

2

Derivata

Centralt innehåll

- Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion
- Härledning och användning av deriveringsregler för potensfunktioner samt summor av funktioner
- Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion, såväl med som utan numeriska och symbolhanterande verktyg.

Inledning

Under 1600-talet studerade många fysiker och astronomer kroppars rörelser. Italienaren Galileo Galilei (1564–1642) var säker på att dessa rörelser kunde beskrivas matematiskt och hans arbete ledde fram till matematiska beskrivningar av kulors lägen vid fritt fall eller i lutande plan. När han studerade skrifter av den polske astronomen Nicolaus Copernicus (1473–1543), blev han övertygad om att planeterna kretsade runt solen och att även dessa rörelser kunde få sina matematiska beskrivningar. Som en följd av att han stödde Copernicus världsbild fick han husarrest av den katolska kyrkan för resten av sitt liv eftersom han ifrågasatte att världssalltets medelpunkt var jorden.

Johannes Kepler (1571–1630) från Tyskland studerade också planeternas banor och fann att dessa var elliptiska. Han gav dessa rörelser matematiska beskrivningar. Detta arbete lade grunden för ett revolutionerande arbete inom matematiken av den engelske vetenskapsmannen Isaac Newton (1642–1727). Han nöjde sig inte med att beskriva kroppars positioner utan ville också hitta metoder för att bestämma deras hastigheter. Det var problematiskt eftersom hastigheter hos de allra flesta kroppar inte är konstanta. När han ville bestämma hastigheten vid en tidpunkt, blev det en svår uppgift eftersom en hastighetsbestämning krävde både en sträcka och ett tidsintervall. Följden blev att det bara gick att bestämma medelhastigheter under dessa intervall. Newton löste detta problem genom att införa derivata. Enkelt uttryckt innebar det att låta både s och t vara "oändligt små" då formeln $v = s/t$ användes vid hastighetsbestämning.

Oberoende av Newton arbetade en tysk matematiker vid namn Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) med matematiska problem. Han sysslade med strikt matematiska frågeställningar och dessa ledde fram till att han så småningom behövde "uppfinna" derivata. Han fick 1676 ta del av Newtons metoder och kunde med hjälp av dessa vidareutveckla sina egna matematiska teorier. I och med detta var *förändringens matematik* född och det är denna matematik som kapitel 2 handlar om.



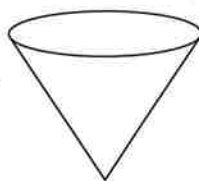
Din första uppgift

Det har tvistats länge om vem som var först med derivata, Newton eller Leibniz. Det ledde också till en konflikt mellan dessa två, där båda hävdade att de var först. Sök information om denna tvist, hur den hanterades och hur andra vetenskapsmän tog ställning i frågan.

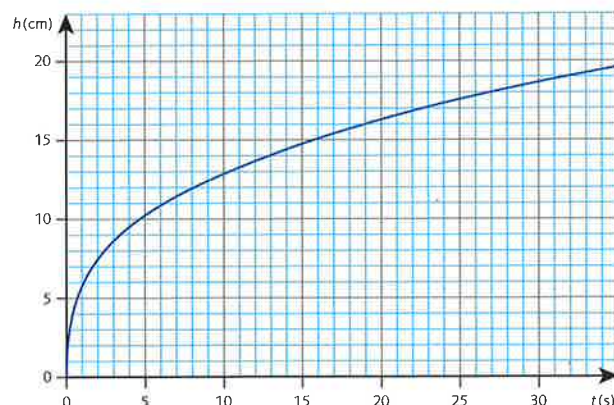
2.1 Ändringskvot



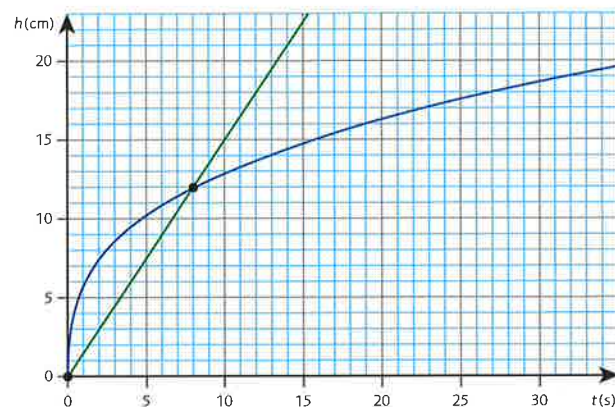
Teorigenomgång



En vattenbehållare formad som en upp-och-nervänd kon fylls med vatten med konstant hastighet. Grafen visar hur vattnets höjd h cm beror av tiden t s. Eftersom behållaren är konformad stiger höjden allt långsammare när vattenytans radie ökar.



För att bestämma medelhastigheten av hur snabbt höjden stiger under ett intervall, kan vi rita en **sekant**. En sekant är en rät linje som skär en kurva i minst två punkter. I figuren har en sekant ritats mellan punkterna $(0, 0)$ och $(8, 12)$ på kurvan.



Lutningen hos sekanten bestämmer medelhastigheten, v_m cm/s, hos höjdförändringen under de åtta första sekunderna.

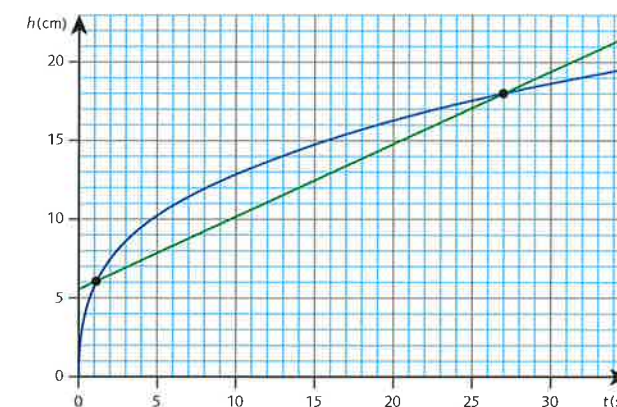
$$v_m = \frac{12-0}{8-0} = 1,5$$

Vattennivån stiger med andra ord med medelhastigheten 1,5 cm/s under detta tidsintervall.

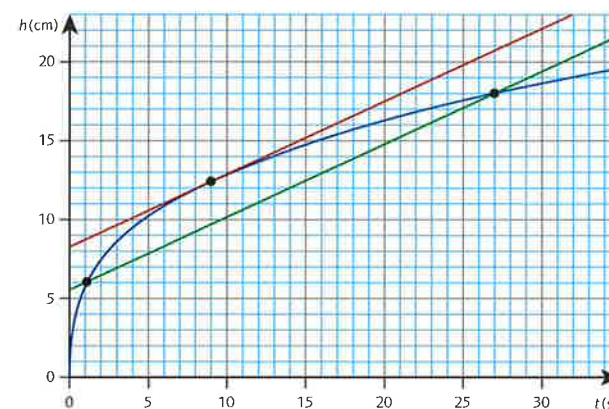
Om vi istället vill veta hur snabbt vattennivån stiger från tiden 1 s till tiden 27 s ritas vi en sekant mellan punkterna vid dessa tider.

Här blir medelhastigheten

$$v_m = \frac{18-6}{27-1} \approx 0,46$$



Höjden ökar alltså med medelhastigheten 0,46 cm/s. Vi avslutar med att rita en **tangent** till en punkt och välja punkten så att tangenten och den senare sekanten får samma lutning. Vid denna punkt har t värdet 9.



Eftersom tangentens lutning är samma som sekantens kan vi dra slutsatsen att vid tiden 9 s ökar vattennivån med 0,46 cm/s. Eftersom detta är hastigheten vid en viss tidpunkt, brukar man kalla den för **momentanhastighet**.

De gröna linjerna, sekanterna, illustrerar medelhastigheter och med hjälp av dessa kan vi bestämma **ändringskvoter**. En ändringskvot anger ett *medelvärde på förändringshastigheten* hos en funktion. Grafiskt motsvarar det kurvans medellutning i ett givet intervall.

Den röda linjen, tangenten, illustrerar en momentanhastighet eller en *förändringshastighet i en punkt*. Ett annat namn för det är funktionens **derivata**, vilket vi ska återkomma till i nästa avsnitt.

I fallet med vattenbehållaren har vi bara tillgång till en kurva och bestämmer därför alla kvoter grafiskt. Om vi istället har ett funktionsuttryck, kan motsvarande kvoter bestämmas algebraiskt. Det visas i följande exempel.

Urtappning av vatten

Då en behållare töms på vatten, beskrivs höjden $h(t)$ cm hos vattennivån som funktion av tiden t s av sambandet

$$h(t) = 0,025(40 - t)^2, 0 \leq t \leq 40$$

- Bestäm hur snabbt höjdförändringen sker mellan tidpunkterna 29 s och 31 s.
- Uppskatta med hjälp av föregående bestämning hur snabbt höjdförändringen sker vid tidpunkten 30 s.

LÖSNING:

- Genom att bestämma $h(31)$ och $h(29)$ får vi höjderna vid tidpunkterna 31 s och 29 s.

Differensen mellan dessa värden ger höjdförändringen och differensen mellan 31 s och 29 s ger den tid det tagit. Kvoten av höjdförändringen och tiden ger medelhastigheten hos höjdförändringen.

$$v_m = \frac{h(31) - h(29)}{31 - 29} = \frac{0,025(40 - 31)^2 - 0,025(40 - 29)^2}{31 - 29} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Slutsatsen är att vattennivån sjunker med medelhastigheten 0,5 cm/s i det aktuella tidsintervallet.

- Eftersom vi studerat ett litet tidsintervall kring tidpunkten 30 s i a-uppgiften, kan vi anta att momentan hastigheten hos höjdförändringen vid tiden 30 s är ungefär lika stor som medelhastigheten i föregående uppgift.

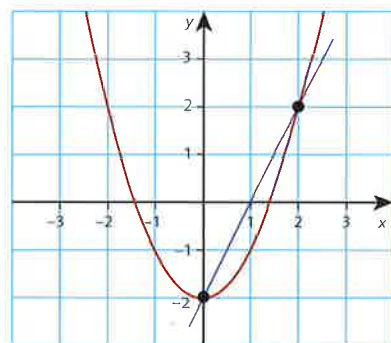
Slutsats: Vattennivån sjunker ungefär med hastigheten 0,5 cm/s vid tidpunkten 30 s.

SVAR: a) -0,5 cm/s b) -0,5 cm/s

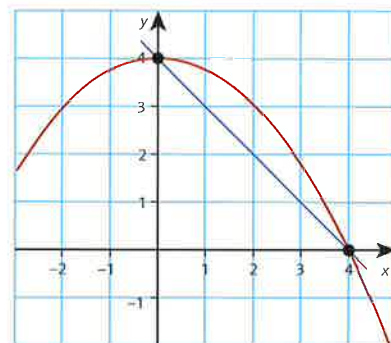
ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 2001** Bestäm grafernas medellutning mellan de markerade punkterna.

a)



b)



- 2002** $f(x) = x^3$. Bestäm ändringskvoten

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$$

- 2003** Visa grafiskt och bestäm ändringskvoten i intervallet $-1 \leq x \leq 2$ för funktionerna

$$a) f(x) = -x \quad b) g(x) = x^2$$

$$c) h(x) = -x^3$$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 2004** För behållaren i exemplet på s. 70 beskrivs höjden av sambandet $h(t) = 0,025(40 - t)^2$. Höjden $h(t)$ anges i cm och tiden t i s. Bestäm medelvärde för hur snabbt vattennivån ändras

- mellan tidpunkterna 0 s och 10 s
- mellan tidpunkterna 10 s och 20 s
- mellan tidpunkterna 9 s och 11 s

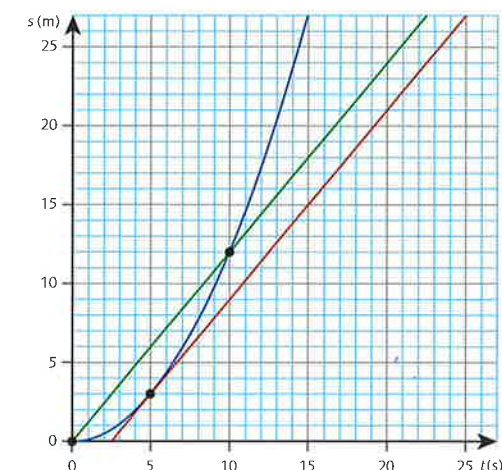
- 2005** Använd resultatet från lämplig deluppgift i övning 2004 för att bestämma hur snabbt vattennivån ungefär ändras vid tidpunkten 10 s.

- 2006** Vid uttömning av vattnet i exemplet på s. 70 och övning 2004 beskrivs höjden $h(t)$ cm som funktion av tiden t s av modellen $h(t) = 0,025(40 - t)^2$. Har modellen några begränsningar?

- 2007** Då en kula släpps på en lutande bana beskrivs dess rörelse av sambandet $s(t) = 2,5t^2$. Sträckan $s(t)$ anges i m och tiden t i s.

- Vilken medelhastighet har kulan under den första sekunden?
- Vilken medelhastighet har kulan från $t = 0,30$ till $t = 0,50$?

- 2008** Grafen visar hur sträckan hos ett accelererande föremål beror av tiden. I grafen finns även en sekant och en tangent utritade.



Bestäm

- medelhastigheten under de tio första sekunderna
- momentanhastigheten då t är 5,0 s

- 2009** Bestäm för rörelsen som illustreras av grafen i övning 2008

- medelhastigheten mellan tidpunkterna 0 s och 5 s
- medelhastigheten mellan tidpunkterna 5 s och 10 s

- * **2010** Vid fritt fall beskrivs fallsträckan $s(t)$ m som funktion av tiden t s av sambandet $s(t) = 4,9t^2$.

