

# 3

## Användning av derivata



### Centralt innehåll

- Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium, andraderivatan och användning av numeriska och symbolhanterande verktyg.
- Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
- Härledning och användning av deriveringsregler för exponentialfunktioner.
- Introduktion av talet  $e$  och dess egenskaper.

### Inledning

I detta kapitel ska vi tillämpa de kunskaper du fått om derivata i föregående kapitel. Vi ska använda derivata för att studera förloppet hos en deriverbar funktion. Detta gör vi på två sätt: dels med teckenstudium av derivatan och dels med andraderivatan, som man får om man deriverar funktionen två gånger. Vi ska också studera derivatan som graf och se samband mellan funktionens graf och funktionens både första- och andraderivata. Du ska också få lära dig deriveringsregler för exponentialfunktioner med olika baser och däribland en speciell bas nämligen talet  $e$ .

Derivata används både inom naturvetenskap och inom ekonomi. Dessa tillämpningar får du också jobba med i detta kapitel.

### Din första uppgift

Rita med räknare eller dator grafen till tredjegradsfunktionen  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ .

Undersök vilken lutning grafen har i punkterna  $(-1, 0)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(2, 0)$  och  $(3, -4)$ , t.ex. genom att rita tangenter genom punkterna och bestämma lutningen för dessa.

Beskriv grafens utseende med ord och med hjälp av lutningen i dessa punkter.

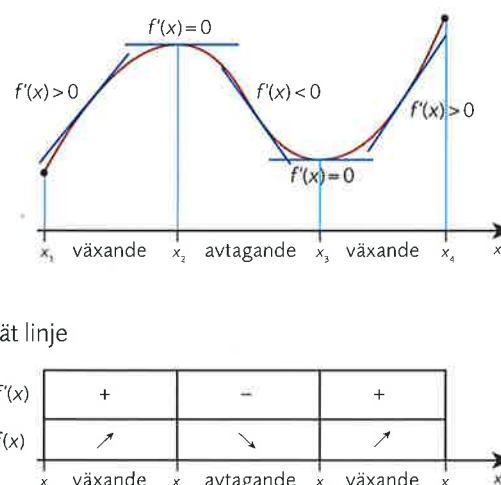
## 3.1 Extremvärdesproblem

I kapitel 1 fick du lära dig att en polynomfunktion kan vara växande eller avtagande eller omväxlande växande och avtagande. En funktion som är omväxlande växande och avtagande kan ha en eller flera lokala extrempunkter. Att studera en funktions derivata är till stor hjälp när man ska finna funktioners lokala extrempunkter.

### Växande och avtagande funktioner

Med hjälp av derivatans tecken kan vi undersöka vilket förlopp en funktion har, eftersom derivatan geometriskt är riktningskoefficienten för en tangent till kurvan. Tangenter till en växande funktion har positiv lutning eller lutningen noll. Det innebär att funktionens derivata  $f'(x) \geq 0$ . Då funktionen är avtagande har tangenterna negativ lutning eller lutningen noll, vilket innebär att funktionens derivata  $f'(x) \leq 0$ . I en lokal extrempunkt är tangenten vågrät, under förutsättning att funktionen är deriverbar i den punkten. En vågrät linje har lutningen noll, dvs.  $f'(x) = 0$ .

Vi kan också visa funktionens förlopp med ett teckenschema för derivatan.



FÖR EN KONTINUERLIG OCH DERIVERBAR FUNKTION GÄLLER

om  $f'(x) \geq 0$  i ett intervall, är funktionen växande i detta intervall  
om  $f'(x) \leq 0$  i ett intervall, är funktionen avtagande i detta intervall

### Avtagande och växande

I vilka intervall är funktionerna avtagande respektive växande?

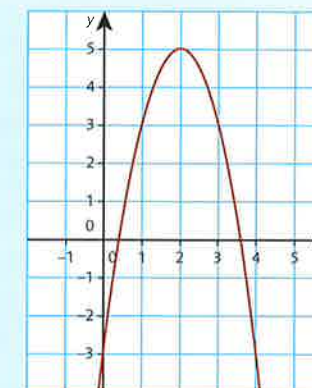
- a)  $y = -2x^2 + 8x - 3$       b)  $y = x^3 - 3x + 2$

#### LÖSNING:

- a) Eftersom  $x^2$ -termen är negativ har funktionen en lokal maximipunkt. Det betyder att funktionen är växande till vänster om den lokala maximipunkten och avtagande till höger. Vi bestämmer  $x$ -koordinaten för den lokala maximipunkten genom att lösa ekvationen  $y' = 0$ . Vi deriverar  $y = -2x^2 + 8x - 3$  och får  $y' = -4x + 8$ .

Vi löser ekvationen  $y' = 0$  och får  
 $-4x + 8 = 0$   
 $x = 2$

Funktionen är växande om  $x \leq 2$  och avtagande om  $x \geq 2$ . Vi kan även kontrollera resultatet genom att rita funktionens graf.



- b) Derivatan till en tredjegradsfunktion är en andragradsfunktion.

En andragradsfunktion kan ha två nollställen.

Vi deriverar  $y = x^3 - 3x + 2$  och får  $y' = 3x^2 - 3$

Vi löser ekvationen  $y' = 0$  och får  $3x^2 - 3 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Vi ritar en tallinje och markerar derivatans två nollställen. Vi skriver också in att  $f'(x) = 0$  för dessa  $x$ -värden.



Därefter undersöker vi derivatans tecken i de tre uppkomna intervallen,  $x < -1$ ,  $-1 < x < 1$  och  $x > 1$ .

Vi väljer något  $x$ -värde i varje intervall och beräknar derivatans värde. Det räcker med ett värde i varje intervall eftersom derivatan för en deriverbar funktion aldrig byter tecken mellan två lokala extrempunkter.

$x < -1$ :

$$x = -2 \text{ ger } f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$$

$-1 < x < 1$ :

$$x = 0 \text{ ger } f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$$

$x > 1$ :

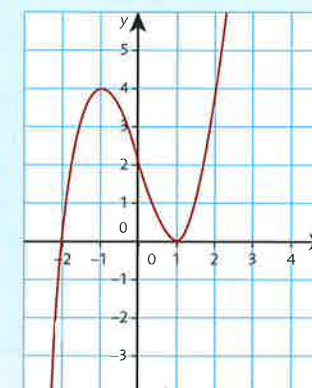
$$x = 2 \text{ ger } f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$$

Vi sammanfattar resultatet i ett teckenschema.

Pilarna anger om funktionen är växande eller avtagande.

|         |   |    |   |   |   |
|---------|---|----|---|---|---|
|         |   | -1 |   | 1 |   |
| $f'(x)$ | + | 0  | - | 0 | + |
| $f(x)$  | ↗ | 4  | ↘ | 0 | ↗ |

Vi kan kontrollera resultatet genom att rita funktionens graf.



#### SVAR:

- a) Växande om  $x \leq 2$  och avtagande om  $x \geq 2$ .  
b) Växande om  $x \leq -1$  eller  $x \geq 1$ , avtagande om  $-1 \leq x \leq 1$ .

**Vågräta tangenter**

Bestäm i vilka punkter som funktionens graf  $f(x) = 1,2x^5 - 2x^3 + 0,5$  har vågräta tangenter och ange för varje punkt om det är en lokal minimipunkt, maximipunkt eller terrasspunkt.

**LÖSNING:**

1 Derivatan av  $f(x) = 1,2x^5 - 2x^3 + 0,5$  är  $f'(x) = 6x^4 - 6x^2$ .

2 Vi löser ekvationen  $f'(x) = 0$  för att finna derivatans nollställen.

$$6x^4 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

3 Vi bestämmer derivatans tecken i de fyra intervallen.

$$x < -1:$$

$$x = -2 \text{ ger } f'(-2) = 6 \cdot (-2)^4 - 6 \cdot (-2)^2 = 6 \cdot 16 - 6 \cdot 4 = 72 > 0$$

$$-1 < x < 0:$$

$$x = -0,5 \text{ ger } f'(-0,5) = 6 \cdot (-0,5)^4 - 6 \cdot (-0,5)^2 = 6 \cdot 0,0625 - 6 \cdot 0,25 = -1,125 < 0$$

$$0 < x < 1:$$

$$x = 0,5 \text{ ger } f'(0,5) = 6 \cdot (0,5)^4 - 6 \cdot (0,5)^2 = 6 \cdot 0,0625 - 6 \cdot 0,25 = -1,125 < 0$$

$$x > 1:$$

$$x = 2 \text{ ger } f'(2) = 6 \cdot (2)^4 - 6 \cdot (2)^2 = 6 \cdot 16 - 6 \cdot 4 = 72 > 0$$

Vi beräknar även funktionsvärdena för derivatans nollställen.

