$  då  $g(a) = 0$ .



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1  
2  
3  
4  
5  
6

### KONJUGATTRIX

### UTMANING

Vad blir värdet av  $\left(\sqrt{x+1000\,000} - \sqrt{x}\right)$  för stora  $x$ ?

- Undersök först vad som händer med differensen för olika  $x$ -värden med hjälp av räknare eller dator.
- Bestäm  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+1000\,000} - \sqrt{x}\right)$  genom att förlänga med konjugatet till uttrycket  $\left(\sqrt{x+1000\,000} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+1000\,000} + \sqrt{x}\right)$ .

1  
2  
3  
4  
5  
6

## 1.5 Problemlösning

I detta kapitel har vi bland annat studerat polynom, absolutbelopp, rationella uttryck och gränsvärden. Vi avslutar med några uppgifter av problemlösningsskäraktar inom dessa områden. Vid problemlösning kan det ofta vara lämpligt att dela upp lösningen i följande fyra steg.

1. Förstå problemställningen.
2. Gör en plan.
3. Genomför planen.
4. Se tillbaka; behöver planen revideras eller är du nöjd med lösningen?

Lösningen kan ibland också underlättas av att använda följande strategier:

- Lös först ett liknande men enklare problem.
- Förenkla om möjligt ingående uttryck.
- Byt variabler mot tal för att se eventuella mönster och återgå sedan till variabler.

Följande problem har Oskar, en elev på Polhemskolan i Lund, tillverkat som övningsuppgifter till klasskamrater inför ett kapitelprov. Försök att lösa dem utan digitala verktyg.

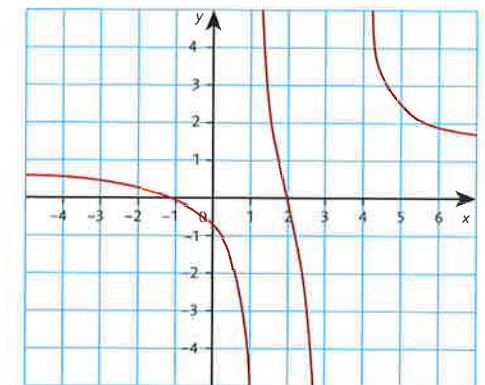
### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* 1141 Bestäm  $|a - b| + |b - a| - |2a - 2b|$ .
- \* 1142 För två polynom  $p(x)$  och  $q(x)$  gäller att  $\text{grad}(p(x) \cdot q(x)) = \text{grad}(p(x))$ . Bestäm  $\text{grad}(q(x))$ .
- \* 1143 Vilka nollställen har polynomet  $p(x) = x^n + 2x^{n-1} + x^{n-2}$  då  $n$  är ett heltal större än 2?
- \* 1144  $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$  har tre nollställen varav ett då  $x = 3$  och ett då  $x = 1$ . Skriv  $p(x)$  i faktorerad form.
- \* 1145 Lös ekvationen

$$\frac{2}{x} - \frac{x^2 + x - 6}{4 - 2x} = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} - \frac{\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$$

- \*\* 1146 Ge ett polynom  $p(x)$  av grad tre om polynoms graf går genom punkten  $(-1, 3)$  och om  $p(0) = p(1) = p(-2) = 2$ . **T**

- \*\* 1147 Figuren visar grafen till en rationell funktion,  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , där  $q(x) = 2x^2 - 8x + 6$ . Dessutom gäller att  $\text{grad}(p(x) - q(x)) = 1$ . Bestäm  $p(x)$ . **T**