- Bestäm $s(2,0)$ och ange med ord vad du har bestämt.
- Bestäm $\frac{s(2,0)}{2,0}$ och ange med ord vad du har bestämt.
- Bestäm $\frac{s(4,0) - s(1,0)}{4,0 - 1,0}$ och ange med ord vad du har bestämt.

* 2011 Graferna i inledningen beskrev hur vattennivån i en behållare ändrades med tiden. Ett samband mellan höjden $h(t)$ cm och tiden t s ges av $h(t) = 6,0 \cdot t^{1/3}$.

a) Bestäm, med hjälp av sambandet, medelhastigheten hos höjdförändringen mellan tidpunkterna 1 s och 27 s och jämför med den grafiska bestämningen i inledningen.

b) Från tiden 0 s till t s är medelhastigheten hos höjdförändringen 0,375 cm/s. Bestäm t . **L**

* 2012 För $f(x) = x^2$ gäller följande ändringskvoter. Bestäm konstanterna a , b respektive c .

a) $\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = 6$

b) $\frac{f(2b) - f(b)}{2b - b} = 6$

c) $\frac{f(4c) - f(2)}{4c - 2} = 6$



Ord och begrepp
Koll på avsnittet

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Galileo Galilei införde begreppet derivata.
- 2 En sekant är en rät linje som tangerar en kurva i en punkt.
- 3 En sekant kan användas för att illustrera medellutningen hos en kurva mellan två punkter.
- 4 En tangent skär en kurva i minst en punkt.
- 5 En ändringskvot anger hur snabbt en funktions värden förändras mellan två punkter.
- 6 Hastigheten vid en speciell punkt kallas momentanhastighet.



Svar med motiveringar
finns på lärarwebben.

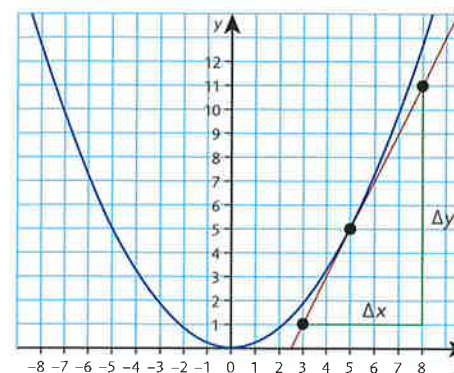
1
5
6

2.2 Derivata

I det förra avsnittet behandlade vi framför allt ändringskvoter, vilka anger ett medelvärde av förändringshastigheten hos en funktion i ett intervall. Vi ska nu gå över till att studera förändringshastigheten hos funktioner i en enda punkt. För att kunna göra det krävs ett nytt begrepp, **derivata**.

Grafisk tolkning av derivata

Vi börjar med att studera en grafisk tolkning av derivata.



I figuren är grafen y till en funktion $f(x)$ ritad. I punkten med x -koordinaten 5 har grafens tangent ritats. Tangenten har i denna punkt samma lutning som grafen. För att bestämma tangentens lutning används en triangel med höjden Δy och bredden Δx . Det ger lutningen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2$$

Det innebär att förändringshastigheten är 2 hos funktionen $f(x)$ då $x = 5$. Denna förändringshastighet kallas också **derivata**. Om $y = f(x)$, skrivs derivatan $y' = f'(x)$ och läses "y-prim" eller "f-prim-x". För den aktuella punkten gäller därmed att $f'(5) = 2$.

Att $f'(5) = 2$ innebär alltså att funktionens förändringshastighet eller derivata har värdet 2 då $x = 5$. Man kan också säga att grafens lutning är 2 då $x = 5$.

OM $y = f(x)$ GÄLLER FÖLJANDE:

$y' = f'(x)$ anger funktionens derivata.

$f'(a)$ anger funktionens derivata eller förändringshastighet då $x = a$.

Grafiskt anger $f'(a)$ kurvans lutning då $x = a$.

Tangenter och derivata

I figuren finns grafen till funktionen $f(x) = x^2$ samt två tangenter.

Bestäm

- a) $f'(1)$ b) $f'(-2)$

LÖSNING:

Lutningen hos en tangent i en punkt ger derivatan i punkten.

För att bestämma derivatan bestämmer vi tangentens lutning k genom att använda två punkter på tangenten.

- a) Punkter: $(1, 1)$ och $(2, 3)$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

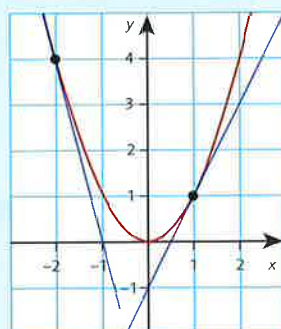
$$f'(1) = k = 2$$

- b) Punkter: $(-2, 4)$ och $(-1, 0)$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{-1-(-2)} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$f'(-2) = k = -4$$

SVAR: a) $f'(1) = 2$ b) $f'(-2) = -4$



Tolkningar av uttryck och ekvationer

När en kula faller fritt bestäms dess fallsträcka av sambandet $s(t) = 4,9t^2$, där $s(t)$ är sträckan i m och t är tiden i s. Vad får man veta genom att

- bestämma värdet av uttrycket $s(2)$
- bestämma värdet av uttrycket $s'(2)$
- lösa ekvationen $s(t) = 2$
- lösa ekvationen $s'(t) = 2$

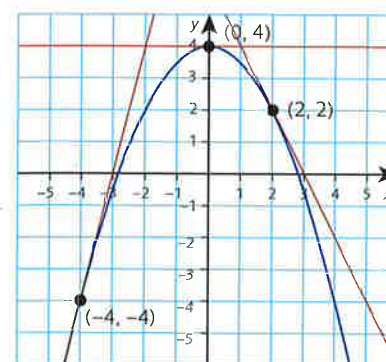
SVAR:

- $s(2)$ m anger sammanlagd fallsträcka efter 2 s.
- $s'(2)$ m/s anger hastigheten då det har gått 2 s.
- Lösningen på ekvationen $s(t) = 2$ ger den tid t i s det tar för kulan att falla 2 m.
- Lösningen på ekvationen $s'(t) = 2$ ger den tid det tar i s för kulan att nå hastigheten 2 m/s.

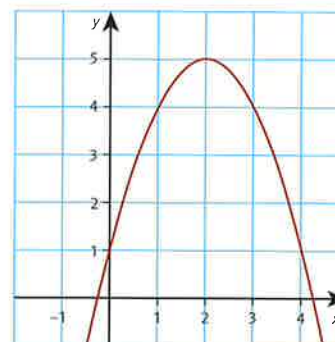
ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

2013 I grafen till $f(x)$ är tre tangenter inritade. Bestäm

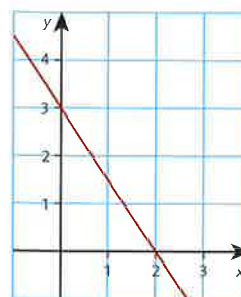
- a) $f(-4)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$
d) $f'(-4)$ e) $f'(0)$ f) $f'(2)$



2014 Grafen till $f(x)$ visas i figuren. Uppskatta med hjälp av grafen $f'(1)$.



2015 I figuren visas grafen till $f(x) = -1,5x + 3$. Bestäm $f'(2)$.



2016 Kombinera de påståenden som passar ihop för en deriverbar funktion $f(x)$.

A: $f'(x) < 0$ B: $f'(x) > 0$

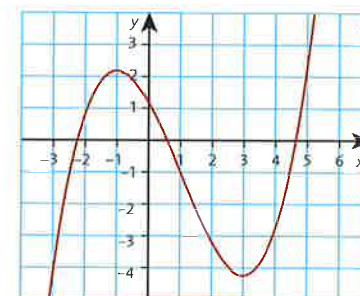
C: $f'(x) = 0$

D: Funktionen $f(x)$ är växande.

E: Funktionen $f(x)$ har en lokal extrem- eller terrasspunkt.

F: Funktionen $f(x)$ är avtagande.

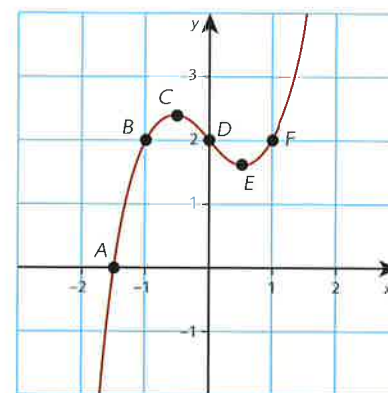
2017 I figuren visas kurvan $y = f(x)$. Lös med hjälp av kurvan ekvationen $f'(x) = 0$.



2018 I vilken eller vilka av de markerade punkterna på grafen till $f(x)$ är

a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x)$ störst d) $f'(x)$ minst





ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- * **2019** Då en sten kastar upp i luften är dess höjd $h(t)$ m efter t s. Vad får man veta genom att
- bestämma värdet av uttrycket $h(3)$
 - bestämma värdet av uttrycket $h'(1)$
 - lösa ekvationen $h(t) = 12$
 - lösa ekvationen $h'(t) = -10$
- * **2020** Höjden $h(t)$ m över marken beskriver läget hos en kastad sten efter t s. Vilken slutsats kan man dra av att $h'(t) < 0$?

Gruppaktivitet

BESTÄM DERIVATA NUMERISKT

Oavsett om ni arbetar med en grafitande räknare eller med ett datorprogram som exempelvis GeoGebra, finns det möjligheter att låta räknaren eller datorprogrammet rita tangenter och bestämma derivatans värde. Ta reda på och undersök dessa möjligheter genom att med hjälp av något tekniskt hjälpmedel exempelvis försöka bestämma

$$f'(1) \text{ då } f(x) = x^2$$

$$f'(-2) \text{ då } f(x) = x^3$$

$$f'(3) \text{ då } f(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

- * **2021** Temperaturen i en bastu är $f(t)^\circ\text{C}$ då det gått t minuter efter att den har satts på. Tolk följande likheter.

- $f(0) = 15$
- $f(15) = 42$
- $f'(15) = 1,8$
- $f'(90) = -0,6$

- * **2022** Mängden vatten i ett badkar är $V(t)$ liter vid tiden t minuter efter 20.00. Ställ upp det uttryck eller den ekvation som kan användas för att besvara följande frågor.

- Hur mycket vatten finns det i badkaret kl 20.45?
- Hur snabbt ändras mängden vatten i badkaret kl 20.55?
- När finns det 150 l vatten i badkaret?
- När minskar vattenmängden med 30 l/min?
- Med vilken medelhastighet töms badkaret mellan 20.55 och 21.00?

Uppskattning av derivata med symmetrisk ändringskvot



Tänk dig att du vill bestämma $f'(1)$ för funktionen $f(x) = x^2$ grafiskt med hjälp av en tangent. Det är inte alldeles lätt att få ett bra värde utan tekniska hjälpmedel som exempelvis ett grafitande program. Det är svårt att rita böjda kurvor för hand och svårt att dra tangenter korrekt.

Ett alternativ är att använda en **symmetrisk ändringskvot** i ett litet intervall kring $x = 1$. Med symmetrisk ändringskvot menas att intervallets ändpunkter i det här fallet ligger på varsin sida om och lika långt från $x = 1$. Man kan t.ex. bestämma ändringskvoten mellan $x = 0,9$ och $x = 1,1$. Det ger som regel ett bra närmevärde till derivatan för $x = 1$.

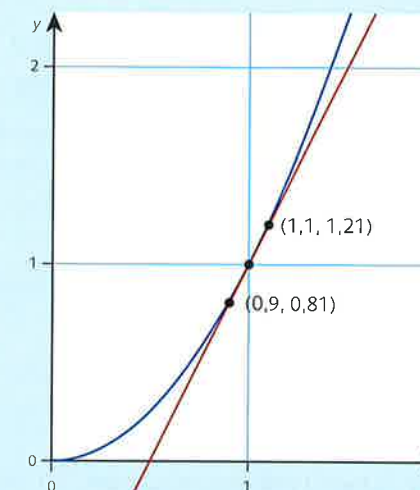
Uppskattning av derivatans värde

$f(x) = x^2$. Uppskatta värdet hos $f'(1)$ genom att undersöka förändringshastigheten i ett litet intervall som ligger symmetriskt kring $x = 1$.

LÖSNING:

Uppgiften kan lösas utan graf men vi ritar först en graf med en tangent i punkten $(1, 1)$ för att kunna jämföra funktionens graf och tangenten nära den aktuella punkten.

Derivatans värde fås genom att bestämma tangentens riktningskoefficient. De markerade punkterna i figuren ligger inte på tangenten men på grafen till $f(x) = x^2$. Eftersom grafen och tangenten nästan sammanfaller i ett litet område kring punkten $(1, 1)$, använder vi dessa punkter för att få ett närmevärde till $f'(1)$.



$$f'(1) \approx \frac{f(1,1) - f(0,9)}{1,1 - 0,9} = \frac{1,1^2 - 0,9^2}{1,1 - 0,9} = \frac{1,21 - 0,81}{1,1 - 0,9} = \frac{0,4}{0,2} = 2$$

SVAR: $f'(1) \approx 2$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 2023** Bestäm ett närmevärde till $f'(3)$ för funktionen $f(x) = 3x^2$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(3,1) - f(2,9)}{3,1 - 2,9}$.
- 2024** Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = 2^x$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$.
- 2025** Bestäm ett närmevärde till $f'(-1)$ för funktionen $f(x) = x^3$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(-0,9) - f(-1,1)}{-0,9 - (-1,1)}$.
- 2026** Bestäm ett närmevärde till $f'(1)$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten mellan $x = 0,99$ och $x = 1,01$ för funktionen
- $f(x) = 2x^3$
 - $f(x) = 10^x$
 - $f(x) = \sqrt{x}$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 2027** Hastigheten $v(t)$ m/s hos en bil beskrivs av funktionen $v(t) = 2,5t$, där t anges i enheten sekunder. Medelaccelerationen a_m m/s² i ett tidsintervall bestäms av $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
- Bestäm medelaccelerationen mellan $t = 0$ och $t = 2,0$.
 - Bestäm medelaccelerationen mellan $t = 2,0$ och $t = 4,0$.
 - Bestäm medelaccelerationen mellan $t = 4,0$ och $t = 5,0$.
 - Förklara dina resultat.