$$x = -1 \text{ ger } f(-1) = 1,2 \cdot (-1)^5 - 2 \cdot (-1)^3 + 0,5 = 1,3$$

$$x = 0 \text{ ger } f(0) = 0,5$$

$$x = 1 \text{ ger } f(1) = 1,2 \cdot (1)^5 - 2 \cdot (1)^3 + 0,5 = -0,3$$

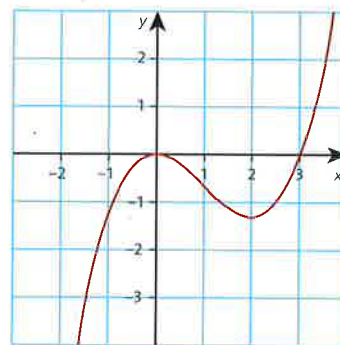
|         |    |     |   |     |   |      |   |
|---------|----|-----|---|-----|---|------|---|
|         | -1 | 0   | 1 | x   |   |      |   |
| $f'(x)$ | +  | 0   | - | 0   | - | 0    | + |
| $f(x)$  | ↗  | 1,3 | ↘ | 0,5 | ↘ | -0,3 | ↗ |

Ur teckenschemat kan vi utläsa att funktionen har en lokal maximipunkt i  $(-1, 1,3)$  och en lokal minimipunkt i  $(1, -0,3)$ . Eftersom funktionen är avtagande på båda sidor om  $x = 0$  har funktionens graf en terrasspunkt här, alltså i  $(0, 0,5)$

**SVAR:** Den lokala maximipunkten  $(-1, 1,3)$ , terrasspunkten  $(0, 0,5)$  och den lokala minimipunkten  $(1, -0,3)$  har vågräta tangenter.

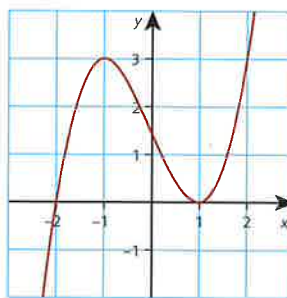
**ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR**

3001 Grafen visar funktionen  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$

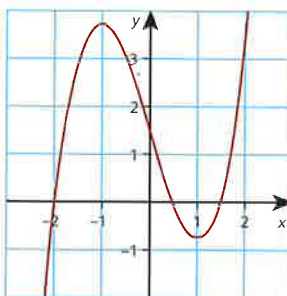


- För vilka  $x$  är  $f'(x) = 0$ ?
- Vilket tecken har derivatan mellan den lokala maximi- och den lokala minimipunkten?
- Vad vet man om funktionen i det intervallet?

3002 Grafen till en funktion är ritad. I vilka intervall är funktionen växande?



3003 Grafen visar funktionen  $f(x)$ .



- I vilka intervall är funktionen växande respektive avtagande?
- I vilket/vilka intervall är både  $f(x) > 0$  och  $f'(x) > 0$ ?

3004 I vilka intervall är funktionerna växande respektive avtagande?

- $f(x) = 1 + 6x - x^2$
- $g(x) = x^3 - 12x$
- $h(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$

**ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR**

- \* 3005 Bestäm ekvationen för vågräta tangenter till funktionen
  - $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$
  - $f(x) = x^3 + 6x^2 - 10$
  - $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x}$
- \* 3006 En tredjegradskurva har en lokal minimipunkt i  $(-1, -3)$  och en lokal maximipunkt i  $(1, 3)$ . För vilka  $x$ -värden är
  - $f'(x) = 0$
  - $f'(x) < 0$
  - funktionen växande
- \* 3007 I vilka intervall är funktionen  $f(x) = 2x^2(1 - x^3)$  avtagande?
- \* 3008 Funktionen  $N(t) = -3t^2 + 36t + 100$  beskriver antal sålda varor  $t$  dagar efter en annonskampanj för varan.
  - Under hur lång tid ökar försäljningen av varan?
  - När säljer man som mest av varan och hur mycket säljer man då?
- \*\* 3009 Visa algebraiskt att funktionen  $f(x) = x^5 + x^3 + x$  är växande.
- \*\* 3010 Visa algebraiskt att funktionen  $f(x) = -x^3 - x$  är avtagande. **T**



## Lokala extrempunkter



Teorigenomgång

Du har studerat förloppet för en funktion med hjälp av teckenschema.

Vi ska nu titta närmare på de ställen där funktionen har lokala extrempunkter, dvs. lokala maximi- och lokala minimipunkter. Man brukar skilja på **lokala extrempunkter**, dvs. där värdet är större/mindre än eller lika med andra funktionsvärden i den närmaste omgivningen, och **globala extrempunkter**, där värdet är större/mindre än eller lika med alla funktionsvärden i definitionsmängden.

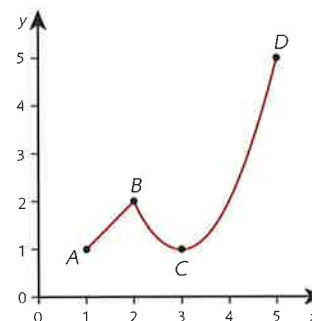
**Definition:** En punkt  $a$  som tillhör definitionsmängden  $D_f$  till en funktion  $f$ , kallas en **lokal maximipunkt** till  $f$  och man säger att  $f$  har ett **lokalt maximum** i  $a$  om  $f(x) \leq f(a)$  för alla  $x$  i definitionsmängden nära  $a$ .

På motsvarande sätt definieras en **lokal minimipunkt** och ett **lokalt minimum**. Om  $a$  är en lokal maximi- eller minimipunkt, säger man att  $a$  är en **lokal extrempunkt** och att  $f$  har det **lokala extremvärdet**  $f(a)$ .

Figuren visar olika typer av lokala extrempunkter.

Enligt definitionen är punkterna A–D exempel på lokala extrempunkter. Det finns med andra ord tre möjligheter.

- 1 Om vi studerar ett begränsat slutet intervall, då randpunkterna ingår i definitionsmängden, finns det lokala extrempunkter i dessa randpunkter (A och D).
- 2 Det kan finnas lokala extrempunkter där derivatan är noll (C).
- 3 Det kan finnas lokala extrempunkter i punkter där funktionen inte är deriverbar (B).



Att funktionen inte är deriverbar i B beror på att lutningen har två olika värden beroende om vi närmar oss punkten B från vänster eller höger.

I det här avsnittet ska vi studera inre punkter där funktionen är deriverbar, dvs. punkter av typen C. I nästa avsnitt återkommer vi till randpunkter och globala extrempunkter. I kurs 4 behandlas funktioner som inte är deriverbara (som i punkt B).

**Sats:** Anta att  $a$  är en lokal extrempunkt till  $f$  och att  $a$  är en **inre punkt** i definitionsmängden. Då följer det att om  $f$  är **deriverbar** i  $a$  så är  $f'(a) = 0$ .

Vi nöjer oss med att presentera satsen här utan att redogöra för hur den kan bevisas.

EXEMPEL

## Funktionsundersökning

Undersök med hjälp av derivata funktionen  $f(x) = x^3 + x^2$  och bestäm exakt funktionens lokala extrempunkter.

### LÖSNING:

- 1 Derivatan av  $f(x) = x^3 + x^2$  är  $f'(x) = 3x^2 + 2x$ .
- 2 Vi löser ekvationen  $f'(x) = 0$  för att finna derivatans nollställen.  
 $3x^2 + 2x = 0$   
 $x(3x + 2) = 0$   
 $x_1 = -2/3, x_2 = 0$
- 3 Vi undersöker derivatans teckenväxlingar. Välj t.ex.  $x = -1$ ,  $x = -0,5$  och  $x = 1$  för att beräkna derivatans tecken kring sina nollställen.  
 $x = -1$  ger  $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1 > 0$   
 $x = -0,5$  ger  $f'(-0,5) = 3 \cdot (-0,5)^2 + 2 \cdot (-0,5) = 0,75 - 1 = -0,25 < 0$   
 $x = 1$  ger  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5 > 0$
- 4 Vi beräknar funktionens värden i derivatans nollställen.  
 $f(-2/3) = (-2/3)^3 + (-2/3)^2 = -8/27 + 4/9 = 4/27$   
 $f(0) = 0$
- 5 Vi gör ett teckenschema.

|         |   |      |   |   |   |  |
|---------|---|------|---|---|---|--|
|         |   | -2/3 |   | 0 |   |  |
| $f'(x)$ | + | 0    | - | 0 | + |  |
| $f(x)$  | ↗ | 4/27 | ↘ | 0 | ↗ |  |

Ur teckenschemat ser vi att punkten  $(-2/3, 4/27)$  är en lokal maximipunkt och punkten  $(0, 0)$  är en lokal minimipunkt.

**SVAR:** Funktionen har en lokal maximipunkt i  $(-2/3, 4/27)$  och en lokal minimipunkt i  $(0, 0)$ .

# Rita graf

Rita grafen till  $f(x) = x^4 - 2x^2$  och ange eventuella lokala maximi- eller minimipunkter.