1.1 POLYNOM

- För vilka värden på  $x$  gäller att följande funktioner är växande?  
a)  $y = 2x$       b)  $y = 2x^2$       c)  $y = -2x^2$
- Bestäm de lokala extrempunkterna och avgör om de är lokala maximi- eller lokala minimipunkter för funktionerna.  
a)  $y = x^2$       b)  $y = x^2 + 2x - 8$       c)  $y = -3(x - 2)^2 - 4$
- Lös ekvationerna.  
a)  $x^2 + 2x = 8$       b)  $2(x - 2)(2x + 2) = 0$       c)  $x(x - 2) = 3$
- Faktorisera polynomen.  
a)  $x^2 - 4$       b)  $x^3 - 4x^2 + 4x$       c)  $x^4 - 16x^2$
- Avgör och motivera om det finns tredjegradspolynom som  
a) saknar nollställe  
b) har ett nollställe  
c) har två nollställen  
d) har tre nollställen
- a) Kontrollera att  $(x + 2)$  är en faktor i polynomet  $3x^2 + 4x - 4$ .  
b) Vilken är den andra faktorn?
- Höjden  $h(t)$  m av ett simhopp ges av funktionen  $h(t) = 10 + 5,0t - 5,0t^2$ .  
Tiden  $t$  är angiven i sekunder.  
Bortse från simhopparens längd vid beräkningarna.  
a) På vilken höjd startar hoppet?  
b) Hur högt når hopparen?  
c) Efter hur lång tid når hopparen vattenytan?
- Ett polynom  $p(x)$  av tredje graden har tre nollställen,  $x = -1$ ,  $x = 2$  och  $x = 3$ .  
Dessutom gäller att  $p(0) = -12$ . Skriv polynomet i faktorerad form.

1.2 ABSOLUTBELOPP

1.3 RATIONELLA UTTRYCK

- Skriv med hjälp av absolutbelopp ett samband som visar att avståndet mellan  
a)  $x$  och 3 är lika med 5      b)  $2x$  och  $-7$  är större än 4
- Förenkla uttrycken  
a)  $\frac{x^2 - 100}{2x - 20}$       b)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{4x - 12}$
- Förenkla uttrycken  
a)  $\frac{2x^2 - 8x - 10}{4x^2 - 4}$       b)  $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{1-2x}{x(x-1)}$
- Lös ekvationerna  
a)  $\frac{x^2 - 16}{2x - 12} = 0$       b)  $\frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6} = 0$
- Lös ekvationerna  
a)  $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 2$       b)  $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{18}{5x}$
- Bestäm  $x$ .  
a)  $|x - 1| + |x - 5| = 8$       b)  $|2x + 2| - |x - 1| = 5$
- Ett tal kvadreras och subtraheras därefter med produkten av 3 och talet.  
Resultatet divideras med skillnaden mellan 3 och talet.  
Resultatet blir 1. Vilket är talet?
- Vad är fel i denna ekvationslösning?  
 $\frac{x^2 - 2x}{4x - 8} = 0$   
 $x^2 - 2x = 0(4x - 8)$   
 $x(x - 2) = 0$   
 $x = 0$  eller  $x = 2$

## 1.4 DISKRETA OCH KONTINUERLIGA FUNKTIONER SAMT GRÄNSVÄRDEN

1 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = x^2, D_f = N$       b)  $g(x) = \sqrt{1-x}, x < 1$

2 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$       b)  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } x \geq 1 \\ 1 & \text{då } x < 1 \end{cases}$

3 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{2x^2 - 6}$

4 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + x}$

5 Antalet sätt,  $A$ , att placera  $n$  personer i en kö beskrivs av funktionen

$$A = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Vilken typ av funktion, kontinuerlig eller diskret, är det? Motivera.

6 Följande portotabell anger vad det kostar att skicka brev inom Sverige. Är portotabellen en funktion (och i så fall något av alternativen diskret och kontinuerlig) definierad för vikter upp till 2000 g? Motivera ditt svar.

| Vikt högst (gram) | Pris  |
|-------------------|-------|
| 50                | 9,00  |
| 100               | 18,00 |
| 250               | 36,00 |
| 500               | 54,00 |
| 1000              | 72,00 |
| 2000              | 90,00 |

7 Kostnaderna  $K(x)$  kr vid tillverkning av  $x$  pizzor ges per dag av  $K(x) = 8000 + 12x$ .

Intäkterna vid försäljningen ges av  $I(x) = 65x$ .

a) Bestäm en funktion för resultatet av försäljningen.

b) Avgör om funktionen är diskret eller kontinuerlig.