- * **2028** Funktionerna A–C som ges nedan har den gemensamma egenskapen att $f'(1) = 1$.

Jämför detta värde på derivatan med varje funktions symmetriska ändringskvot mellan $x = 0,5$ och $x = 1,5$. Formulera en slutsats..

$$A: f(x) = \frac{x^4}{4} \quad B: f(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$C: f(x) = \frac{x^2}{2}$$

- * **2029** I föregående uppgift jämförde du hur bra närmevärden du fick för olika funktioner då du använde ändringskvoter i samma intervall. Nu ska du undersöka hur intervallets storlek påverkar närmevärdet.

För funktionen $f(x) = x^4$ gäller det att $f'(2) = 32$. Gör en uppskattning av $f'(2)$ genom att använda ändringskvoter i intervallet

- $1 \leq x \leq 3$
- $1,9 \leq x \leq 2,1$
- $1,99 \leq x \leq 2,01$

Vilka slutsatser kan du dra av din undersökning?

- * **2030** Uppskatta $f'(0,50)$ genom att välja lämpliga symmetriska ändringskvoter.

$$a) f(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$b) f(x) = \sqrt{6x + 2}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x}$$

Funktionen $y = kx + m$



Hittills har vi bestämt derivatan med hjälp av tangenter. Vi har också uppskattat derivatans värde i en punkt genom att bestämma ändringskvoter i små intervall kring punkten. Nu ska vi gå över till exakt bestämning av derivatan.

Vi börjar med att studera funktioner av typen $y = kx + m$. Eftersom graferna till dessa är räta linjer med riktningskoefficienten k innebär det att förändringshastigheten är konstant och lika med k oavsett värdet på x . Detta medför att derivatan är lika med riktningskoefficienten, $y' = k$.

Med begreppet **linjär funktion** avses ibland funktioner av typen $y = kx$ medan begreppet i andra sammanhang avser funktioner av typen $y = kx + m$. I fortsättningen använder vi begreppet för funktioner av typen $y = kx + m$.

Funktionen $y = kx + m$ har derivatan $y' = k$ för alla värden på x .

Riktningskoefficient och derivata

Bestäm derivatan y' då

$$a) y = 4x - 3$$

$$b) y = -2x + 1$$

$$c) y = 5$$

LÖSNING:

För funktioner av typen $y = kx + m$ är derivatan lika med funktionens riktningskoefficient, k .

Funktionerna har i tur och ordning riktningskoefficienterna

$$a) k = 4$$

$$b) k = -2$$

$$c) k = 0$$

Det ger svaren som följer nedan.

Notera särskilt att derivatan av en konstant funktion som i c-uppgiften är noll eftersom dess graf är en vågrät linje.

$$\text{SVAR: } a) y' = 4$$

$$b) y' = -2$$

$$c) y' = 0$$

Derivata hos räta linjer genom givna punkter

Bestäm derivatan y' för en funktion y , då dess graf är en rät linje genom punkterna $(1, 3)$ och $(6, -7)$.

LÖSNING:

Vi bestämmer linjens riktningskoefficient:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7 - 3}{6 - 1} = \frac{-10}{5} = -2$$

Det innebär att $y' = -2$.

$$\text{SVAR: } y' = -2$$

Bestäm linjens ekvation

För en linjär funktion y gäller att $y' = 3$. Dess graf går genom punkten $(2, 5)$. Bestäm linjens ekvation.

LÖSNING:

Linjens riktningskoefficient $k = y' = 3$.

För att bestämma linjens m -värde, ställer vi upp räta linjens ekvation och sätter in kända värden:

$$y = kx + m$$

$$5 = 3 \cdot 2 + m$$

$$m = 5 - 6$$

$$m = -1$$

Det ger oss linjens ekvation: $y = 3x - 1$

SVAR: $y = 3x - 1$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

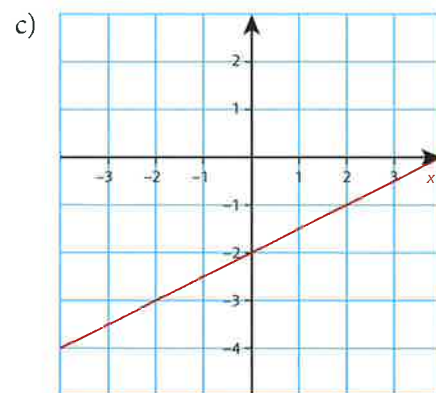
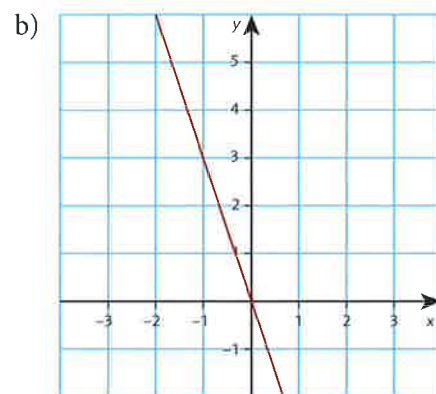
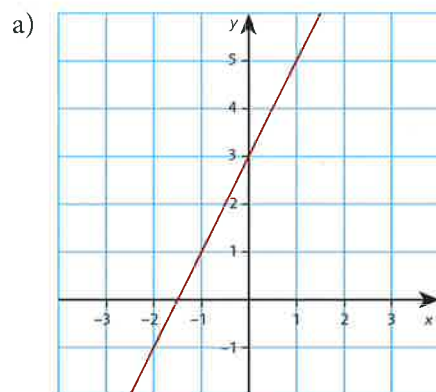
2031 Bestäm y' .

- a) $y = 2x$ b) $y = 2$

2032 Bestäm $f'(x)$.

- a) $f(x) = \frac{x}{2} - 2$ b) $f(x) = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$
c) $f(x) = -\frac{2}{3}$ d) $f(x) = 2 - 2x$

2033 I figurerna återfinns tre funktioner av typen $y = kx + m$. Bestäm derivatan för dessa funktioner.



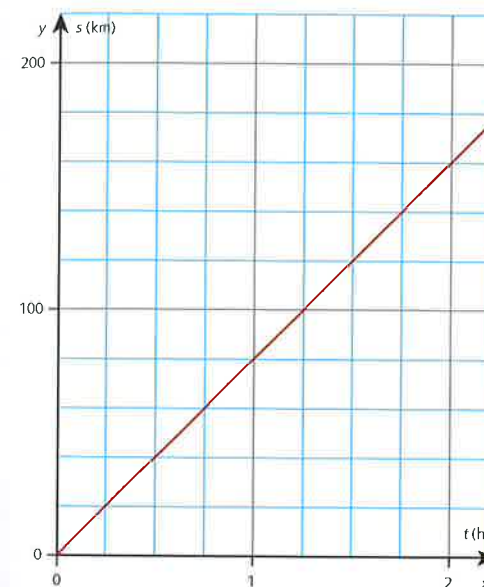
2034 Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna

- a) $(-3, 1)$ och $(1, 5)$
b) $(-4, 5)$ och $(4, 9)$
c) $(-1, 1)$ och $(1, 1)$

2035 Derivatan $y' = -2$ för en linjär funktion y . Dess graf går genom punkten $(-2, 7)$. Bestäm linjens ekvation.

2036 I figuren återfinns grafen för färdsträckan $s(t)$ km som funktion av körtiden t h vid en bilresa.

- a) Ange funktionen $s(t)$.
b) Bestäm $s'(t)$ och förklara vad derivatan anger för bilresan.



ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

2037 En fallande stens hastighet v m/s efter t s ges av $v(t) = 9,8t$.

- a) Vad anger $v'(t)$?
b) Bestäm $v'(t)$.

2038 För en linjär funktion y gäller att $y' = 3$. Dess graf går genom punkten $(2, 9)$.

- a) I vilken punkt skär den räta linjen y -axeln?
b) I vilken punkt skär den räta linjen x -axeln?

2039 För en linjär funktion gäller att $f'(1) = 2$.

- a) Bestäm $f'(3)$ och motivera ditt svar.
b) Bestäm $f'(a)$, där a är ett godtyckligt tal.

* 2040 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(2) = f'(2) = 5$. Bestäm funktionen.

T

* 2041 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Bestäm funktionen.

* 2042 Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna

- a) $(-a, b)$ och (a, b) , $a \neq 0$
b) (a, b) och (b, a) , $a \neq b$
c) $(-3a, 2b)$ och $(2b, -3a)$, $2b + 3a \neq 0$

L

* 2043 För två linjära funktioner $f(x)$ och $g(x)$ gäller att $f'(x) = -2$ och $g'(x) = \frac{1}{2}$. De skär varandra i punkten $(2, 2)$.

- a) Bestäm funktionerna.
b) Bestäm vinkeln mellan de räta linjerna i funktionernas grafer.

T

Analys av en kulas rörelse



Teorigenomgång
Simulering

En kula sätts i rullning nerför en backe. Dess läge $s(t)$ m som funktion av tiden t s ges av

$$s(t) = t^2.$$

Vi ska undersöka kulans medelhastighet från tiden 1 s till tiden t s, för olika värden på t . Eftersom medelhastigheten bestäms av sambandet $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ska vi bestämma värdet av olika ändringskvoter. Gemensamt för dessa kvoter är att de algebraiskt kan skrivas (se figuren)

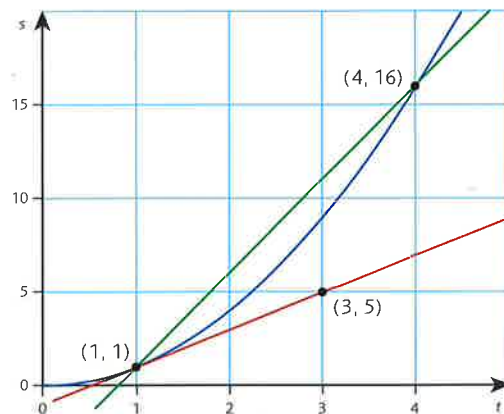
$$v_m = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = t+1, t \neq 1.$$

Konjugatregeln används för att skriva om uttrycket $t^2 - 1^2$ i förenklingen ovan.

Hastighetens medelvärde ges alltså av $v_m = t+1$.

Grafiskt kan ändringskvoter tecknas med hjälp av de aktuella punkterna. Dessa illustreras i figurerna av de gröna sekanterna. Den röda linjen är en tangent till kurvan i punkten $(1, 1)$. Den har lutningen 2.

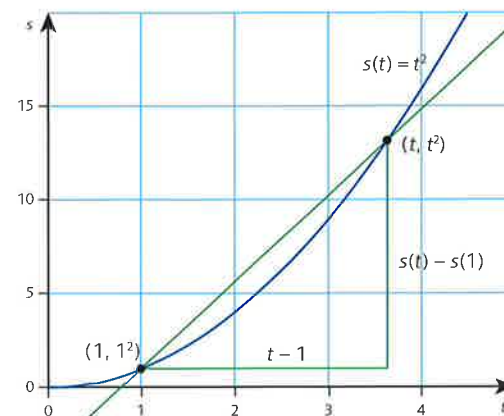
För algebraisk bestämning av medelhastigheterna används (enligt ovan) formeln $v_m = t+1$.



Figur 1, $t = 4$:

Algebraiskt: $v_m = 4 + 1 = 5$

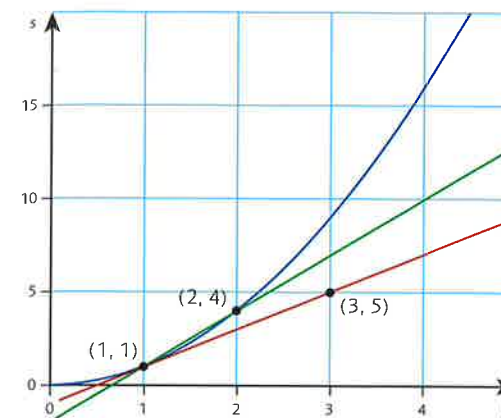
Grafiskt: $v_m = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$



Figur 2, $t = 3$:

Algebraiskt: $v_m = 3 + 1 = 4$

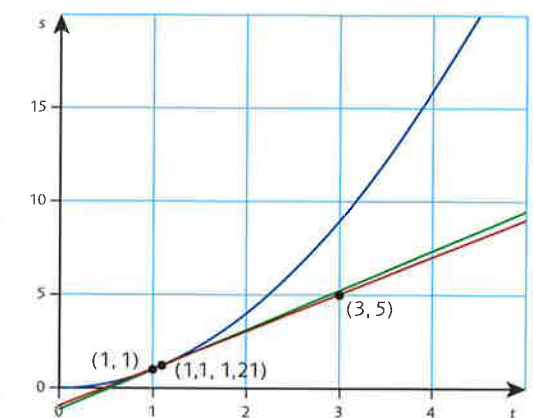
Grafiskt: $v_m = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$



Figur 3, $t = 2$:

Algebraiskt: $v_m = 2 + 1 = 3$

Grafiskt: $v_m = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$



Figur 4, $t = 1,1$:

Algebraiskt: $v_m = 1,1 + 1 = 2,1$

Grafiskt: $v_m = \frac{1,21-1}{1,1-1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1$

Slutsats: Oavsett om vi använder algebraisk eller grafisk metod kan vi konstatera att medelhastigheten v_m närmar sig värdet två då x närmar sig värdet ett.