## LÖSNING:

1 Derivatans av  $f(x) = x^4 - 2x^2$  är  $f'(x) = 4x^3 - 4x$ .

2 Vi löser ekvationen  $f'(x) = 0$ .

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ eller } x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

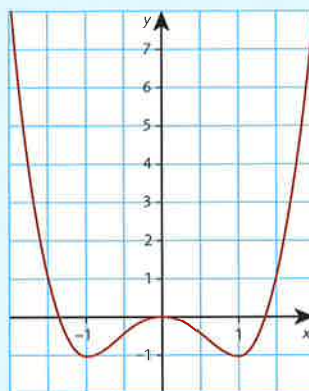
$$x = \pm 1$$

3 Vi gör ett teckenschema. Vi kan t.ex. välja  $x = -2$ ,  $x = -0,5$ ,  $x = 0,5$  och  $x = 2$  för att beräkna derivatans tecken kring sina nollställan. Vi beräknar även  $f(-1)$ ,  $f(0)$  och  $f(1)$ . Av utrymmes-skal utelämnar vi här beräkningarna, men en fullständig lösning ska innehålla dessa.

|         |    |    |   |   |
|---------|----|----|---|---|
|         | -1 | 0  | 1 |   |
| $f'(x)$ | -  | 0  | + | 0 |
| $f(x)$  | \  | -1 | / | 0 |

4 Vi prickar in de tre punkterna  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$  och  $(1, -1)$ , kompletterar med ytterligare två, t.ex.  $(-2, 8)$  och  $(2, 8)$  innan vi binder samman till en mjuk kurva.

**SVAR:** Funktionen har två lokala minimipunkter  $(-1, -1)$  och  $(1, -1)$  samt en lokal maximipunkt  $(0, 0)$ .



## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

3011 Rita för hand graferna till följande funktioner genom att undersöka derivatans teckenväxling. Ange även eventuella extrempunkter.

a)  $f(x) = x^2 + 5x + 5$

b)  $f(x) = x^4 - 6x^2$

3012 Bestäm med hjälp av derivata och teckenschema eventuella lokala extrempunkter eller terrasspunkter till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \quad \text{L}$$

3013 Bestäm med hjälp av derivata och teckenschema eventuella lokala maximi- eller minimipunkter till

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

b)  $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$

c)  $f(x) = 1 - 4x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{4}$

3014 Använd metoden med derivatans teckenväxling för att bestämma eventuella lokala extrempunkter eller terrasspunkter till

a)  $f(x) = 4 - 2x - x^2$

b)  $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4x + 1$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

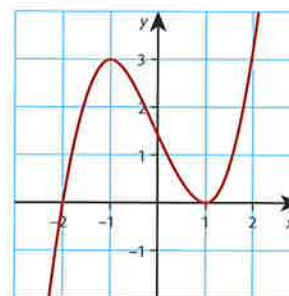
3015 Till en funktion  $f(x)$  har följande teckenschema sammanställts.

|         |   |   |
|---------|---|---|
|         | 0 |   |
| $f'(x)$ | - | + |

a) Beskriv med ord funktionens utseende.

b) Gör en skiss av funktionens graf.

3016 Grafen till en funktion är ritad. Beskriv den med ett teckenschema.



\* 3017 Skissa grafen till en funktion  $f(x)$  med följande egenskaper:  
 $f(4) = 5$ ,  $f'(x) > 0$  för  $x < 4$ ,  $f'(4) = 0$ ,  
 $f'(x) < 0$  för  $x > 4$

\* 3018 En tillverkare av avancerade robotleksaker uppskattar att hans dagliga kostnad i tusentals kr kan beskrivas med funktionen  
 $K(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 15$  och den dagliga intäkten i tusentals kr av funktionen  $I(x) = 28x$  där  $x$  är antalet leksaker.

a) Vilket antal robotleksaker bör han tillverka och sälja per dag för att hans vinst ska bli maximal? T

b) Hur stor är den maximala vinsten?

c) Hur många leksaker måste han tillverka och sälja per dag för att gå med vinst? T



\* 3019 Bestäm konstanten  $a$  så att funktionen  $y = 2x^3 + ax^2 + 10$  får ett lokalt minimivärde då  $x = 2$ .

\* 3020 Funktionen  $f(x) = ax^3 - bx^2 + 2$  har lokalt extremvärdet 6 för  $x = 2$ . Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  samt extremvärdets art. L

\*\* 3021 Låt  $f(x)$  vara en andragradsfunktion definierad för  $a \leq x \leq b$ . Visa att det finns ett tal  $c$  sådant att  $a < c < b$  och  $f'(c) = 0$  om  $f(a) = f(b)$ . T

\*\* 3022 Funktionen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  har en lokal maximipunkt  $(0, 0)$ . Grafen till funktionen går även genom  $(-1, -5)$  och  $(2, 4)$ . Bestäm funktionens lokala minimipunkt.

\*\* 3023 a) För vilka  $x$ -värden har funktionen  
 $f(x) = ax + \frac{a}{x}$  lokala extrempunkter?  
( $a$  är en konstant,  $x \neq 0$ )

b) Bestäm de lokala extremvärdenas karaktär för olika värden på konstanten  $a$ .

## Största och minsta värde

Tidigare har vi studerat lokala extrempunkter där derivatan är noll. Nu ska vi även bestämma lokala extrempunkter, där derivatan inte behöver ha värdet noll. Om funktionen är definierad i ett slutet intervall, finns det lokala extrempunkter även i randpunkterna (de yttre gränserna för definitionsmängden).

Grafen visar funktionen  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6$ ,  $-1 \leq x \leq 4$ .

På grafen är fyra punkter markerade. Alla fyra är lokala extrempunkter. I punkten  $B = (0, -6)$  och i punkten  $C = (2, -10)$  är funktionens derivata noll, dvs.  $f'(0) = 0$  och  $f'(2) = 0$ .

Punkterna  $A$  och  $D$  är grafens ändpunkter. I punkten  $A = (-1, -10)$  har funktionen samma värde som i punkten  $C$ . Vi ser att funktionen inte antar något värde som är mindre än så. Funktionens minsta värde är  $-10$ .

I punkten  $D = (4, 10)$  har funktionen sitt största värde,  $10$ . Funktionens värdemängd är  $-10 \leq y \leq 10$ .

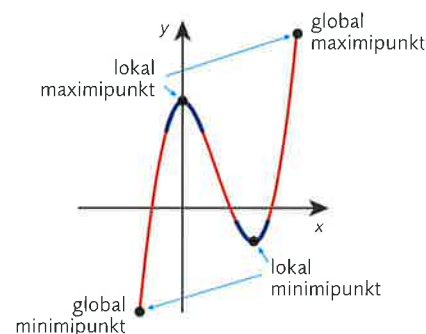
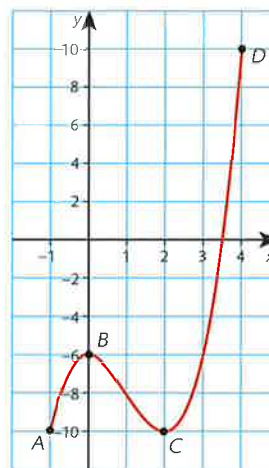
Är den lokala extrempunkten en lokal maximipunkt så finns det ingen punkt i den närmaste omgivningen som har större funktionsvärde.

Är den lokala extrempunkten en lokal minimipunkt finns det i den närmaste omgivningen ingen punkt med mindre funktionsvärde.

De punkter som har absolut minst respektive störst funktionsvärde kallas globala extrempunkter.



Teorigenomgång



**Funktionen  $f(x)$  har ett största värde  $f(a)$  för  $x = a$  i ett intervall om  $f(x) \leq f(a)$  för alla  $x$  i intervallet.**

**Funktionen  $f(x)$  har ett minsta värde  $f(a)$  för  $x = a$  i ett intervall om  $f(x) \geq f(a)$  för alla  $x$  i intervallet.**

I ett slutet intervall kan en kontinuerlig deriverbar funktion anta sitt största respektive minsta värde endast i ändpunkterna eller där derivatan är noll (lokala min- eller maxpunkter). För att söka största eller minsta värde i ett slutet intervall räcker det därför att bestämma funktionsvärdena i ändpunkterna samt där derivatan är noll och jämföra dessa värden. Om det finns en inre punkt där funktionen inte är deriverbar måste denna undersökas separat (se figur på s. 124).

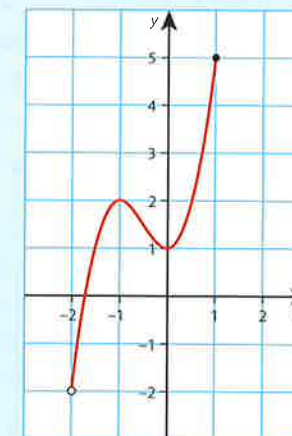
## Bestämma största och minsta värde

Bestäm ur grafen funktionens största och minsta värde.

### LÖSNING:

Ur grafen kan vi avläsa att funktionens värdemängd är  $-2 < y \leq 5$ . Grafens vänstra ändpunkt är  $(-2, -2)$ . Den är markerad med en ofylld ring. Det betyder att den punkten inte tillhör funktionens definitionsmängd och värdemängd. Ett största eller minsta värde måste antas i en punkt, därför saknar funktionen ett minsta värde. Grafens högra ändpunkt är  $(1, 5)$ . Den är markerad med en fylld ring vilket innebär att den tillhör funktionens definitionsmängd och värdemängd. Funktionens största värde  $5$  antas i den punkten.