8 Undersök om följande gränsvärde existerar och bestäm i så fall dess värde.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$$

## ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

1 Lös ekvationerna.

a)  $x^3 = 216$       b)  $2x^3 + 5 = 255$   
c)  $x^4 = 81$

2 Bestäm den lokala extrempunkten och avgör om den är en lokal maximi- eller minimipunkt för funktionen

a)  $y = -3x^2$       b)  $y = 2x^2 + 8x + 12$   
c)  $y = (x-4)^2 - 3$

3 Lös ekvationerna.

a)  $2x^2 + 6x - 8 = 0$   
b)  $-x^2 - 16x + 17 = 0$   
c)  $x(x+2)(x+1)(x-3) = 0$

4 Faktorisera

a)  $15x^3 - 5x^2$       b)  $3x^2 - 48$   
c)  $2x^2 - 20x + 18$

5 Undersök om  $x = -2$  är en lösning till följande ekvationer.

a)  $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$   
b)  $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$   
c)  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$

6 Förenkla följande uttryck så mycket som möjligt.

a)  $\frac{2x-8}{4-x}$       b)  $\frac{x}{x+3} - \frac{3x-9}{x^2-9}$   
c)  $\frac{2x^2-4x+2}{x^2-1}$

7 Lös ekvationerna

a)  $\frac{x^2-6x+5}{2x-10} = 0$       b)  $\frac{2x^2+10x+8}{x+1} = 2$   
c)  $\frac{4x^2+4x}{x^2+2} = 2x$

8 Bestäm uttryckens värden.

a)  $|3-5| + |5-3|$   
b)  $|3-7| - |7-3|$   
c)  $|3-9| - |3-11|$

9 Markera på en tallinje samt tolka följande uttryck med ord.

a)  $|x| = 6$   
b)  $|x-2| = 6$   
c)  $|x+3| = 6$

10 Skriv med hjälp av absolutbelopp ett samband som visar att avståndet mellan

a)  $x$  och 3 är lika med 2  
b)  $2x$  och  $-5$  är lika med 7  
c)  $4x$  och 10 är mindre än 6

11 Avgör om funktionen är diskret, kontinuerlig eller inget av alternativen.

a)  $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1, D_f = R$   
b)  $g(x) = 1000 \cdot 1,05^x, D_g = R$   
c)  $h(x) = \frac{1}{x+1}, D_h = N$

12 Bestäm de gränsvärden som existerar.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x^2-16}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

13 Bestäm de gränsvärden som existerar.

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{2x+6}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

14 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x}{x^2-3}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25x+300}{x}$

- 15 Undersök om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden.

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

- 16 Ett andragradspolynom  $p(x)$  har två nollställan,  $x = 3$  och  $x = -1$ . Dessutom gäller att  $p(2) = 1$ . Bestäm polynomet på formen  $p(x) = ax^2 + bx + c$ .

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* 17 En rektangulär hästhage har arean 1,00 tunnland. Staketet är sammanlagt 330 meter långt. Beräkna längden av hagens sidor. Areaenheten tunnland är vanlig inom lantbruket och motsvarar precis ett halvt ha (hektar). Dessutom gäller att 1 ha = 100 a (ar) och 1 a = 100 m<sup>2</sup>.

- \* 18 Bestäm  $x$ .  
 a)  $|3 - x| < 1$  b)  $|2x + 3| > x$   
 c)  $|3x - 2| < 4x$

- 19 a) Visa att polynomet  $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$  har tre nollställan,  $-2$ ,  $-1$  och  $1$ .  
 b) Faktorisera polynomet.

- \* 20 Bestäm  $x$ .  
 a)  $|x + 5| = |x - 7|$  b)  $|x + 7| = |x - 5|$

- \* 21 I multiplikationstabellen för talet 3 finns en följd av tre tal. Låt värdet av det minsta talet betecknas med  $x$ .

- a) De tre talen subtraheras med 15. Skriv ett uttryck för produkten av de nya talen.  
 b) Vilka är de tre ursprungliga talen om produkten av de nya talen blir 0?

- \* 22 En rektangulär låda, där sidorna har proportionerna 1:2:3, rymmer 7,5 dl. Beräkna lådans sidor.

- \* 23 Årsresultatet  $R(x)$  kr hos ett företag då  $x$  enheter produceras ges av funktionen  $R(x) = -x^2 + 20\,000x - 19\,000\,000$ .

- a) Hur många enheter ska företaget producera för att få så stor vinst som möjligt?  
 b) Hur stor är den maximala vinsten per år?