För att bestämma hastigheten, $s'(t)$, hos kulan just då $t = 1$ kan vi, eftersom $t \neq 1$, studera gränsvärdet av ändringskvoten då t går mot värdet ett (enligt kapitel 1):

$$s'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} (t+1) = 2$$

Hastigheten hos kulan då $t = 1$ får vi med andra ord genom att bestämma gränsvärdet av medelhastigheten då Δt går mot noll. Denna hastighet benämner vi $s'(1)$. Med ord kan vi uttrycka det som att kulans hastighet då $t = 1$ är derivatan av sträckan $s(t)$ då $t = 1$.

Derivatans definition

Vi har nu sett hur man kan definiera derivatan i en punkt för funktionen $s(t) = t^2$. Vi ska gå över till hur man kan definiera derivatan i en punkt för en godtycklig funktion $f(x)$.

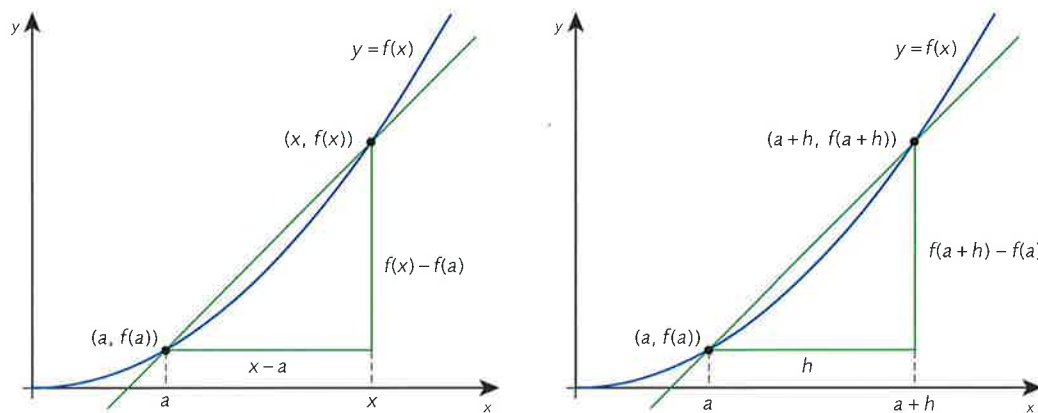
Låt oss anta att vi vill tillverka ett uttryck för derivatan av $f(x)$ i punkten $x = a$. Då kommer

$$s'(1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} \text{ från föregående avsnitt ersätts av } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Detta gränsvärde är ett sätt att definiera en funktions derivata i en punkt $x = a$. Om man ersätter x med $a + h$ i den definitionen får vi ett annat sätt att definiera derivatan:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Om $x = a + h$ gäller nämligen att $h = x - a$ och att $x \rightarrow a$ kan ersättas av $h \rightarrow 0$. Det betyder att båda uttrycken är identiska trots att de är skrivna på två olika sätt. Jämför gärna de två figurerna för att övertyga dig om det.



Vi har nu visat att man kan definiera derivatan $f'(a)$ för en funktion $f(x)$ i punkten $x = a$ på två sätt

DERIVATANS DEFINITION I EN PUNKT $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Om gränsvärdet existerar för alla x i definitionsmängden till $f(x)$, sägs funktionen $f(x)$ vara deriverbar. Derivatan blir då en ny funktion, $f'(x)$, som ges av gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivatans definition kommer du att använda många gånger för att bestämma derivatan för olika funktioner. Följande exempel visar en modell för hur man kan gå till väga och som kan användas för de allra flesta funktioner som du stöter på.

EXEMPEL

Derivatans definition för en linjär funktion

Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = 3x + 4$

LÖSNING:

Vi ska använda derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi börjar därför med att teckna och förenkla uttrycket $f(x+h)$.

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f(x+h) = 3(x+h) + 4 = 3x + 3h + 4$$

x ersätts med $x+h$ i funktionsuttrycket.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x+3h+4) - (3x+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h+4-3x-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

SVAR: $f'(x) = 3$

Derivatans definition för potensfunktion av grad 2

Funktionen $f(x) = 3x^2$ är given. Bestäm med hjälp av derivatans definition

a) $f'(4)$

b) $f'(x)$

LÖSNING:

$$\text{a) } f(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$$

$$f(4+h) = 3(4+h)^2 = 3(4^2 + 8h + h^2) = 48 + 24h + 3h^2$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 + 24h + 3h^2 - 48}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(24 + 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (24 + 3h) = 24 \end{aligned}$$

Slutsats: $f'(4) = 24$

$$\text{b) } f(x) = 3x^2$$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3(x^2 + 2xh + h^2) = 3x^2 + 6xh + 3h^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

Slutsats: $f'(x) = 6x$

SVAR: a) $f'(4) = 24$

b) $f'(x) = 6x$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

* 2044 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(x)$ då $f(x) = -2x + 4$
- b) $f'(x)$ då $f(x) = x + m$
- c) $f'(x)$ då $f(x) = kx + m$

* 2045 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(2)$ då $f(x) = x^2$
- b) $f'(2)$ då $f(x) = x^2 + 3$
- c) $f'(2)$ då $f(x) = x^2 + 3x$

* 2046 Bestäm med hjälp av derivatans definition

- a) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2$
- b) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2 + 5$
- c) $f'(x)$ då $f(x) = 4x^2 + 5x$

- * 2047 a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$.
- b) Använd resultatet från a-uppgiften för att bestämma $f'(1)$.
- c) Vad är riktningskoefficienten för en tangent till kurvan i punkten $(1, 1)$?

** 2048 Vad beräknar man med hjälp av följande gränsvärden?

- a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$
- b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$
- c) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$

 Ord och begrepp
Koll på avsnittet

DERIVATA AV POTENSFUNCTION

Använd definitionen $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ och upprepad användning av konjugatregeln för att bestämma derivatan av $f(x) = x^4$ då $x = 1$ och därefter då $x = a$.

UTMANING

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Grafiskt är lutning samma sak som derivata.
- 2 Ändringskvot är samma sak som derivata.
- 3 Derivatan av en linjär funktion $f(x)$ är oberoende av x .
- 4 Derivatan av $y = kx + m$ är oberoende av m .
- 5 Derivatan av $y = kx + m$ ges av $y' = k$.
- 6 Definitionen av derivata skrivs $f'(x) = \lim_{x \rightarrow h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

 Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

2.3 Deriveringsregler för potensfunktioner

 Teorigenomgång

I föregående avsnitt infördes derivatans definition och med hjälp av den har du visat (övning 2044) att derivatan av den linjära funktionen $f(x) = kx + m$ är $f'(x) = k$. I övning 2046 har du bestämt derivatan av $f(x) = 4x^2$ och fått den till $f'(x) = 8x$. För den linjära funktionen som har gradtalet 1 gäller att derivatan av den har grad 0. För andragradsfunktionen som har grad 2 gäller att derivatan av den har grad 1.

Deriveringsregel för potensfunktioner med positiv heltalsexponent

Vi ska nu härleda en regel för derivatan av potensfunktioner $f(x) = ax^n$.

Vi börjar med att låta n vara ett heltal större än noll och tillämpar derivatans definition på funktionen.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a((x+h)^n - x^n)}{h}$$

I uttrycket $\frac{a((x+h)^n - x^n)}{h}$ är a en konstant som inte påverkas av h . Vi kan därför bryta ut a från gränsvärdet och få $f'(x) = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

Det finns metoder för att utveckla täljaren $(x+h)^n - x^n$ men de ingår först i kurs 5. Vi nöjer oss därför med att bestämma derivatan för några värden på exponenten n .

$$\text{För } n = 1 \text{ har vi } f(x) = ax \text{ och } f'(x) = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} 1 = a$$

$$\begin{aligned} \text{För } n = 2 \text{ har vi } f(x) = ax^2 \text{ och } f'(x) &= a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = a \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2ax \end{aligned}$$

För att bestämma derivatan då $n = 3$ behöver vi utveckla $(x+h)^3$. Vi börjar med att göra det:

$$(x+h)^3 = (x+h)(x+h)^2 = (x+h)(x^2 + 2xh + h^2) = x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Därefter fortsätter vi med:

$$f'(x) = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3ax^2$$

Vi skulle kunna fortsätta att beräkna $f'(x)$ för ytterligare värden på $n > 0$, men vi nöjer oss med att sammanställa resultatet i en tabell.

Vi ser att derivatan av en potensfunktion är en ny potensfunktion där exponentens värde har minskat med ett. Vi kan formulera följande regel.

$f(x)$	$f'(x)$
ax	a
ax^2	$2ax$
ax^3	$3ax^2$

Potensfunktionen $f(x) = ax^n$, n positivt heltal har derivatan $f'(x) = anx^{n-1}$

Derivera potensfunktion

Använd deriveringsregeln och bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = x^{10}$ b) $f(x) = 5x^4$ c) $g(x) = \frac{x^6}{4}$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^{10}$
 $f'(x) = 10x^9$

b) $f(x) = 5x^4$
 $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$

c) $g(x) = \frac{x^6}{4} = \frac{1}{4} \cdot x^6$
 $g'(x) = \frac{1}{4} \cdot 6x^5 = \frac{6x^5}{4} = \frac{3x^5}{2}$

SVAR: a) $f'(x) = 10x^9$ b) $f'(x) = 20x^3$ c) $g'(x) = \frac{3x^5}{2}$

Derivatans värde

Bestäm $f'(1)$ om

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = -3x^2$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^5$
 $f'(x) = 5x^4$
 $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

b) $f(x) = -3x^2$
 $f'(x) = -3 \cdot 2x = -6x$
 $f'(1) = -6 \cdot 1 = -6$

SVAR: a) $f'(1) = 5$ b) $f'(1) = -6$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

2049 Derivera

- a) $f(x) = x^{11}$
- b) $f(x) = x^{25}$
- c) $f(x) = x^{1000}$
- d) $f(x) = 10^3$

2050 Derivera

- a) $f(x) = 5x$
- b) $f(x) = 6x^2$
- c) $f(x) = -\frac{x^3}{3}$
- d) $f(x) = -36$

2051 Bestäm $f'(3)$ om

- a) $f(x) = x$
- b) $f(x) = 3x$
- c) $f(x) = 0,3$
- d) $f(x) = 3x^3$

2052 Bestäm $f(-2)$ och $f'(-2)$ om

- a) $f(x) = 20x$
- b) $f(x) = 10x^2$
- c) $f(x) = 5x^3$
- d) $f(x) = -2$

2053 Bestäm $f(x)$ och $f'(x)$ för det angivna x -värdet.

- a) $f(x) = x^9$ och $x = -1$
- b) $f(x) = 120x$ och $x = \frac{1}{3}$
- c) $f(x) = 4x^3$ och $x = \frac{1}{2}$
- d) $f(x) = -7x^2$ och $x = 3$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

2054 Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{2}$ är given.

- a) Vad betyder $f(1)$?
- b) Bestäm $f'(1)$ och förklara vad du har beräknat?
- c) Vilken fråga får du svar på om du bestämmer $f(x) = 1$?
- d) Vilken fråga får du svar på om du bestämmer $f'(x) = 1$?

2055 a) Rita i samma koordinatsystem graferna till $f(x) = 3x^2$ och $g(x) = -3x$.

- * b) Lös ekvationen $f(x) = g(x)$ och förklara vad du har bestämt.
- * c) Lös ekvationen $f'(x) = g'(x)$ och förklara innebörden av resultatet.

* **2056** a) Lös ekvationen $f'(x) = 3$ om $f(x) = x^3$.
b) Tolka med ord resultatet i a).

* **2057** I vilken punkt har grafen till funktionen $f(x) = 2x^3$ lutningen
a) 24 b) -48 c) $\frac{2}{3}$

* **2058** En parkerad bil börjar rulla nedför en backe så att den på tiden t sekunder rullar s meter där $s = 0,30t^2$.
a) Bestäm bilens hastighet när den rullat i 4,0 sekunder.
b) När är bilens hastighet 15 m/s och hur långt har den rullat då?

Deriveringsregler för summor av funktioner



Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två funktioner. Vi bildar deras summa $h(x) = f(x) + g(x)$ som är en ny funktion. Vi använder derivatans definition på $h(x)$ och får

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Vi har visat en regel för derivatan av en summafunktion.

Om $h(x) = f(x) + g(x)$ så är $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

En polynomfunktion $f(x)$ är en summa av potensfunktioner med icke-negativa heltalsexponenter.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Derivatan av en polynomfunktion är med regeln ovan summan av derivatorna av de ingående potensfunktionerna.

Derivatan av en polynomfunktion är summan av derivatorna av de ingående potensfunktionerna.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1$$

EXEMPEL

Derivata av polynomfunktion

Bestäm derivatan av

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = 5x^3 - x^2 + x$

LÖSNING:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = 2x + 2$$

b) $g(x) = 5x^3 - x^2 + x$

$$g'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2x + 1 = 15x^2 - 2x + 1$$

SVAR: a) $f'(x) = 2x + 2$

b) $g'(x) = 15x^2 - 2x + 1$

Derivera var och en av potensfunktionerna.

En helikopters hastighet

En helikopter stiger rakt upp i luften. Dess avstånd s m ovanför marken efter t sekunder kan beskrivas med funktionen $s(t) = \frac{t^2 + t}{3}$

- Hur högt har helikoptern stigit på en minut?
- Vilken medelhastighet har helikoptern under den första minuten?
- Vilken hastighet har den efter en minut?