**SVAR:** Funktionens största värde är  $5$ , den saknar minsta värde.



## Bestämma lokala och globala extrempunkter

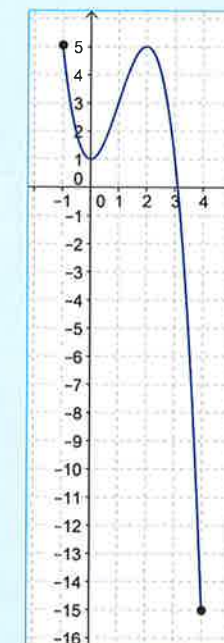
Bestäm lokala och globala extrempunkter för funktionen  $y = 1 + 3x^2 - x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 4$ .

### LÖSNING:

- Vi deriverar  $y = 1 + 3x^2 - x^3$ .  
 $y' = 6x - 3x^2$
- Vi löser ekvationen  $y' = 0$  för att finna lokala extrempunkter.  
 $6x - 3x^2 = 0$   
 $3x(2 - x) = 0$   
 $x_1 = 0, x_2 = 2$
- Vi beräknar funktionsvärdena i intervallets ändpunkter samt för de  $x$ -värden där derivatan är noll.  
 $f(-1) = 1 + 3 \cdot (-1)^2 - (-1)^3 = 5$   
 $f(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 1$   
 $f(2) = 1 + 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 5$   
 $f(4) = 1 + 3 \cdot 4^2 - 4^3 = -15$

Största värdet antas i punkterna  $(-1, 5)$ , global och lokal maximipunkt, och  $(2, 5)$  global och lokal maximipunkt. Minsta värdet antas i punkten  $(4, -15)$ , global och lokal minimipunkt. Punkten  $(0, 1)$  är en lokal minimipunkt. Vi låter datorn rita funktionens graf i det aktuella intervallet för att kontrollera våra slutsatser.

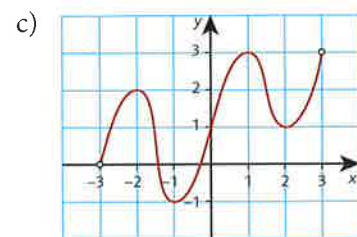
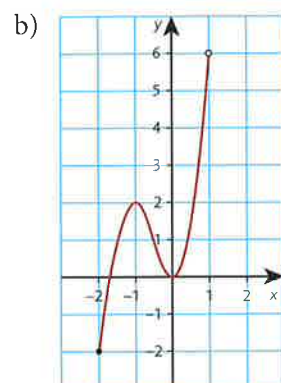
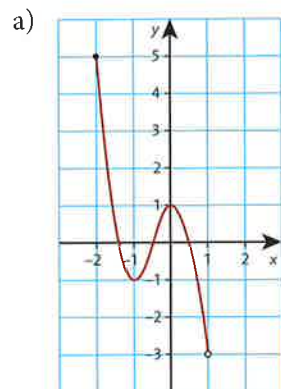
**SVAR:**  $(-1, 5)$  är en global och lokal maximipunkt,  $(0, 1)$  är en lokal minimipunkt,  $(2, 5)$  är en global och lokal maximipunkt,  $(4, -15)$  är en global och lokal minimipunkt.





## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**3024** Använd de ritade graferna för att bestämma funktionernas lokala extrempunkter samt största och minsta värde.



**3025** Rita grafen till  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  för  $-1 \leq x \leq 4$  och ange funktionens största respektive minsta värde.

**3026** Funktionen  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$  är definierad för  $-1 < x \leq 5$ . Beräkna funktionens största och minsta värde.

**3027** Bestäm värdemängden till funktionen  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $-2 \leq x \leq 3$ .

**3028** Beräkna minsta värdet av funktionen  $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x^2}$ ,  $x > 0$ .

**3029** Beräkna lokala och globala extrempunkter för funktionen  $f(x) = 6x - x^3$ ,  $-2 \leq x \leq 4$ .

**3030** Funktionen  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$  är definierad för  $-2 \leq x \leq 3$ . Beräkna funktionens största och minsta värde. **L**

**3031** Beräkna största och minsta värde för funktionen  $y = 6 \cdot \sqrt{x} - x$ ,  $0 \leq x \leq 16$ .

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* **3032** Beräkna största och minsta värde för funktionen  $f(x) = (x^2 - 2)(x^3 - 2x)$ ,  $-2 \leq x < 2$ . **T**

\* **3033** Funktionen  $f(x) = ax^4 + bx^3$  har ett lokalt extremvärde  $f(-1) = 2$ . Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  samt det lokala extremvärdets art.

\* **3034** Beräkna största och minsta värde för funktionen,  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ,  $x > 0$ .

\*\* **3035** Skissa en funktion som är definierad för  $0 \leq x \leq 10$ , har en lokal maximipunkt när  $x = 3$  och största värde för  $x = 10$ . **T**

\*\* **3036** Funktionen  $f(x)$  är definierad i intervallet  $a \leq x \leq b$  och deriverbar i hela intervallet,  $f'(x) \neq 0$ . Förklara varför funktionen antar sitt största respektive minsta värde i intervallets ändpunkter.

## Tillämpningar



Teorigenomgång

I många problemframställningar ingår ofta att finna största eller minsta värde. Det kan t.ex. gälla att bestämma hur många enheter som ska produceras för att vinsten ska bli maximal, eller att beräkna den minsta materialåtgången vid en given volym. En bra lösningsstrategi är att försöka finna funktioner som beskriver det önskade sambandet och med hjälp av derivatan bestämma det efterfrågade resultatet.

### En summas minsta värde

Bestäm minsta möjliga värde på summan av två icke-negativa tal vars produkt är 100.

#### LÖSNING:

Kalla de två talen  $x$  och  $y$ .

Då gäller  $x \cdot y = 100$  eller  $y = \frac{100}{x}$ ,  $x > 0$ .

Summan av de två talen kan skrivas som en funktion  $f(x)$  där  $f(x) = x + \frac{100}{x}$ .

1 Derivatan av funktionen  $f(x) = x + \frac{100}{x}$  är  $f'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$ .

2 Vi löser ekvationen  $f'(x) = 0$ .

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

Den negativa roten utesluts.

3 Vi gör ett teckenschema och bestämmer funktionsvärdet i den lokala extrempunkten.

|         |   |    |   |   |
|---------|---|----|---|---|
|         |   | 10 |   | x |
| $f'(x)$ | - | 0  | + |   |
| $f(x)$  |   | 20 |   |   |

Av utrymmesskäl redovisas inte beräkningen av derivatans värden i de två intervallen.

**SVAR:** Minsta möjliga summa är 20.

### En cylinders maximala volym

Bestäm största möjliga volym för en cylinder med totala begränsningsytan  $150\pi$  cm<sup>2</sup>.

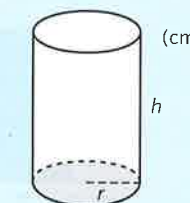
#### LÖSNING:

Vi ritar en cylinder med radien  $r$  cm och höjden  $h$  cm.

Cylinders volym kan beräknas med formeln  $V = \pi r^2 h$ . Den totala begränsningsytan  $A$  består av en rektangel med måtten  $2\pi r$  cm och  $h$  cm samt två cirkulära skivor med radien  $r$  cm.

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

För att kunna bestämma den maximala volymen behöver vi uttrycka volymen som en funktion av  $r$  eller  $h$ . Eftersom vi vet att begränsningsytan är  $150\pi$  har vi ett samband mellan  $r$  och  $h$ . Vi löser ut  $h$  ur det sambandet och sätter in uttrycket i formeln för volymen.



Förkorta med  $2\pi$ .

$$rh + r^2 = 75$$

$$rh = 75 - r^2$$

$$h = \frac{75}{r} - r$$

$$V(r) = \pi r^2 \left( \frac{75}{r} - r \right) = 75\pi r - \pi r^3$$

Vi deriverar funktionen  $V(r) = 75\pi r - \pi r^3$  och får  $V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2$ . Vi löser ekvationen  $V'(r) = 0$ .

$$75\pi - 3\pi r^2 = 0$$

$$r^2 = 25$$

$$r = \pm 5$$

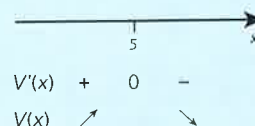
En sträcka kan inte vara negativ. Lösningen  $-5$  är alltså inte giltig.

Vi gör ett teckenschema för att kontrollera om vi har en lokal maximipunkt.

$r = 5 \text{ cm}$  ger  $h = 10 \text{ cm}$

och volymen blir  $V = 250\pi \text{ cm}^3$ .