- \* 24 Ge formeln för ett andragradspolynom som är avtagande för negativa  $x$ -värden, växande för positiva  $x$ -värden, som skär  $y$ -axeln i punkten  $(0, 3)$  och går genom punkten  $(1, 5)$ .

- \* 25 Funktionen  $f(x) = x^3$  har en terrasspunkt i origo.

- a) Ge förslag på ett tredjegrads-polynom med terrasspunkt i punkten  $(0, 1)$ .  
 b) Ge förslag på ett tredjegrads-polynom med terrasspunkt i punkten  $(1, 1)$ .

- \* 26 En funktion  $h(t)$  används för att beskriva mängden  $h(t)$  mg av ett medicinskt preparat i en kropp  $t$  timmar efter medicinering.

- a) Vad är innebörden av beteckningen  $h(3)$ ?  
 b) Vad får man svar på genom att lösa ekvationen  $h(t) = 0$ ?  
 c) Under en begränsad tid beskrivs medicinmängden av funktionen  $h(t) = t^2 - 16t + 64$ . När har medicinen försvunnit ur kroppen?  
 d) Vad finns det för begränsningar i tid avseende formelns giltighet?

- \*\* 27 Bestäm  $x$ .

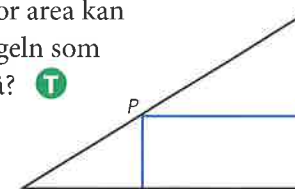
a)  $|x| + |x + 7| = 8$   
 b)  $|2x - 3| - |x + 1| = 2$

- \*\* 28 En vattenränna ska tillverkas av en rektangulär plåtbit som är 5,00 meter lång och 48 cm bred. Långsidorna viks upp på båda sidor för att inte vattnet ska rinna ut. De blir då vinkelräta mot botten.

- a) Hur ska rännan utformas för att maximera vattenflödet?  
 b) Hur många liter vatten kan finnas samtidigt i rännan om lutningen och flödet gör att vattenytan når upp till kanten överallt?



- \*\* 29 En rektangel skrivs in i en rätvinklig triangel enligt figuren. Punkten  $P$  kan flyttas längs hypotenusan. Triangelns kateter har längderna 6,0 cm och 8,0 cm. Hur stor area kan rektangeln som mest få? T



- \*\* 30 Då två lampor med resistanserna  $R_1$  och  $R_2$  är parallellkopplade (vilket de alltid är i vanliga elektriska anslutningar) ges deras sammanlagda resistans  $R$  av formeln  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ .

Låt  $R_2$  vara 50 % större än  $R_1$  och bestäm ett förenklat uttryck för resistansen  $R$  som funktion av  $R_1$ , dvs. skriv en formel för  $R(R_1)$ .

- \*\* 31 Ett litet företag tillverkar fotoramar. Varje månad har företaget fasta kostnader på 280 000 kronor. Dessutom kostar tillverkningen av varje fotoram 45 kronor. Antalet sålda fotoramar per månad ( $x$ ) beror på priset ( $p$  kr) enligt sambandet  $x = 50(225 - p)$ .

- a) Inom vilket intervall ska priset ligga för att verksamheten ska gå med vinst?  
 b) Vilket pris ger maximal vinst per månad?  
 c) Hur stor kan vinsten bli som mest varje månad? T

- \*\* 32 Ge formeln för ett polynom av andra graden som har en lokal minimipunkt i  $(1, -3)$  och som har ett nollställe för  $x = 2$ . T

- \*\* 33 I ett koordinatsystem är kurvan  $y = 7 - x^2$  ritad. En rektangel ska placeras med ett hörn i origo och ett hörn i en punkt på kurvan. Punktens koordinater ska båda vara positiva. Om rektangelns hörn placeras i punkten  $(1, 6)$  blir arean hos rektangeln 6 a.e. Det finns ytterligare en punkt på kurvan som ger samma rektangelarea. Ange den punktens koordinater. T

## OMFATTANDE PROBLEM

- 34 I figuren visas grafen till  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ .  
Den streckade linjen är grafen till  $y = x + 1$ .