LÖSNING:

- a) Tiden mäts i sekunder vilket betyder att $t = 60$ ska sättas in i $s(t) = \frac{t^2 + t}{3}$

$$\text{Vi får } s(60) = \frac{60^2 + 60}{3} = 1220.$$

- b) Medelhastigheten i m/s bestäms av ändringskvoten $\frac{s(60) - s(0)}{60 - 0} = \frac{1220 - 0}{60} \approx 20$

- c) Hastigheten efter 60 s är $s'(60)$. Vi deriverar funktionen $s(t) = \frac{t^2 + t}{3}$ och får $s'(t) = \frac{2t + 1}{3}$. Då är $s'(60) = \frac{2 \cdot 60 + 1}{3} \approx 40$

SVAR: a) Den har stigit 1,2 km på en minut.

b) Medelhastigheten under första minuten är 20 m/s.

c) Hastigheten efter en minut är 40 m/s.



ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

2059 Bestäm y' .

a) $y = 5x^2 - 7x + 11$

b) $y = 4x^3 + 0,5x^2$

c) $y = 9 - 12x$

d) $y = x^5 - x^3$

2060 Derivera

a) $f(x) = 9x^2 + 15x - 6$

b) $g(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$

c) $h(x) = \frac{3x^4 - 5}{12}$

d) $s(t) = 8t - 5t^2$

2061 Bestäm derivatans värde då $x = 0$

a) $f(x) = 10x^2 - 20x + 15$

b) $f(x) = 1 - 3x - 5x^3$

c) $g(x) = 4x^5 + 7x + 3$

d) $h(x) = \frac{5x^3 - 7x}{6}$

2062 Bestäm

a) $f'(1)$ om $f(x) = 3x^4 - 5x^2$

b) $g'(-1)$ om $g(x) = 6x^3 - 2x + 100$

c) $h'(2)$ om $h(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{4} - 3x$

d) $s'(5)$ om $s(t) = 100 + 15t$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 2063** Det tar 2,0 minuter för ett pendeltåg att färdas från station A till station B. Tågets avstånd s km från stationen A efter t minuter kan beskrivas med funktionen $s(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^3$.
- Hur långt är det mellan stationerna?
 - Vilken medelhastighet har tåget?
 - Vilken hastighet har tåget efter 1 min?
 - Lös ekvationen $s'(t) = 0,50$ och förklara vad du har beräknat.



- 2064** En boll kastas uppåt och dess höjd h meter efter t sekunder kan beskrivas med funktionen $h(t) = -5,0t^2 + 20t + 8,0$.

- Bestäm bollens maximala höjd. **T**
- Vilken hastighet har bollen när den träffar marken?

- * **2065** I vilka punkter har funktionen $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$ lutningen 26?

- * **2066** $f(x) = ax^2 + bx$.

- Bestäm konstanterna a och b så att $f(1) = 2$ och $f'(1) = 0$.
- Vad vet du om funktionen utifrån $f(1) = 2$ och $f'(1) = 0$?
- Rita funktionens graf.

- * **2067** Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^3 - x^2 - x + 2$ i punkten $(1, 1)$. **T**

- ** **2068** $f(x) = -x^2$. Ekvationen $f(x) = f'(x)$ har en lösning $x = a > 0$. Bestäm a och $f(a)$.

DERIVERINGSREGLENS BEVIS

Omvändningen till konjugatregeln ger att $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Allmänt gäller att

(1) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, n positivt heltal.

- Övertyga dig om giltigheten av identiteten (1) genom att utföra multiplikationen i det högra ledet.
- Använd (1) och derivatans definition för att visa att potensfunktionen $f(x) = x^n$, n positivt heltal, har derivatan $f'(x) = nx^{n-1}$.

UTMANING

1
3
5
6

Deriveringsregel för potensfunktioner



Funktionerna $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \sqrt{x}$ är exempel på potensfunktioner som inte har positiv heltalsexponent.

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ är definierad för alla $x \neq 0$.

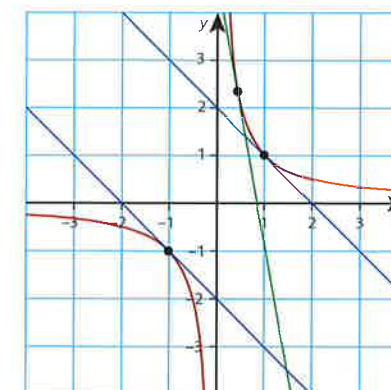
Vi ritar grafen och markerar några tangenter. Gemensamt för tangenterna är att de har negativ lutning, dvs. $f'(x) < 0$.

Vi bestämmer derivatan av $f(x) = \frac{1}{x}$ med hjälp av derivatans definition.

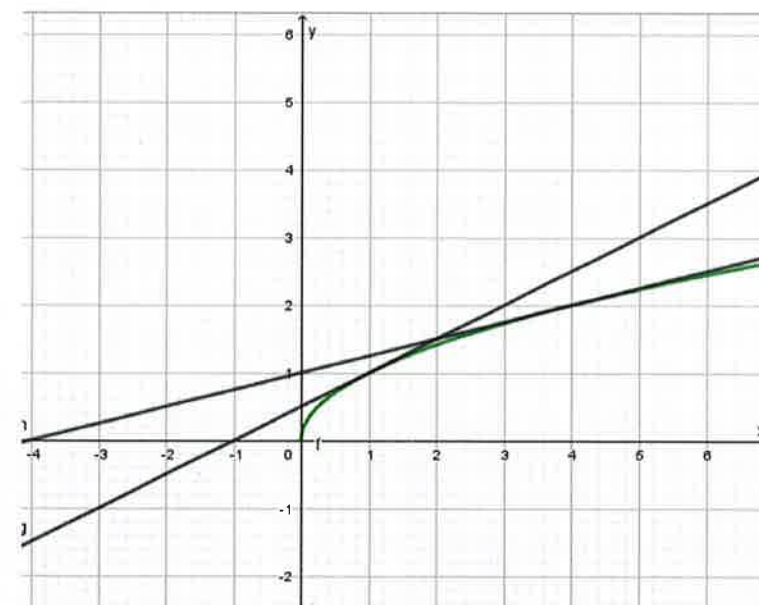
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h) \cdot x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Tillämpar vi regeln som vi har använt för positiva heltalsexponenter på $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $x \neq 0$ får vi $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ vilket stämmer med det härledda resultatet.

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ har derivatan $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.



Funktionen $g(x) = \sqrt{x}$ är definierad för $x \geq 0$. Vi ritar dess graf och markerar några tangenter.



Vi använder derivatans definition för att bestämma $g'(x)$.

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Vi förlänger med konjugatet till täljaren, $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ och får

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vi utför även derivering av $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$ med hjälp av regeln som vi har tillämpat på potensfunktioner.

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Funktionen $g(x) = \sqrt{x}$ har derivatan $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ för alla $x > 0$.

Vi har för två fall visat att deriveringsregeln även gäller när potensfunktionen har en exponent som inte är ett positivt heltal. Det går att visa att regeln gäller för alla reella tal men det ligger utanför denna kurs.

ALLMÄN DERIVERINGSREGEL FÖR POTENSFUNKTIONER

Om $f(x) = ax^n$ så är $f'(x) = anx^{n-1}$

Derivera potensfunktioner

Bestäm derivatan av

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$

c) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$

LÖSNING:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

b) $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

c) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$$

SVAR: a) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

b) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$

Derivatans värde

Bestäm $g'(1)$ om $g(x) = x + \frac{3}{x}$.

LÖSNING:

$$g(x) = x + \frac{3}{x} = x + 3x^{-1}$$

$$g'(x) = 1 - 1 \cdot 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{3}{1^2} = 1 - 3 = -2$$

SVAR: $g'(1) = -2$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

2069 Derivera

- a) $f(x) = x^{-4}$ b) $g(x) = x^{-10}$
 c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ d) $g(x) = \frac{1}{x^7}$

2070 Derivera

- a) $g(x) = \frac{3}{x^3}$ b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
 c) $g(x) = 8x^{\frac{3}{4}}$ d) $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

2071 Derivera

- a) $f(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$
 b) $g(x) = 4\sqrt{x} - 7$
 c) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$
 d) $g(x) = x^{0,5} - x^{0,2}$

2072 Bestäm

- a) $f'(1)$ om $f(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$
 b) $g'(2)$ om $g(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$
 c) $f'(5)$ om $f(x) = 3\sqrt{2} \cdot x$
 d) $g'(4)$ om $g(t) = 3\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$

* 2073 Bestäm $f'(4)$ om $f(x) = x\sqrt{x}$ **T**



2074 Bestäm funktionens derivata för $x = 1$

- a) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$
 b) $g(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$
 c) $h(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2 + \sqrt[3]{x}$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

2075 Bestäm för funktionen $f(x) = -\frac{2}{x}$

- a) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ b) $f'(1)$
 c) Förklara med ord vad du har beräknat i a) och i b).

* 2076 Derivera $f(x) = \frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$ **T**

** 2077 Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$ då $f(x) = \sqrt{ax}$, a reellt tal > 0 .

** 2078 Kraften F N mellan två kroppar beror av deras inbördes avstånd x meter enligt sambandet $F(x) = \frac{C}{x^2}$, där C är en konstant.

- a) Bestäm $\frac{F(10,5) - F(10)}{0,5}$ och förklara vad du har beräknat.
 b) Bestäm $F'(10)$ och tolka ditt resultat.

Andra beteckningar för derivata



Vi har hittills använt beteckningen "prim" för derivata, t.ex. $f'(x)$ och y' .

Det finns även andra beteckningssätt som kan vara bra att känna till. Funktionen $s(t) = 5t^2$ säger att sträckan är en funktion av tiden. Deriverar vi funktionen för att bestämma hastigheten vid en viss tidpunkt har vi skrivit $s'(t) = 10t$. Vi skulle här kunna skriva derivatan som $\frac{ds}{dt}$, vilket utläses "ds dt".

Beteckningen beskriver att vi deriverar funktion med avseende på variabeln t . Den beteckningen kan vara att föredra då en funktion består av flera variabler och man vill framhäva vilken

variabel man deriverar med avseende på. På vissa räknare ser man skrivsättet $\frac{d}{dx}(\quad)$, där man

i parenteser skriver in den funktion som ska deriveras. Ytterligare ett sätt att skriva är $D(f(x))$, vilket betyder att funktionen i parenteser ska deriveras.

För funktionen $f(x)$ är följande beteckningar för derivata ekvivalenta

$$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), D(f(x))$$

Beteckningar för derivata

Funktionen $V = \pi r^2 h$ beskriver hur en cylinders volym beror av radien r och höjden h .

- a) Bestäm $\frac{dV}{dr}$ och förklara vad du kan beräkna.
 b) Bestäm $\frac{dV}{dh}$ och förklara vad du kan beräkna.

LÖSNING:

- a) $\frac{dV}{dr}$ betyder att funktionen $V = \pi r^2 h$ ska deriveras med avseende på radien r .

$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h$ och med sambandet kan volymens förändringshastighet för en viss radie vid konstant höjd beräknas.

- b) $\frac{dV}{dh}$ betyder att funktionen $V = \pi r^2 h$ ska deriveras med avseende på höjden h . $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$

Sambandet anger volymens förändringshastighet vid en konstant radie, dvs. $\frac{dV}{dh}$ är konstant oavsett cylinderns höjd.

SVAR: a) $\frac{dV}{dr} = 2\pi r h$ b) $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$

Beteckningen $D(f(x))$

Bestäm $D(x^5 - x^3 + 12)$

LÖSNING: Funktionen $f(x) = x^5 - x^3 + 12$ ska deriveras. Vi får $D(x^5 - x^3 + 12) = 5x^4 - 3x^2$

SVAR: $D(x^5 - x^3 + 12) = 5x^4 - 3x^2$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

2079 Bestäm

- $g'(x)$ om $g(x) = x^3 - \frac{2}{x}$
- $\frac{dy}{dx}$ om $y = 5x^4 - 3x^2 + 6$
- $\frac{ds}{dt}$ om $s(t) = \frac{t^3}{2} + t$
- $D(2x - \sqrt[4]{x})$

2080 Bestäm

- $f'(x)$ om $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$
- $\frac{dp}{dt}$ om $p(t) = 5t^3 + \frac{1}{t^3} - \sqrt{t}$
- $\frac{d}{dr}(\frac{2}{r^3} - \frac{1}{r})$
- $D(3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}})$

** 2081 Bestäm

- $D((x+a)^2)$
- $D((kx+m)^2)$
- $D((cx)^n)$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

2082 Hastigheten v m/s efter t sekunder hos ett föremål beskrivs med funktionen $v(t) = 0,40t^2$.

- Bestäm $\frac{dv}{dt}$ när $t = 2,0$ s.
- Förklara med ord vad du har bestämt.



Ord och begrepp
Koll på avsnittet

2083 a) Bestäm $D(f(x))$ om
 $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 10$

- Lös ekvationen $D(f(x)) = 12$ och förklara med ord vad du har bestämt.

2084 Funktionen $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ beskriver sambandet mellan volym, radie och höjd för en kon. Bestäm

- $\frac{dV}{dr}$ när $r = 2,0$ cm och $h = 4,5$ cm.
- $\frac{dV}{dh}$ när $r = 2,0$ cm och $h = 4,5$ cm.

2085 Formeln $F = \frac{mv^2}{r}$ anger den kraft F i enheten N (Newton), som ett föremål med massan m kg påverkas av om det roterar med hastigheten v m/s på avståndet r m från centrum. Bestäm

- $\frac{dF}{dv}$ om $m = 0,10$ kg,
 $v = 1,5$ m/s
och $r = 0,30$ m.
- $\frac{dF}{dr}$ om $m = 0,10$ kg,
 $v = 1,5$ m/s
och $r = 0,30$ m.

Derivera med digitala verktyg

Du har nu lärt dig regler för att derivera potensfunktioner och polynomfunktioner. Längre fram i kursen kommer du även lära dig att derivera exponentialfunktioner. I kurs Ma4 får du bland annat lära dig att derivera produkter och kvoter av funktioner. När det gäller derivering av mer komplicerade funktioner kan det vara bra att ta till ett digitalt verktyg. Vi visar med några exempel hur du kan använda GeoGebra för att derivera funktioner.