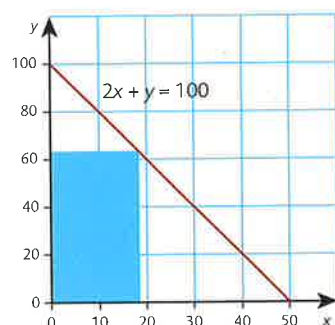
**SVAR:** Cylinderns maximala volym är  $250\pi \text{ cm}^3$ .



Av utrymmesskäl redovisas inte beräkningen av derivatans värden i de två intervallen.

## ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 3037** Summan av två positiva tal är 42. Bestäm största möjliga värde på deras produkt.
- 3038** I en rektangel är summan av tre sidor 100 cm. Bestäm rektangelns maximala area.
- 3039** Bestäm maximala arean för en rektangel där ett hörn ligger på linjen  $2x + y = 100$ , som på bilden. 

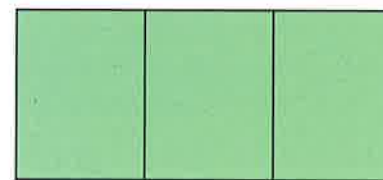


## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 3040** En influensaepidemi härjar i en stad. Man uppskattar att antalet insjuknade  $N(t)$  efter  $t$  dagar från epidemins utbrott är  $N(t) = 60t^2 - t^3, 0 \leq t \leq 40$ . Hur många är maximalt sjuka samtidigt? 



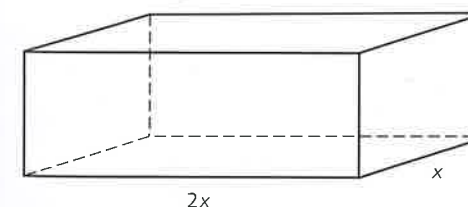
- 3041** Ett större markområde ska inhägnas i tre parallella lika stora rektangulära områden som figuren visar.



Ägaren har 2 000 m stängsel till sitt förfogande. Bestäm största möjliga area på området.

- 3042** Bestäm största möjliga area för en triangel där summan av halva basen och höjden är 16 cm. 
- 3043** En öppen cylinderformad burk ska ha volymen  $125 \text{ cm}^3$ . Vilka dimensioner ska burken ha för att materialåtgången ska bli så liten som möjligt?

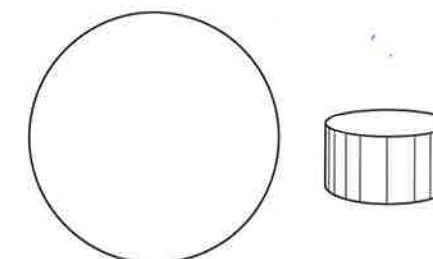
- \* **3044** En rätvinklig triangel har arean  $30 \text{ cm}^2$ . Bestäm omkretsen för den triangel där summan av kateterna är minsta möjliga.
- \* **3045** Den avbildade lådan har volymen  $576 \text{ cm}^3$  och den är tillverkad så att den totala begränsningsytan inklusive lock är minimal. Bestäm lådans dimensioner.



- \* **3046** Dagspriset  $p(x)$  kr/kg för färsk  
kräfter är en funktion av vikten  
 $x$  kg,  $0 \leq x \leq 30$ , som fiskaren  
kan erbjuda till försäljning.  
Bestäm vikten och motsvarande  
pris som maximerar fiskarens  
dagsinkomst om

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300.$$

- \* **3047** Ett cirkulärt papper med radien 6,4 cm viks upp så att man får en cylindrisk pappersform för bakverk, se figur.



Beräkna med hjälp av derivata hur papperet ska vikas för att pappersformen ska få så stor volym som möjligt. (NP Ma C ht 00)

- \*\* 3048** a) Bestäm dimensionerna för den cylinder av maximal volym som kan inskrivas i ett klot med radien  $R$ .
- b) Visa även att förhållandet mellan cylinderns höjd och radie är  $\sqrt{2}$ .
- c) Visa att förhållandet mellan volymen av klotet och volymen av den maximala cylindern är  $\sqrt{3}$ .



## Gruppaktivitet

### REKTANGELNS OMKRETS OCH AREA

Rita grafen till funktionen  $y = 5x - x^2$ . Markera i första kvadranten en punkt  $P$  på kurvan och dra två linjer genom punkten, en parallell med  $x$ -axeln och en med  $y$ -axeln. Linjerna bildar en rektangel tillsammans med  $x$ - och  $y$ -axlarna.

- Undersök hur rektangelns omkrets varierar då punkten  $P$  rör sig utefter kurvan i första kvadranten.
- Bestäm rektangelns största omkrets.
- Undersök hur rektangelns area varierar då punkten  $P$  rör sig utefter kurvan i första kvadranten.
- Bestäm rektangelns största area.

## Gruppaktivitet

### EN LÅDAS STÖRSTA MÖJLIGA VOLYM

Tillverka en låda utan lock av en kartongbit med måtten 24 cm  $\times$  30 cm genom att klippa bort lika stora kvadrater i varje hörn och vika upp sidorna.

- Bestäm lådans volym för olika värden på den bortklippta kvadratens sida.
- Vilket värde på den bortklippta sidan ger den största volymen?
- Bestäm med hjälp av derivata lådans största möjliga volym.



## Andraderivata

Om derivatan  $f'$  till en funktion  $f$  är deriverbar kallas dess derivata **andraderivatan** till  $f$ . Hastigheten  $v(t)$  för ett föremål är lika med derivatan av sträckan  $s(t)$ . Accelerationen  $a(t)$  är derivatan av hastigheten  $v(t)$ . Vi har då deriverat funktionen  $s(t)$  två gånger. Vi har fått **andraderivatan** som beskriver förändringen av förstaderivatan. Funktionen  $y = x^2$  har förstaderivatan  $y' = 2x$  och andraderivatan  $y'' = 2$ .  $y''$  utläses "y bis". Andra skrivsätt för andraderivatan är  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  (utläses "d två y d x två") och  $D^2f(x)$  (utläses "D två f av x").

### EXEMPEL

#### Bestäm andraderivatan

Bestäm andraderivatan av

a)  $f(x) = x^3 + x$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

**LÖSNING:**

a)  $f(x) = x^3 + x$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$f'(x) = 3x^2 + 1$

$f'(x) = -3x^{-4}$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}$

**SVAR:** a)  $f''(x) = 6x$

b)  $f''(x) = \frac{12}{x^5}$

### ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

**3049** Bestäm andraderivatan av

a)  $y = x^3$       b)  $y = 2x + 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       d)  $f(x) = \frac{x^6}{30} - \frac{x^4}{12}$

**3050** Bestäm värdet av

a)  $y''(1)$  om  $y = 1 - 2x - 3x^3$

b)  $y''(2)$  om  $y = 3x^3 - x^2 + 7x - 1$

**3051** Sträckan  $s$  meter som ett föremål rör sig under  $t$  sekunder kan beskrivas med funktionen  $s(t) = 36t - \frac{t^3}{3}$ . Bestäm  $s'(t)$  och  $s''(t)$  och förklara med ord vad du beräknat.

## Gruppaktivitet

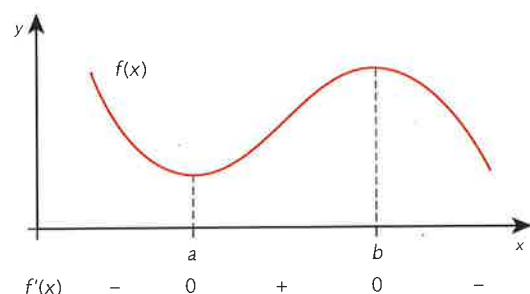
### UNDERSÖKNING AV ANDRADERIVATA

- Undersök vilket tecken andraderivatan har i förstaderivatans nollställen för funktionen  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$  samt jämför med grafen till funktionen.
- Vilket samband finns mellan andraderivatans tecken i förstaderivatans nollställen och typ av lokal extrempunkt?
- Undersök förstaderivatans nollställe med andraderivatan för funktionerna  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^4$  och  $f(x) = -x^4$  samt jämför med graferna till funktionerna.
- Formulera därefter ett svar på frågan: Vad händer om  $f''(x) = 0$ ?

## Extrempunktsbestämning med andraderivata

Tidigare bestämde vi lokala extrempunkter med teckenstudium av förstaderivatans tecken. Ett annat sätt är att studera andraderivatans tecken i förstaderivatans nollställen.

Grafen nedan visar funktionen  $f(x)$  som har en lokal minimipunkt för  $x = a$  och en lokal maximipunkt för  $x = b$ . Figuren visar även förstaderivatans nollställen samt dess tecken i olika intervall.



När  $x = a$  växlar förstaderivatans tecken från  $-$  till  $+$ , alltså ökar den. Det innebär i detta fall att andraderivatans tecken är positiv. Andraderivatans tecken kan också vara noll i lokala extrempunkter där förstaderivatans tecken växlar, t.ex. för  $f(x) = x^4$ . Då kan andraderivatans tecken inte användas för extrempunktsbestämning.