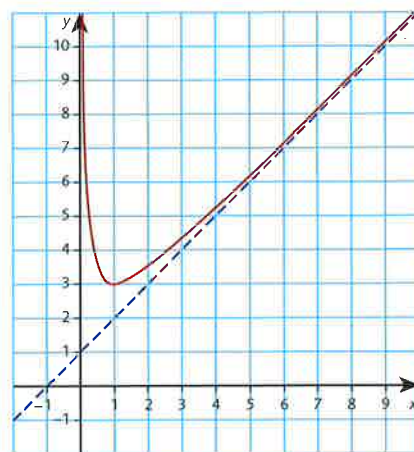
Som framgår av figuren närmar sig grafen till  $f(x)$  alltmer den räta linjen  $y = x + 1$ .  
Den streckade linjen kallas därför för *asymptot* till kurvan  $y = f(x)$ .

Om en funktion kan skrivas  $f(x) = kx + m + g(x)$ , där  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , kommer grafen till  $f(x)$  att närma sig asymptoten  $y = kx + m$  då  $x$  går mot oändligheten.

- Förklara varför  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$  närmar sig linjen  $y = x + 1$  då  $x \rightarrow \infty$ .
- Vilken linje kommer grafen till  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$  närma sig då  $x \rightarrow \infty$ ?  
Motivera ditt svar.

Ett sätt att visa att  $y = kx + m$  är asymptot till  $f(x)$  då  $x \rightarrow \infty$  är att visa gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$ .

- Visa att  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$  har linjen  $y = x + 3$  som asymptot då  $x \rightarrow \infty$ .
- Visa att  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$  har linjen  $y = x - 2$  som asymptot då  $x \rightarrow \infty$ .
- Vilken asymptot har grafen till  $f(x) = \frac{9x^2 - 6x + 2}{3x - 1}$  då  $x \rightarrow \infty$ ?



## SAMMANFATTNING

**Polynom:** Ett polynom är en funktion av typen  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ .  
Koefficienterna  $a_n$  till  $a_0$  är reella tal och  $n$  är ett naturligt tal.  
Polynomets grad är lika med  $n$  om  $a_n \neq 0$ .

**Växande funktion:** En funktion som växer från vänster till höger.  
( $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$  då  $a$  och  $b$  väljs godtyckligt).

**Avtagande funktion:** En funktion som avtar från vänster till höger.  
( $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$  då  $a$  och  $b$  väljs godtyckligt).

**Lokal extrempunkt:** En lokal maximi- eller minimipunkt.  
Ett polynom av grad  $n$  har högst  $(n - 1)$  lokala extrempunkter.

**Lokalt maximum:** Ett funktionsvärde som är större än eller lika med alla andra värden i den närmaste omgivningen.

**Lokalt minimum:** Ett funktionsvärde som är mindre än eller lika med alla andra värden i den närmaste omgivningen.

**Tangent:** En rät linje som har en punkt gemensam med en kurva och som har samma riktning som kurvan i den punkten.

**Terrasspunkt:** En punkt på en kurva med vågrät tangent och där kurvan antingen är enbart växande eller avtagande på båda sidor om punkten.

**Nollställe:** De  $x$ -värden för vilka en graf skär  $x$ -axeln.  
Ett polynom av grad  $n$  har högst  $n$  nollställen.

**Faktorisering:** Att skriva om ett uttryck som en produkt av ett antal faktorer.

**Absolutbelopp:** Absolutbeloppet av talet  $a$  definieras enligt  $|a| = \begin{cases} a & \text{då } a \geq 0 \\ -a & \text{då } a < 0 \end{cases}$

**Rationellt uttryck:** Ett uttryck på formen  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , där  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom och  $q(x) \neq 0$ .

**Rationell funktion:** En funktion på formen  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , där  $p(x)$  och  $q(x)$  är polynom och  $q(x) \neq 0$ .

**Diskret funktion:** En funktion där det finns ett avstånd mellan varje värde i definitionsmängden.

**Kontinuerlig funktion:** En funktion som är sammanhängande i hela sin definitionsmängd.

**Gränsvärde:** Gränsvärdet av  $f(x)$  kan t.ex. skrivas  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  eller  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  och anger i dessa fall de värden som funktionen går mot då  $x$  går mot oändligheten ( $\infty$ ) eller mot  $a$ .