Derivera med GeoGebra

a) Derivera $f(x) = (2x - 3)^3$ b) Bestäm $f'(1)$

LÖSNING: Vi skulle kunna utveckla uttrycket $(2x - 3)^3$ och därefter derivera den polynomfunktion som erhålls. Vi visar två metoder med GeoGebra:

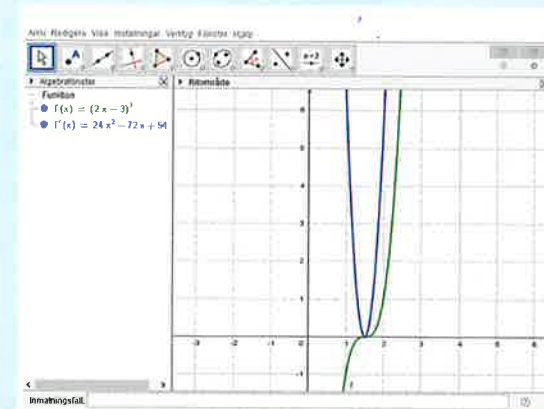
METOD 1: Mata in $f(x) = (2x - 3)^3$ i inmatningsfält.

Tryck Enter. Algebrafönstret visar funktionsuttrycket och ritområdet funktionens graf.

Skriv Derivera ($f(x)$) i inmatningsfältet. Tryck Enter.

Avläs $f'(x) = 24x^2 - 72x + 54$ i algebrafönstret.

I ritområdet ser vi även grafen till $f'(x)$.



Skriv $f'(1)$ i inmatningsfältet och tryck Enter. Svaret visas under tal, som $a = 6$.

METOD 2: Vi använder CAS-verktyget.

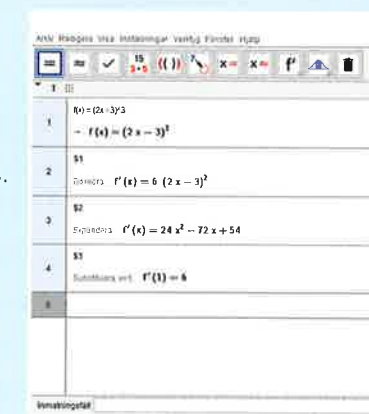
Rad 1, mata in funktionen $f(x) = (2x - 3)^3$, ENTER, derivatan skrivs ut.

Rad 2, tryck på knappen f' , ENTER för att bestämma $f'(1)$.

Rad 3, tryck på knappen $(())$, ENTER, uttrycket för derivatan utvecklas.

Rad 4, tryck på knappen för substituera $\left(\frac{?}{?}\right)$ och ersätt x med 1.

SVAR: a) $f'(x) = 24x^2 - 72x + 54$ b) $f'(1) = 6$



ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

2086 Bestäm med digitala verktyg $f(2)$ och $f'(2)$ då

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x + 2$$

2087 Bestäm $f(-1)$ då

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

2088 Derivera med digitala verktyg

a) $f(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^2$

b) $g(x) = x^4 - \frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = 3(4x-1)^5$

d) $g(x) = x^2 \left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Derivatans $f'(x)$ av en polynomfunktion $f(x)$ är en polynomfunktion.
- 2 När potensfunktionen $f(x) = x^n$ deriveras så minskar exponenten n med 1
- 3 När potensfunktionen $f(x) = x^n$ deriveras så minskar variabeln x med 1.
- 4 $D(f(x))$ är ett annat skrivsätt för $f'(x)$.



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

MOTSATTA TAL

Visa att om andragradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ har två reella nollställen så är funktionens derivata i dess punkter varandras motsatta tal. Gör även en geometrisk tolkning.

UTMANING

Gruppaktivitet

FUNKTIONER OCH DERIVATA

Den här gruppaktiviteten handlar om två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ och deras respektive derivata $f'(x)$ och $g'(x)$. Ni ska diskutera några påståenden och motivera deras giltighet.

- För funktionerna f och g gäller att $f(5) = g(5)$. Gäller då att $f'(5) = g'(5)$?
- För funktionerna f och g gäller att $f(x) = g(x)$ för varje x . Gäller även att $f'(x) = g'(x)$ för varje x ?
- För funktionerna f och g gäller att $f'(5) = g'(5)$? Är då också $f(5) = g(5)$?
- För funktionerna f och g gäller att $f'(x) = g'(x)$ för varje x . Är då också $f(x) = g(x)$ för varje x ?

2.4 Tangenter

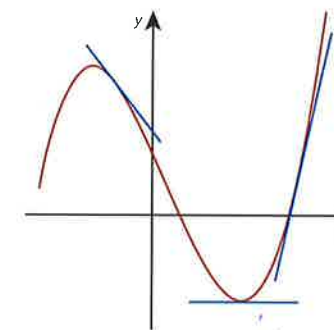


Teorigenomgång
Simulering

Du har i det här kapitlet lärt dig att bestämma derivator för vissa funktioner. Du har också lärt dig att en funktions derivata beskriver funktionens förändringshastighet och att derivatan kan användas för att bestämma tangenters lutning.

Tangent och derivata

Figuren visar en funktions graf. Några tangenter med olika lutning är också inritade. Tangenternas lutning fås genom derivatans värde i tangeringspunkten. Det värdet anger också kurvans lutning i punkten.



En kurvas lutning

Grafen visar funktionen $f(x) = x^2$ tillsammans med två tangenter, en i punkten $(1, 1)$ och en i punkten $(-2, 4)$. Bestäm kurvans lutning i de två tangeringspunkterna.

LÖSNING:

En kurvas lutning i en punkt bestäms av derivatans värde i punkten. Vi bestämmer först derivatan till funktionen

$$f(x) = x^2$$

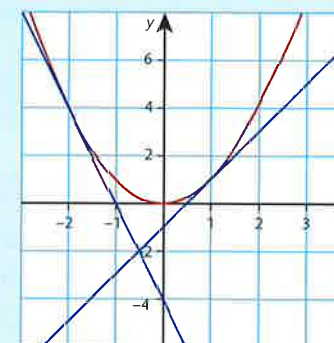
och därefter lutningen i respektive punkt.

$$f'(x) = 2x$$

$$(1, 1) \text{ ger } f'(1) = 2$$

$$(-2, 4) \text{ ger } f'(-2) = -4$$

SVAR: Kurvans lutning i de två punkterna är 2 respektive -4 .



Tangeringspunkt

Figuren visar grafen till $y = 3x^2 - x$ och grafen till $y = 5x + 2$.

- Vilken lutning har en tangent till $y = 3x^2 - x$ som är parallell med $y = 5x + 2$.
- Bestäm tangeringspunkten.

LÖSNING:

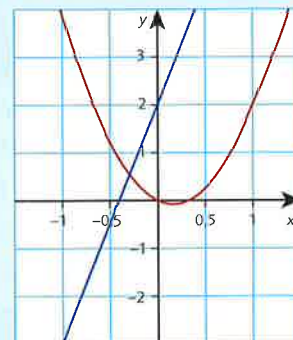
- Linjen $y = 5x + 2$ har riktningskoefficient $k = 5$, vilket innebär att lutningen är 5. Två linjer som är parallella har samma lutning. Alltså har den sökta tangenten lutningen $k = y' = 5$.
- Vi vet att $y' = 5$. Vi deriverar $y = 3x^2 - x$ och sätter derivatan $y' = 6x - 1$ lika med 5 för att bestämma tangeringspunktens x -koordinat.

$$6x - 1 = 5$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$
Sätt in $x = 1$ i $y = 3x^2 - x$ för att beräkna punktens y -värde.

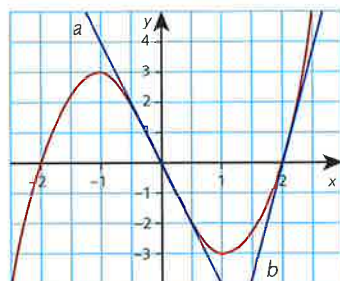
$$y = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2.$$
Tangeringspunkten är $(1, 2)$



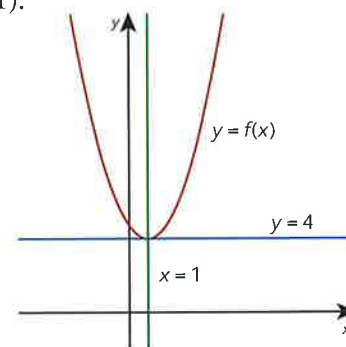
SVAR: a) Lutningen är 5 b) Tangeringspunkten är $(1, 2)$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- Vilken lutning har en tangent till funktionen $y = x^3$ i punkten
 a) $(1, 1)$ b) $(2, 8)$ c) $(-1, -1)$
- Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 4x$ samt en tangent i punkten $(0, 0)$ och en i punkten $(2, 0)$. Bestäm tangenternas lutning algebraiskt.



- Funktionen $y = 6 - \frac{x^2}{2}$ har en tangent med lutningen -1 . Bestäm tangeringspunkten.
- Bestäm lutningen på kurvan $y = x^4$ när $x = 2$.
- Bestäm med hjälp av grafen $f(1)$ och $f'(1)$.



- Bestäm riktningskoefficienten för tangenten till funktionen $f(x) = -2x^3 + x^2 + 3x$ då $x = 1$.

- Bestäm punkten i vilken tangenten till funktion $f(x) = 3x^2 - 19x$ har riktningskoefficient 11.

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- I vilka punkter har grafen till funktionen $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5$ tangenter som är parallella med x -axeln?
- För vilka x -värden har funktionen $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$ negativ lutning?
- Funktionen $y = 3x^2 - 7x$ har en tangent parallell med linjen $y = 11x + 100$. Bestäm tangeringspunkten.

- Bestäm det x -värde för vilket funktionerna $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ och $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 3$ har samma lutning.
- Bestäm den punkt/de punkter på kurvan
 a) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 + 8x + 12$ där tangenten till kurvan är parallell med linjen $y = 8x + 2$.
 b) $f(x) = 2x^3 - 4x - 6$ där tangenten är vinkelrät mot linjen $y = -\frac{1}{2}x - 5$.
- Visa att alla tangenter till funktionen $y = x^3$ har icke-negativ lutning.
- Visa att tangenten i andragradsfunktionens extrempunkt har lutningen noll.

Gruppaktivitet

NOLLSTÄLLEN OCH DERIVATA

I den här gruppaktiviteten ska ni undersöka sambandet mellan antal gemensamma nollställen till en polynomfunktion och dess derivata. Använd gärna digitala verktyg.

- Undersök om en andragradsfunktion och dess derivata kan ha gemensamt nollställe.
- Undersök om en tredjegradsfunktion och dess derivata kan ha gemensamt nollställe. Ni kan exempelvis pröva med $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- Formulera ett samband mellan antal nollställen till funktionen och antal nollställen till dess derivata. Försök visa sambandet generellt.

Tangentens ekvation



Teorigenomgång

Ekvationen för en rät linje kan bestämmas om man känner linjens riktningskoefficient k och en punkt (x_0, y_0) på linjen genom att använda räta linjens k -form, $y = kx + m$ eller enpunktsformen $y - y_0 = k(x - x_0)$. En tangent till kurvan $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ har riktningskoefficienten $k = f'(a)$. Tangentens ekvation på enpunktsform blir $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ eller $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Funktionen $f(x)$ har i punkten $(a, f(a))$ en tangent med ekvationen $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Tangentens ekvation I

En funktion $f(x)$ har i punkten $(1, 2)$ derivatan $f'(1) = 3$. Bestäm ekvationen för funktionens tangent i punkten.

LÖSNING:

Tangentens lutning $k = f'(1) = 3$. Ekvationen $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ med $a = 1$ och $f(1) = 2$ ger $y = 3(x - 1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$.

SVAR: Tangentens ekvation är $y = 3x - 1$.

Tangentens ekvation II

Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen $f(x) = x^3 + 3x - 8$ i punkten $(2, 6)$.

LÖSNING:

Tangentens riktningskoefficient $k = f'(2)$.

Derivatan av $f(x) = x^3 + 3x - 8$ är $f'(x) = 3x^2 + 3$

$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 3 = 15$.

Tangentens ekvation är $y = 15(x - 2) + 6 = 15x - 24$.

SVAR: Tangentens ekvation är $y = 15x - 24$.

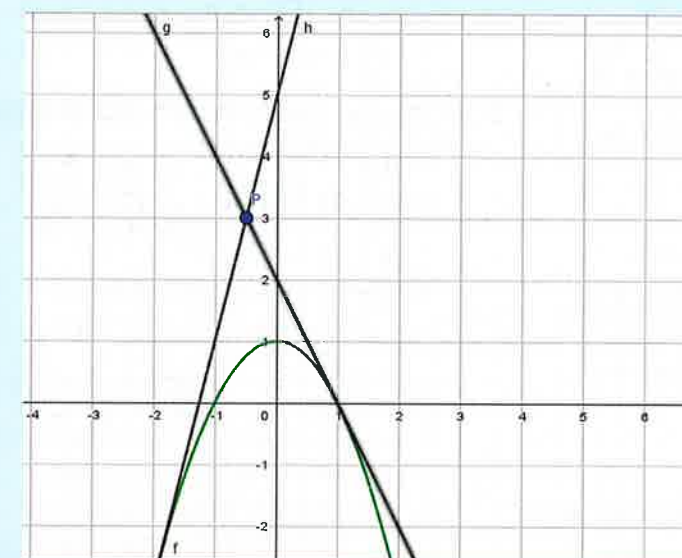
EXEMPEL

Tangentens ekvation III

Bestäm ekvationen för tangenter till funktionen $f(x) = 1 - x^2$ genom punkten $P = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

LÖSNING:

Vi ritar $f(x) = 1 - x^2$ och markerar punkten P . Från figuren ser vi att vi kan dra två tangenter.