Om  $f'(a) = 0$  och  $f''(a) > 0$ , har  $f(x)$  en **lokal minimipunkt** då  $x = a$ .

När  $x = b$  växlar förstaderivatans tecken från  $+$  till  $-$ , alltså minskar den. Det innebär i detta fall att andraderivatans tecken är negativ. Andraderivatans tecken kan också vara noll i lokala extrempunkter där förstaderivatans tecken växlar, t.ex. för  $f(x) = -x^4$ . Då kan andraderivatans tecken inte användas för extrempunktsbestämning.

Om  $f'(b) = 0$  och  $f''(b) < 0$ , har  $f(x)$  en **lokal maximipunkt** då  $x = b$ .

### EXTREMPUNKTSBESTÄMNING MED ANDRADERIVATA FÖR FUNKTIONEN $f(x)$

- 1 Bestäm förstaderivatans nollställen, t.ex.  $x = a$ .
- 2  $f''(a) > 0 \Rightarrow$  funktionen har en lokal minimipunkt för  $x = a$ .  
 $f''(a) < 0 \Rightarrow$  funktionen har en lokal maximipunkt för  $x = a$ .  
 $f''(a) = 0 \Rightarrow$  ingen slutsats kan dras om förekomst eller typ av en lokal extrempunkt. Då måste teckenschema användas för att bestämma den lokala extrempunktens karaktär.
- 3 För att få den lokala extrempunktens  $y$ -koordinat beräknas  $f(a)$ .

### EXEMPEL

## Extrempunktsbestämning med andraderivata

Bestäm eventuella lokala extrempunkter till  $f(x) = x^3 - 27x$  med hjälp av andraderivata.

### LÖSNING:

$$f(x) = x^3 - 27x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \text{ då } x = 3 \text{ och } x = -3$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3 = 18 > 0 \Rightarrow \text{lokal minimipunkt}$$

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3) = -18 < 0 \Rightarrow \text{lokal maximipunkt}$$

$$f(3) = -54$$

$$f(-3) = 54$$

**SVAR:** Lokal minimipunkt i  $(3, -54)$  och lokal maximipunkt i  $(-3, 54)$ .

### ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

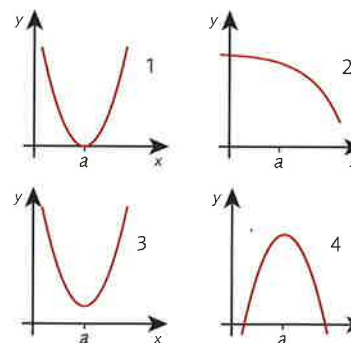
**3052** Använd metoden med andraderivata för att bestämma eventuella lokala extrempunkter för funktionerna

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

b)  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 1$

**3053** Bestäm med hjälp av andraderivata lokala extrempunkterna för funktionen  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ . **L**

**3054** Vilken av graferna representerar en funktion  $f(x)$  med egenskaperna  $f(a) > 0$ ,  $f'(a) = 0$  och  $f''(a) < 0$ ?



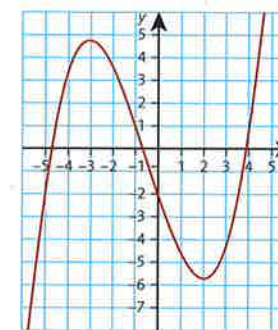
**3055** Bestäm eventuella lokala extrempunkter för funktionen  $f(x) = x^6$ .

### ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* **3056** Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  
 $f'(0) = 0$ ,  $f'(4) = 0$ ,  $f''(0) < 0$ ,  $f''(4) > 0$

\* **3057** Kan man använda metoden med andraderivatans tecken för att bestämma lokala extrempunkter till funktionen  $f(x) = 1 - x^4$ ? Motivera ditt svar.

\* **3058** Figuren visar grafen för ett tredjegrads-polynom  $f(x)$ . Skissa en graf för  $f''(x)$ .

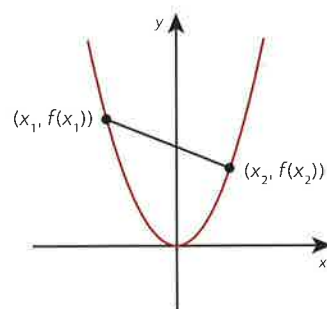




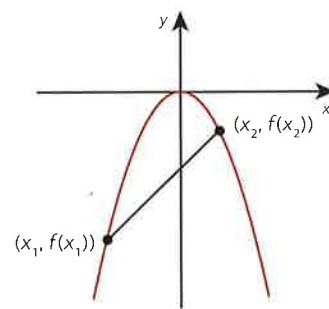
## Andraderivatan och konkavitet

**Definition:** En funktion  $f$  kallas **konvex** på ett intervall om det för alla  $x_1$  och  $x_2$  i intervallet gäller att linjestycket mellan punkterna  $(x_1, f(x_1))$  och  $(x_2, f(x_2))$  ligger över eller sammanfaller med funktionskurvan  $y = f(x)$ . Om dessa linjestycken istället ligger under alternativt sammanfaller med funktionskurvan för alla  $x_1$  och  $x_2$  i intervallet kallas  $f$  **konkav**.

Om inte linjestyckena sammanfaller med funktionskurvan i något fall, kallas funktionen istället **strängt konvex** respektive **strängt konkav**.



Grafen är **konvex**, godtyckligt valt linjestycke ligger över eller sammanfaller med grafen.



Grafen är **konkav**, godtyckligt valt linjestycke ligger under eller sammanfaller med grafen.

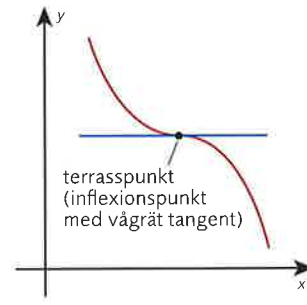
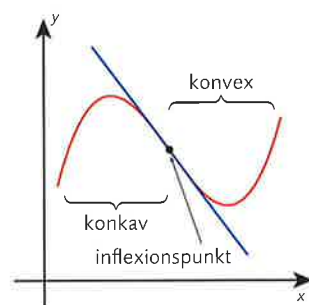
För de  $x$ -värden där  $f''(x) > 0$  är funktionens graf konvex.

T.ex.  $f(x) = x^2$  och  $f''(x) = 2$ . Grafen till funktionen  $f(x) = x^2$  är konvex för alla  $x$ .

För de  $x$ -värden där  $f''(x) < 0$  är funktionens graf konkav.

T.ex.  $f(x) = -x^2$  och  $f''(x) = -2$ . Grafen till funktionen  $f(x) = -x^2$  är konkav för alla  $x$ .

För polynom av högre grad kan grafen ändra konkavitet. En punkt där grafen ändrar konkavitet kallas inflexionspunkt. I en sådan punkt skär tangenten grafen. En inflexionspunkt där tangenten är parallell med  $x$ -axeln är en terrasspunkt. I en inflexionspunkt är  $f''(x) = 0$ .



### Bestämma konkavitet och inflexionspunkter

Bestäm de intervall där grafen till funktionen  $f(x) = x^3 + x^2 + 1$  är konvex respektive konkav samt bestäm inflexionspunkten.

#### LÖSNING:

Bestäm andraderivatan.

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

Lös ekvationen  $f''(x) = 0$ .

$$6x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Undersök andraderivatans tecken för  $x < -\frac{1}{3}$  och för  $x > -\frac{1}{3}$

$$f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow \text{funktionens graf är konkav för } x < -\frac{1}{3}$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{funktionens graf är konvex för } x > -\frac{1}{3}$$

Funktionen har alltså en inflexionspunkt för  $x = -\frac{1}{3}$ . Vi får punktens  $y$ -koordinat genom att sätta in  $x = -\frac{1}{3}$  i funktionsuttrycket.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{29}{27}$$

$$\text{Inflexionspunkt: } \left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$$

#### SVAR:

Funktionens graf är konkav för  $x < -\frac{1}{3}$  och konvex för  $x > -\frac{1}{3}$

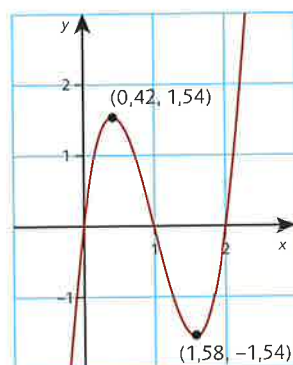
$$\text{Inflexionspunkten har koordinaterna } \left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$$



## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

3059 Figuren visar grafen för funktionen  $f(x)$ . Bestäm de  $x$ -värden där

- a)  $f''(x) > 0$       b)  $f''(x) = 0$   
c)  $f''(x) < 0$



3060 Bestäm de intervall där följande funktioners grafer är konvexa respektive konkava. Ange också eventuella inflexionspunkter och lokala extrempunkter.

- a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$   
b)  $f(x) = x^3$   
c)  $f(x) = x^3 - 3x^2$

3061 Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  $f(2) = 1$ ,  $f'(2) = 0$  och konvex för alla  $x$ .