Anta att tangeringspunkten har x -koordinaten a . Då är y -koordinaten $1 - a^2$.

Tangentens riktningskoefficient är $k = f'(a)$.

$f'(x) = -2x$ ger $k = -2a$ och tangentens ekvation är $y = -2a(x - a) + 1 - a^2 = -2ax + a^2 + 1$

Linjen går genom punkten $P = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$. Insättning i tangentens ekvation ger $3 = a + a^2 + 1$.

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$a = 1 \text{ eller } a = -2$$

Då $a = 1$ är tangentens riktningskoefficient $k = -2$ och tangentens ekvation blir $y = -2x + 2$

Då $a = -2$ är tangentens riktningskoefficient $k = 4$ och tangentens ekvation blir $y = 4x + 5$

SVAR: $y = -2x + 2$ och $y = 4x + 5$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

2103 Bestäm tangentens ekvation till funktionen $y = f(x)$ om

- a) $f'(0) = 5$ i origo
- b) $f'(1) = -1$ i punkten $(1, 4)$
- c) $f'(-2) = 0$ i punkten $(-2, 10)$

2104 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen

- a) $f(x) = x^2$ i punkten $(2, 4)$
- b) $f(x) = x^3$ i punkten $(1, 1)$

2105 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ i punkten

- a) $(1, 5)$
- b) $(-2, -1)$
- c) $(-1, -3)$
- d) $(0, -1)$

2106 Bestäm ekvationen för tangenten till funktionen

- a) $y = x^3 - 3x$ i punkten med x -koordinaten -2 .
- b) $y = 2x - \frac{1}{x}$ i punkten $(0, 5, -1)$.
- c) $y = 5 - \sqrt{x}$ i punkten med x -koordinaten 4 .

2107 Bestäm ekvationen för tangenten till

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x$ när $x = 1$
- b) $y = 10 - 7x$ när $x = -10$
- c) $g(x) = x^2 - 5x + 8$ när $x = 3$
- d) $f(x) = x^3 - 6x^2$ när $x = 2$

Ord och begrepp
Koll på avsnittet

Problemlösning

Här följer några uppgifter för dig som vill träna problemlösning med fokus på derivata och tangenter.

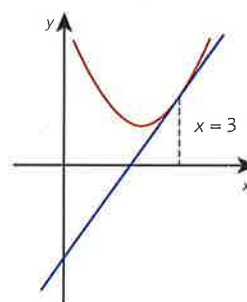
ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

2108 Bestäm tangentens ekvation till funktionen $y = f(x)$ då $f(-3) = 2$ och $f'(-3) = -1$.

2109 En tangent till funktionen $y = 3x^2 - x + 6$ har riktningskoefficienten -1 . Bestäm tangentens ekvation.

2110 Funktionen $y = \frac{1}{x}$ har två tangenter med lutningen -4 . Bestäm tangenternas ekvationer.

2111 Grafen visar funktionen $y = 2x^2 - 8x + 11$ och en tangent. Bestäm tangentens ekvation.

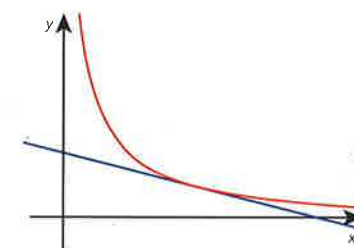


2112 För en linjär funktion $f(x)$ gäller att $f(1) = f'(1) = 3$. Bestäm den linjära funktionen.

2113 Till funktionen $y = x^3 - 3x^2 + 3$ bestäms en tangent då $x = 1$. Bestäm tangentens skärningspunkt med x -axeln.

2114 Bestäm ekvationen för de tangenter till funktionen $f(x) = 2x^3 - 4x - 6$ som är parallella med linjen $y = 2x - 5$.

* **2115** Grafen visar funktion $y = \frac{1}{x}$ och en tangent till funktionen i punkten med x -koordinaten 2 . Bestäm arean av det område som begränsas av tangenten och de positiva koordinat-axlarna.



2116 Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y = x^2$ i punkten $(2, 4)$. **T**

* **2117** I skärningspunkterna mellan linjen $y = x - 1$ och parabeln $y = x - x^2$ drar man tangenter som skär varandra i en punkt. Bestäm skärningspunkten.

** **2118** Bestäm till funktionen $f(x) = 2x^3 + 9x^2$ ekvationen för en tangent med negativ lutning.

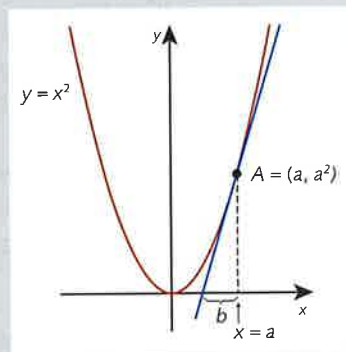
** **2119** a) Visa att parablerna $y = x^2$ och $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ tangerar varandra.
b) Bestäm ekvationen för den gemensamma tangenten.

** **2120** Det finns två olika linjer som går genom punkten $(1, -3)$ och som båda är tangenter till parabeln $y = x^2$. Bestäm tangenternas ekvationer.

T L

FERMATS TANGENTMETOD

Pierre de Fermat, 1601-1665 är kanske mest känd för "Fermats stora sats": ekvationen $x^n + y^n = z^n$ saknar positiva heltalslösningar x, y, z för heltal $n > 2$. Fermat var jurist men hade matematik som hobby. Han sysslade förutom med talteori även med analytisk geometri, sannolikhetslära och matematisk analys. I sin avhandling "Metod för att bestämma maxima och minima" beskrev han sin tangentmetod. Fermat bestämde tangenten i punkten $A = (a, a^2)$ på grafen till $y = x^2$, med hjälp av sub-tangenten b . Med sub-tangenten menas den sträcka på x -axeln som begränsas av tangentens skärning med x -axeln och a .



- Använd informationen om Fermats tangentmetod för att lösa uppgifterna.
- Visa att sub-tangenten b till funktionen $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är $b = \frac{f(a)}{f'(a)}$.
 - Vilket villkor måste $f'(a)$ uppfylla?
 - Bestäm sub-tangenten till $y = x^2$ i punkten (a, a^2) .

TREDJEGRADSPOLYNOM

UTMANING

Bestäm det tredjegradspolynom som uppfyller ekvationen $P(x) - P'(x) = x^3$

1
3
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 2.4

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- Funktionen $f(x)$ har i punkten med x -koordinaten a lutningen $f'(a)$.
- Funktionen $f(x)$ har i punkten med x -koordinaten a en tangent med riktningskoefficient $f'(a)$.
- En funktion som har samma lutning för alla x -värden i definitionsmängden är en rät linje.
- Samtliga tangenter till funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ har negativ lutning.

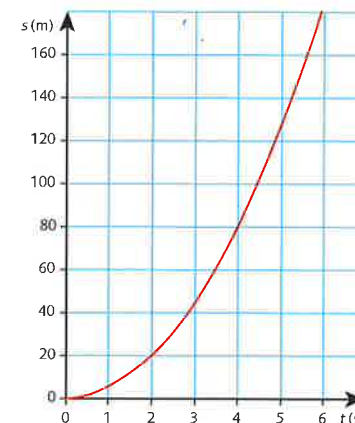
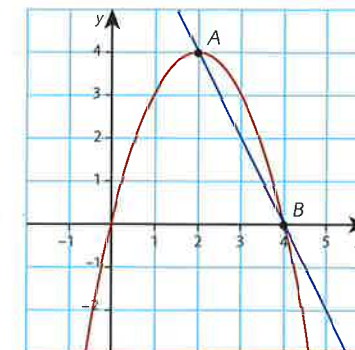


Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1
5
6

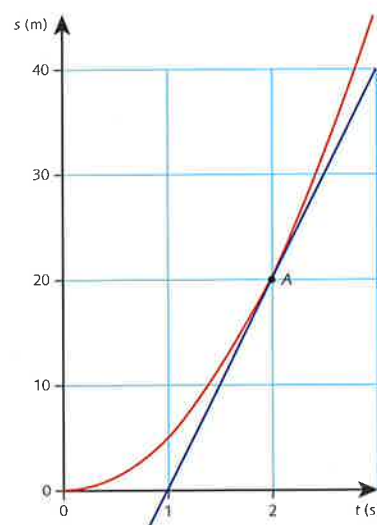
2.1 ÄNDRINGSKVOTER

- För en vattenbehållare beskrivs vattennivåns höjd av sambandet $h(t) = 2,4t^{1/3}$. Höjden $h(t)$ anges i cm och tiden t i s.
 - Stiger eller sjunker vattennivån?
 - Bestäm medelvärde av hur snabbt höjden av vattennivån förändras mellan tidpunkterna 0 s och 8 s.
- Bestäm grafens medellutning mellan de markerade punkterna.
- Då en kula släpps från hög höjd beskrivs dess rörelse av sambandet $s(t) = 4,9t^2$. Sträckan $s(t)$ anges i m och tiden t i s.
 - Vilken medelhastighet har kulan under den första sekunden?
 - Vilken medelhastighet har kulan från $t = 0,40$ s till $t = 0,60$ s?
- Bestäm för rörelsen som illustreras av grafen
 - medelhastigheten mellan tidpunkterna 0 s och 2 s
 - medelhastigheten mellan tidpunkterna 2 s och 4 s
- Tillryggalagd sträcka $s(t)$ m som funktion av tiden t s för en mopedist ges under en tid av sambandet $s(t) = 2,0t + 0,25t^2$.
 - Bestäm $s(4)$ och ange med ord vad du har bestämt.
 - Bestäm $\frac{s(4)}{4}$ och ange med ord vad du har bestämt.
 - Bestäm $\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2}$ och ange med ord vad du har bestämt.
- Antalet invånare i en stad t år efter år 2000 beskrivs av funktionen $N(t)$. Ställ upp det uttryck eller den ekvation som kan användas för att besvara följande frågor.
 - Hur många invånare finns det år 2012?
 - När finns det 115 000 invånare i staden?
 - Med vilken medelhastighet ändras invånarantalet mellan åren 2012 och 2020?
- Den sträcka $s(t)$ m som en bil färdas på t s ges av sambandet $s(t) = 25t - 0,80t^2$. Hur långt har bilen färdats då medelhastigheten från tiden 0 s är 15 m/s?
- Volymen hos en ballong, $V(t)$ dm³, efter t s beskrivs av sambandet $V(t) = \sqrt{t}$. Bestäm t om ballongen fylls med medelhastigheten
 - 0,25 dm³/s mellan tidpunkterna 0 s och t s.
 - 0,20 dm³/s mellan tidpunkterna 1,0 s och t s.



2.2 DERIVATA

- Grafen visar ett föremåls rörelse. Bestäm dess hastighet vid den markerade punkten.
- Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = \frac{x^2}{2}$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$.
- Bestäm $f'(x)$ då
 - $f(x) = 2x + 1$
 - $f(x) = 1$
 - $f(x) = \frac{3-4x}{2}$
- Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna
 - (2, 1) och (1, 2)
 - (-3, 5) och (3, -1)
 - (-4, 1) och (4, 1)
- Uppskatta $f'(2)$ genom att välja lämpliga symmetriska ändringskvoter.
 - $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
 - $f(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- Tillryggslagd sträcka hos ett fordon ges av $s(t)$ m då det gått t sekunder efter att dess färd har påbörjats. Tolk följande likheter.
 - $s(0) = 0$
 - $s'(5) = 2,5$
 - $s(10) = 125$
 - $s'(15) = 0$
- Använd derivatans definition för att bestämma $f'(x)$ då $f(x) = 3x - 2$.
- Använd derivatans definition för att bestämma $f'(3)$ då $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$.

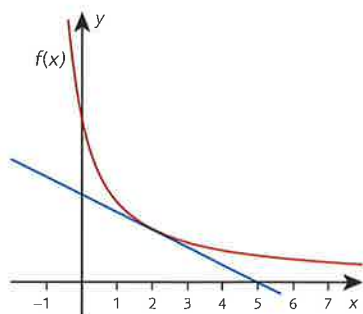


2.3 DERIVERINGSREGLER

- Derivera
 - $f(x) = 4x^5$
 - $g(x) = 2x^{12}$
 - $f(x) = -3x$
 - $h(x) = -\frac{1}{6}$
- Bestäm $f(2)$ och $f'(2)$ om
 - $f(x) = 7x^2$
 - $f(x) = \frac{8}{x}$
 - $f(x) = \frac{x^3}{6}$
 - $f(x) = -\frac{x}{8}$
- Bestäm derivatan av
 - $f(x) = 2x - 9$
 - $f(x) = 3x^2 - x$
 - $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 6x - 5$
 - $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = x^2 - 4x - 5$.
 - Bestäm $f(0)$
 - Lös ekvationen $f(x) = 0$
 - Bestäm $f'(0)$
 - Lös ekvationen $f'(x) = 0$
- En influensaepidemi sprids i skolan. Efter t dagar är P elever sjuka där $P(t) = 20t - t^2$.
 - Med vilken hastighet sprids influensan när $t = 1$?
 - När sprids influensan med hastigheten 8 elever/dag?
 - Hur många elever är sjuka när influensan sprids med 8 elever/dag?
- Bestäm $\frac{df}{dh}$ om $f(h) = 2\pi rh + \pi r^2$.
- Den sträcka s m som ett föremål rör sig på t sekunder beskrivs av funktionen $s(t) = 8t + t^2 - \frac{t^3}{3}$.
 - Bestäm hastigheten $v(t) = \frac{ds}{dt}$.
 - När är hastigheten 0?
 - Bestäm accelerationen $a(t) = \frac{dv}{dt}$.
 - Bestäm accelerationen efter 1 s.
- Temperaturen T °C i en byggnad kan beskrivas med funktionen $T(x) = \frac{200 - x^2 - x}{10}$ där x är avståndet i meter från värmekällan.
 - Bestäm $T(3,0)$ och förklara med ord vad du har beräknat.
 - Bestäm $T'(3,0)$ och förklara med ord vad du har beräknat.