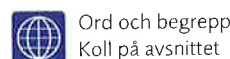
## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

\* 3062 Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  
 $f''(x) < 0$  för  $x < 0$  och  $f''(x) > 0$  för  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$  för alla  $x$ .

\* 3063 Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  
 $f(3) = 5$ ,  $f(5) = 1$ ,  $f'(3) = 0$ ,  $f'(5) = 0$ , inflexionspunkt i  $(4, 3)$ , konkav för  $x < 4$  och konvex för  $x > 4$ .

\* 3064 Skissa en graf till en funktion som har följande egenskaper:  
inflexionspunkter för  $x = 2$  och  $x = 4$ , konkav för  $x < 2$  och  $x > 4$ , konvex för  $2 < x < 4$ .

\* 3065 Funktionen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  har lokal maximipunkt i  $(3, 3)$ , lokal minimipunkt i  $(5, 1)$  och inflexionspunkt i  $(4, 2)$ . Bestäm funktionen.



Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

## Gruppaktivitet

### LOKALA EXTREMPUNKTER OCH INFLEXIONSPUNKTER

Funktionen  $f(x) = (x(1-x)(2x-1)(4-9x))^2$  är given. Avgör med resonemang:

- a) Antal nollställen.  
b) Antal lokala extrempunkter.  
c) Antal inflexionspunkter.  
d) Kontrollera era resonemang digitalt genom att rita funktionens graf.

## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Genom att lösa ekvationen  $f'(x) = 0$  får man reda på nollställena till funktionen  $f(x)$ .
- 2 För en avtagande funktion  $f$  gäller att både  $f(x) < 0$  och  $f'(x) < 0$ .
- 3  $f'(1)$  anger funktionens lutning i punkten  $(1, f(1))$ .
- 4 Derivatans i en terrasspunkt kan ha teckenväxling  $-0-$ .
- 5 Med andraderivata kan man bestämma en funktions terrasspunkter.
- 6 I en lokal extrempunkt är  $f'(x) = 0$ .
- 7 I en global extrempunkt är  $f'(x) = 0$ .
- 8 Andraderivatans visar med vilken hastighet förstaderivatans förändras.
- 9 Med andraderivata kan man bestämma en funktions lokala extrempunkter.



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## Gruppaktivitet

### LOKALA EXTREMPUNKTER OCH TERRASSPUNKTER

Undersök för olika värden på talet  $a$  vilka lokala extrempunkter och terrasspunkter som funktionen  $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x$  har.

### MINIMERAD MATERIALKOSTNAD

### UTMANING

Cylinderformade burkar med volymen  $V$  v.e. ska tillverkas. Till röret används ett tjockare material som kostar  $A$  kr/a.e. och till bottenkivan och toppskivan ett tunnare material som kostar  $B$  kr/a.e. Vilket är förhållandet mellan burkens radie och höjd om man vill minimera materialkostnaden och  $A = 2B$ ?

## 3.2 Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata



Vi har tidigare studerat funktioners utseende med hjälp av derivata och teckenschema. När en funktion deriveras får man en ny funktion. Genom att studera dess graf kan också funktionens utseende bestämmas.

### Derivatans graf

Vi låter en grafräknare eller dator rita grafen till en funktions derivata. Derivatans graf är en rät linje.

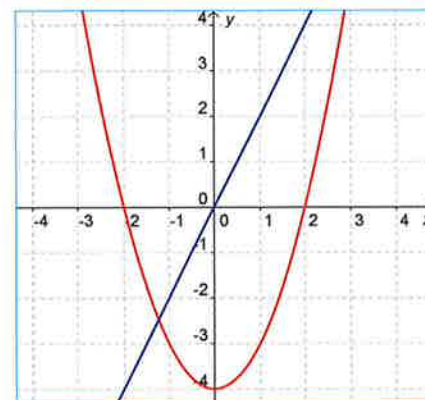
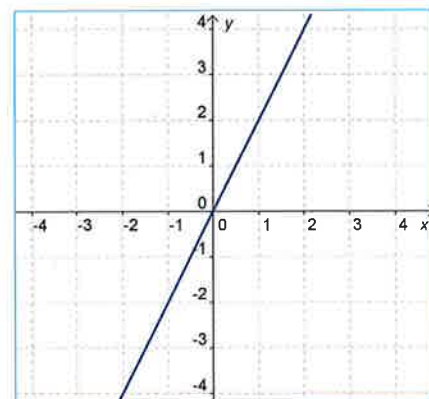
Vi kan från derivatans graf se att den skär x-axeln då  $x = 0$  vilket betyder att  $f'(x) = 0$  då  $x = 0$ .

När  $x < 0$  ligger derivatans graf under x-axeln. Detta betyder då att  $f'(x) < 0$  och funktionen är avtagande.

När  $x > 0$  ligger derivatans graf över x-axeln. Detta betyder då att  $f'(x) > 0$  och funktionen är växande. Detta kan sammanfattas i ett teckenschema:

|         |   |   |   |  |
|---------|---|---|---|--|
|         |   | 0 |   |  |
|         |   | x |   |  |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |  |
| $f(x)$  | ↘ |   | ↗ |  |

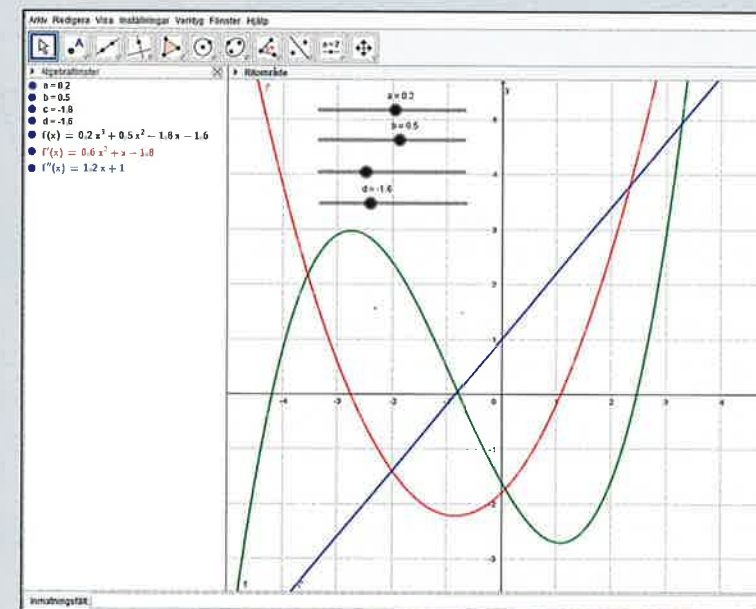
Teckenschemat visar att funktionen har en lokal minimipunkt för  $x = 0$  eftersom derivatan växlar tecken från minus till plus. Funktionen är en andragradsfunktion och kan ha följande utseende:



### Gruppaktivitet

#### UNDERSÖKANDE UPPGIFT – SAMBAND MELLAN EN FUNKTION OCH DESS FÖRSTA- OCH ANDRADERIVATA

1. Skriv in en allmän tredjegradsfunktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  i inmatningsfältet i GeoGebra.
2. Klicka på Ja, skapa glidare.
3. Man får då fyra glidare, där värdena på  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $d$  kan varieras.
4. Rita derivatans graf genom att skriva  $f'$  i inmatningsfältet. Undersök vilket samband som finns mellan en funktions graf och dess förstaderivata genom att variera värdena för  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $d$ .
5. Rita andraderivatans graf genom att skriva  $f''$  i inmatningsfältet.
6. a) Vilket samband finns mellan en funktions graf och dess förstaderivatas graf?  
b) Vilket samband finns mellan första- och andraderivatans grafer?  
c) Vilket samband finns mellan en funktions graf och dess andraderivatas graf?





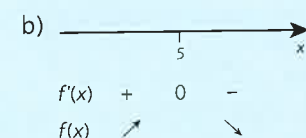
## Tolka derivatans graf

Grafen visar derivatan till en funktion.

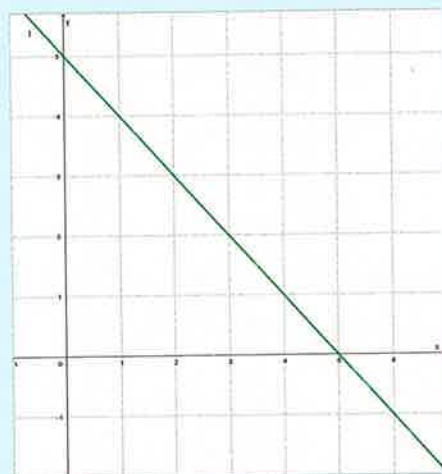
- För vilka  $x$ -värden är funktionen växande, respektive avtagande?
- Vilken typ av extrempunkt har funktionen?
- Skissa funktionens graf.

### LÖSNING:

a) Derivatans skärningspunkt med axeln är  $(5, 0)$ .



Teckenschemat visar att funktionen är växande för  $x < 5$  och avtagande för  $x > 5$ . Detta betyder att funktionen har en lokal maximipunkt för  $x = 5$ .