2.4 TANGENTER

- Vilken lutning har en tangent till funktionen
 - $f(x) = 3x^2$ i punkten $(1, 3)$
 - $g(x) = x^3 - 2x + 5$ i punkten $(0, 5)$
 - $f(x) = 100 - 7x$ i punkten $(-1, 107)$
 - $g(x) = \sqrt{x}$ i punkten $(16, 4)$
- I en punkt på grafen till andragradsfunktionen $y = 2x^2 + x - 1$ är lutningen -7 .
 - Bestäm punkten.
 - Bestäm ekvationen för tangenten i den punkten.
- Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x^3 + x^2 + x$ när $x = 1$.
- Bestäm alla punkter på kurvan $y = x^3 - x + 1$ där tangenten är parallell med linjen $y = 2x + 5$.
- Bestäm alla punkter på kurvan $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ där tangenten är parallell med x -axeln.
- Funktionerna $f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x^2 - 15x$ och $g(x) = -4x^2$ har parallella tangenter. Bestäm ekvationerna för dessa tangenter.
- Den räta linjen har lutningen -1 och är tangent till funktionen $f(x)$ då $x = 2$. Bestäm $f(2)$ och $f'(2)$.

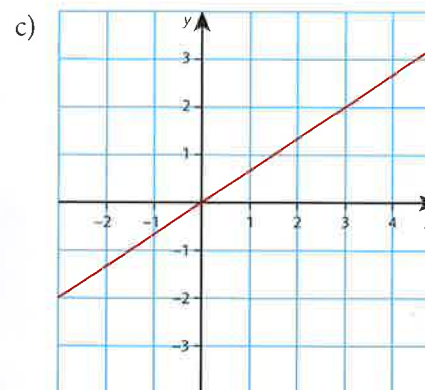
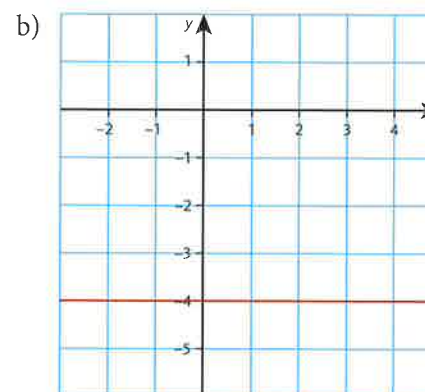
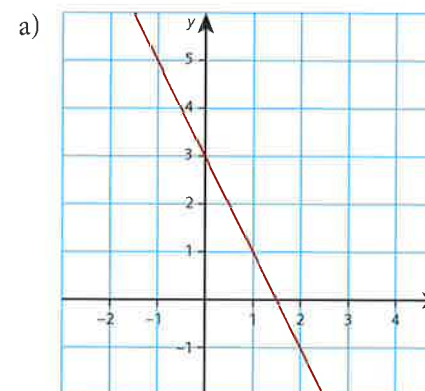


- Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y = \frac{1}{x}$ när $x = a$.

Blandade övningar

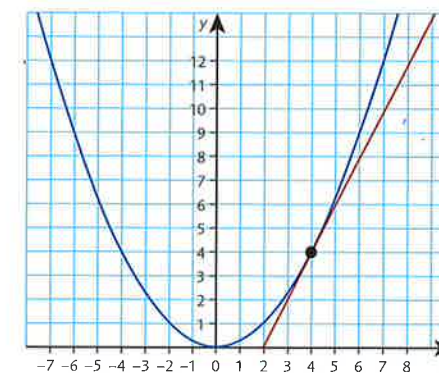
ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

- Bestäm de avbildade funktionernas derivata.



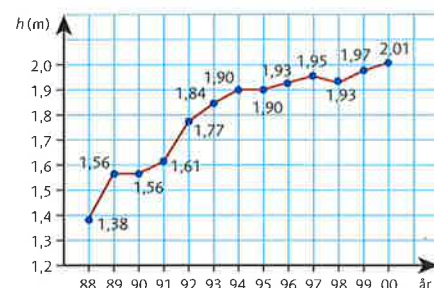
- Bestäm ändringskvoten för funktionen $y = x^2 + 3$ i intervallet
 - $0 \leq x \leq 2$
 - $-1 \leq x \leq 1$
 - $-1 \leq x \leq 2$

- Bestäm grafiskt derivatan till funktionen i figuren då $x = 4$.



- Bestäm ett närmevärde till $f'(4)$ för funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$ genom att bestämma den symmetriska ändringskvoten $\frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9}$.
- Bestäm $f'(3)$ om
 - $f(x) = 7x - 11$
 - $f(x) = 5 - x$
- Bestäm derivatan för en linjär funktion som går genom punkterna
 - $(-1, 5)$ och $(3, -9)$
 - $(2, -14)$ och $(10, -14)$
- * För en linjär funktion gäller att $f'(3) = 2$ och $f(2) = 3$. Bestäm
 - $f'(2)$
 - $f(3)$

- 8 Figuren visar Kajsa Bergqvists höjdhoppsresultat utomhus från år 1988 till år 2000. Hur stor var den genomsnittliga förändringshastigheten för hennes resultat från 1988 till 2000? (NP Ma C vt 02)



- 9 Derivera

a) $g(x) = 8x^9$ b) $g(x) = 20x$
 c) $f(x) = \frac{5x^3}{18}$ d) $h(x) = 7,5$

- 10 Bestäm $f'(1)$ om

a) $f(x) = 1 - x$ b) $f(x) = 2x^2 - 6x$
 c) $f(x) = 2012$ d) $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$

- 11 Låt $y = x^3 + 5x$

a) Bestäm y' b) Beräkna $y'(3)$
 (NP Ma C ht 96)

- 12 Bestäm derivatan y' till följande funktioner

a) $y = 4x^2 - 3x + 5$
 b) $y = 2x^3 - 6x + 9$

* c) $y = \frac{2x^2}{5} - \frac{5}{2x^2}$

* d) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

- * 13 Bestäm $f(-1)$ och $f'(-1)$ om

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x}$$

- 14 Bestäm ekvationen för en tangent till funktionen $f(x)$ i punkten P .

a) $y = x^3 - 1$, $P = (2, 7)$
 b) $y = 3x^2 - 4x$, $P = (1, -1)$
 c) $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$, $P = (1, -1)$
 d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$, $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

- 15 Bestäm

a) $D(x^4 - 5x^2 + 6x)$
 b) $\frac{ds}{dt}$ om $s(t) = -2t^2 + 4t + 7$

- * 16 Bestäm ekvationen för tangenten respektive normalen till kurvan $y = \sqrt{x}$ i punkten $(4, 2)$.

17 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Bestäm och skriv i enklaste form:
 a) $f(4)$ * b) $f'(4)$

* 18 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Bestäm $f'(2)$.

** 19 $y = \frac{x^2-1}{x^2-x}$. Bestäm $\frac{dy}{dx}$ T

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

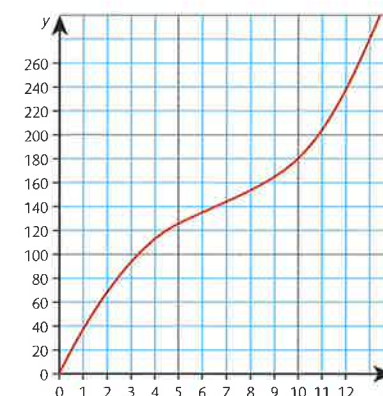
- 20 En bil kör sträckan $s(t)$ km på tiden t timmar. Skriv ett samband för att

a) bilens hastighet efter 3 h är 90 km/h
 b) bilens medelhastighet under den tredje timmen är 100 km/h



- 21 Grafen i diagrammet beskriver körsträckan för en rallybil under en del av en tävling. Efter tiden t sekunder har bilen hunnit sträckan $s(t)$ meter. Beräkna med hjälp av diagrammet följande två uttryck och förklara vad värdena säger om bilens rörelse.

a) $\frac{s(12) - s(10)}{12 - 10}$ b) $s'(5)$
 (NP Ma C ht 96)



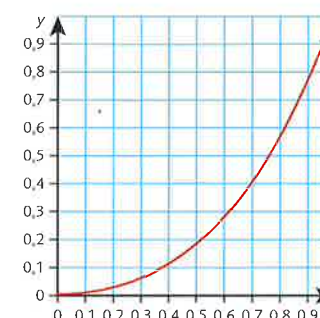
- 22 Funktionen $y = x^2 - 1$ har en tangent med lutningen -3 . Vilken ekvation har tangenten?

- 23 Bestäm ekvationen för den tangent till funktionen $y = x^2 - x - 12$ som är parallell med $y = x - 4$.

- 24 Sträckan $s(t)$ m efter t s hos ett fordon som bromsar ges av sambandet $s(t) = 20t - 2,0t^2$. T
 a) Mellan tidpunkterna 0 s och t s är medelhastigheten 12,0 m/s. Bestäm t .
 b) Mellan tidpunkterna 1,0 s och t s är medelhastigheten 8,0 m/s. Bestäm t .

- * 25 Använd derivatans definition för att bestämma $f'(-2)$ då $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$

- 26 I koordinatsystemet är grafen till funktionen $f(x) = x^{2,5}$ ritad. Bestäm $f'(0,6)$ på två olika sätt. (NP Ma C vt 02)



- 27 Vikten V gram hos en cancertumör efter t veckor kan beskrivas med funktionen $V(t) = 0,10t^2$.

a) Med vilken hastighet växer tumören efter 5 veckor?
 b) När växer tumören med hastigheten 5,0 g/vecka?

- 28 a) För vilket x -värde är $f'(x) = g'(x)$ om $f(x) = x^2 - 6x + 4$ och $g(x) = 4x - 3$.

- * b) Beskriv resultatet i a) geometriskt

- * 29 a) Förklara med hjälp av en graf varför derivatan till en konstant funktion är noll.
 b) Förklara med hjälp av derivatans definition varför derivatan till en konstant funktion är noll.

(NP Ma C vt 02)

- * 30 Funktionen f uppfyller följande två villkor: $f(2) = 5$, $-1 \leq f'(x) \leq 2$. Vilka värden kan $f(10)$ anta?
 (NP Ma C vt 02)

- * 31 Vilken är den minsta lutningen som en tangent till kurvan $y = x^5 + x$ kan ha?

- * 32 Vilka tangenter till kurvan $y = x^2 + 2$ går genom $(2, 5)$?
- * 33 Bestäm konstanten c så att $y + x = c$ är en normal till funktionen $y = x^2$ i en punkt P .
- * 34 Vattentemperaturen i en sjö, $y^\circ\text{C}$, följde under flera dygn formeln $y = 18,0 + 0,6t - 0,05t^2$ där t är tiden i dygn. Vid en viss tidpunkt är temperaturökningen $0,4^\circ\text{C}/\text{dygn}$. Beräkna vattentemperaturen vid denna tidpunkt.
- ** 35 Bestäm den räta linje genom punkten $(1, 5)$ som är tangent till kurvan $y = x^3$. **L**
- ** 36 Bestäm $D(x + \frac{1}{x})$ med hjälp av derivatans definition.
- ** 37 I den punkt på grafen till funktionen $f(x) = x^2 + ax + b$ där $x = 4$ dras en tangent. Bestäm konstanterna a och b så att tangentens ekvation blir $y = 5x + 3$.

- ** 38 Volymen $V(t)$ i ett badkar som töms på vatten beskrivs av $V(t) = 16t^2 - 160t + 400$, där $V(t)$ är volymen i liter och t är tiden i minuter.
- a) För vilka värden på variabeln t kan funktionen gälla?
- b) Bestäm den genomsnittliga utströmningshastigheten under de fyra första minuterna.
- c) Bestäm utströmningshastigheten vid tiden 2 minuter och 15 sekunder.
- ** 39 En funktion kan skrivas $f(x) = 3x^2 + a$, där a är en konstant. Om funktionen och dess derivata ritas i samma diagram, tangerar de varandra i en punkt. Derivatan blir med andra ord en tangent till kurvan i den punkten. Beräkna koordinaterna för denna punkt. **T**

OMFATTANDE PROBLEM

- 40 Den allmänna andragsgradsfunktionen skrivs $f(x) = ax^2 + bx + c$. Undersök kurvans lutning i funktionens nollställen.
- Du kan börja din undersökning med $a = -1$ och $b = 0$ och undersöka lutningen för $c = -4$, $c = 0$ och $c = 4$.
 - Välj $a = 1$ och $b = 2$ och undersök för olika värden på c .
 - Välj nya värden på a , b och c .
 - Formulera dina slutsatser.



Kapitelprov

SAMMANFATTNING

Sekant: En rät linje som skär en kurva i minst två punkter.

Tangent: En rät linje som har en punkt gemensam med en kurva och som har samma riktning som kurvan i den punkten.

Ändringskvot: Ett medelvärde på förändringshastigheten hos en funktion.

Derivata: Förändringshastigheten hos en funktion i en punkt.

Derivatan hos en rät linje: Då $f(x) = kx + m$ är $f'(x) = k$.

Derivatans definition: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Deriveringsregel för potensfunktioner: Då $f(x) = ax^n$ är $f'(x) = nax^{n-1}$.

Derivatan av en summafunktion: Då $h(x) = f(x) + g(x)$ är $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Derivatan av polynomfunktioner: Då $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ är

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1.$$

Beteckningar för derivata: $g'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $D(f(x))$

Tangentens ekvation: Tangenten till funktionen $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ har ekvationen $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.