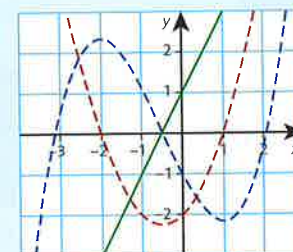
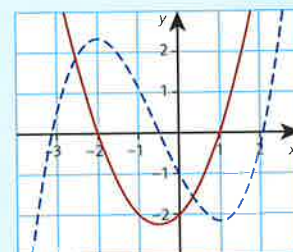
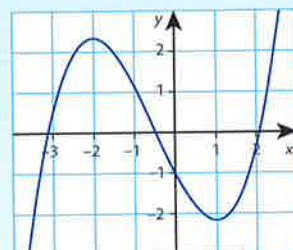
## Andraderivatans graf

Figuren visar grafen för tredjegradsfunktionen  $f(x)$ .

- Skissa grafen för  $f'(x)$
- Skissa grafen för  $f''(x)$

### LÖSNING:

- Derivatans till en tredjegradsfunktion är en andragradsfunktion.  $f(x)$  har en lokal maximipunkt då  $x = -2$  och en lokal minimipunkt då  $x = 1$ . Derivatans har därför två nollställen då  $x = -2$  och  $x = 1$ . Derivatans är positiv till vänster om den lokala maximipunkten och negativ till höger. För den lokala minimipunkten är derivatan negativ till vänster och positiv till höger. Derivatans graf kan därför se ut som i figuren, röd graf.
- Derivatans till en andragradsfunktion är en linjär funktion. Andragradsfunktionen har en lokal minimipunkt för  $x = -0,5$ . Derivatans är negativ till vänster om den lokala minimipunkten och positiv till höger. Andraderivatans graf kan därför se ut som i figuren, grön graf.



## Undersök graf med digitala verktyg

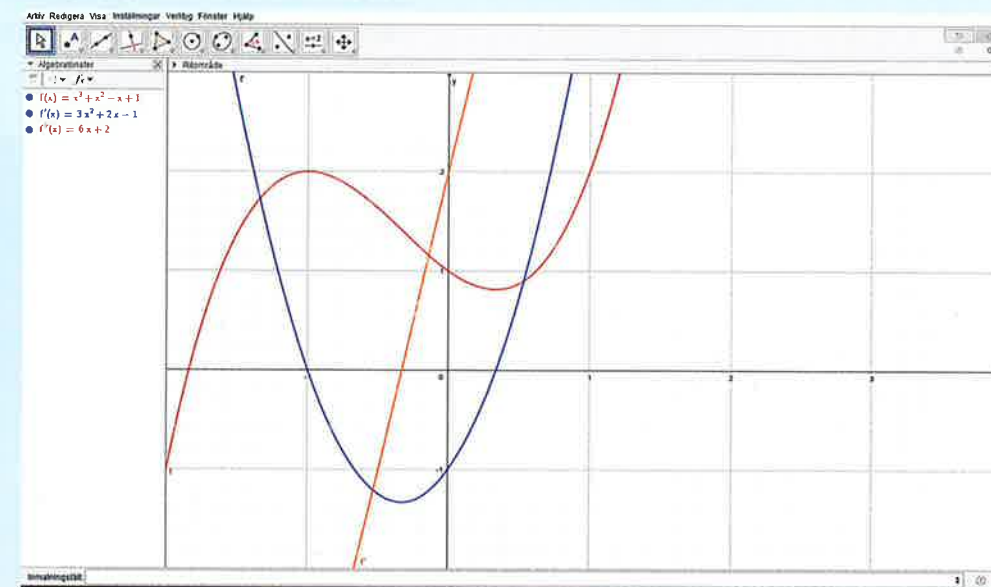
Rita med digitalt verktyg första- och andraderivatans grafer till funktionen  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ .

- Vilket samband finns mellan funktionens graf och dess förstaderivatans graf?
- Vilket samband finns mellan första- och andraderivatans grafer?
- Vilket samband finns mellan funktionens graf och andraderivatans graf?

### LÖSNING:

Med t.ex. GeoGebra:

- Skriv in  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  i inmatningsfältet och grafen ritas.
- Skriv in  $f'(x)$  i inmatningsfältet och du får  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$  och dess graf ritas.
- Skriv in  $f''(x)$  i inmatningsfältet och du får  $f''(x) = 6x + 2$  och dess graf ritas.
  - Funktionens lokala extrempunkter är derivatans nollställen.
  - Förstaderivatans lokala extrempunkt är andraderivatans nollställe.
  - Då funktionen har en lokal maximipunkt är andraderivatans negativ och då funktionen har en lokal minimipunkt är andraderivatans positiv.

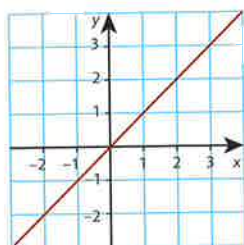




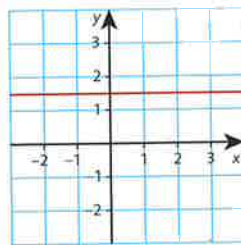
# ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

**3066** I graferna är derivatan  $f'(x)$  ritad. Bestäm var funktionen  $f(x)$  är växande respektive avtagande.

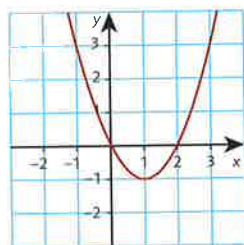
a)



b)

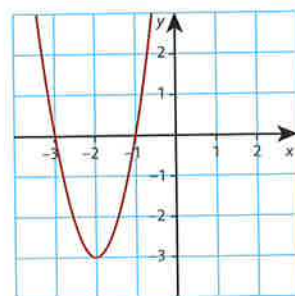


c)

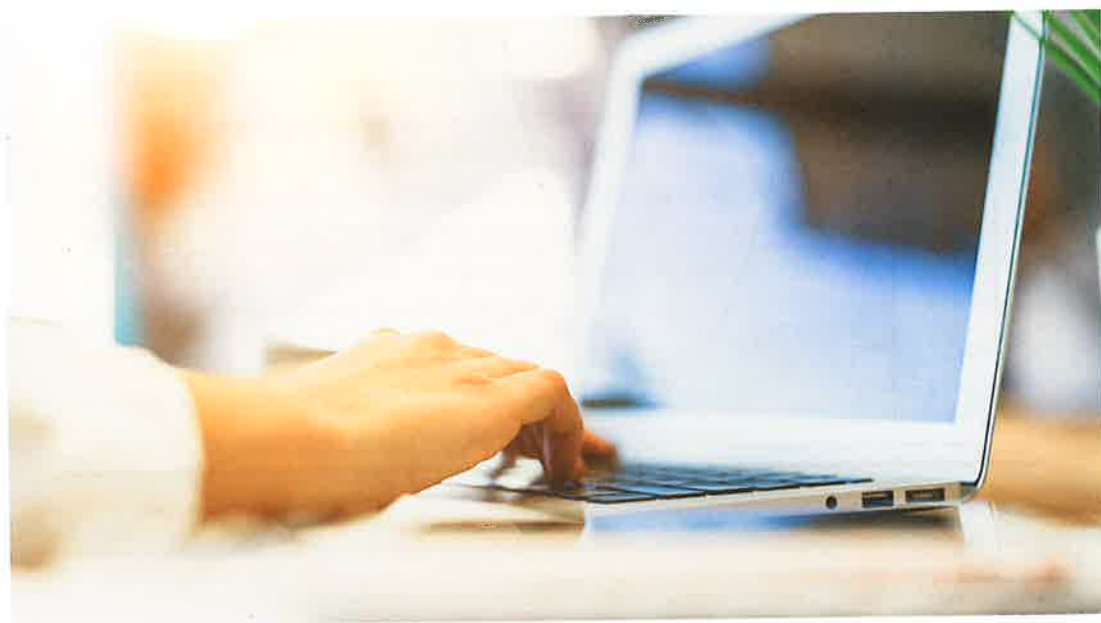


**3067** Grafen visar derivatan till en polynomfunktion. Derivatan är ett andra gradspolynom.

- För vilka  $x$ -värden är funktionen växande?
- För vilka  $x$ -värden är funktionen avtagande?
- Vilken grad har polynomfunktionen?

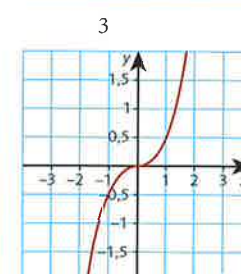
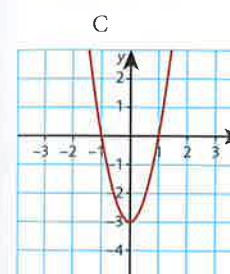
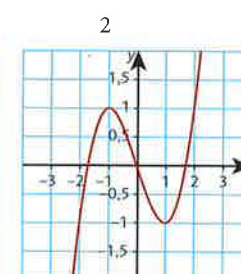
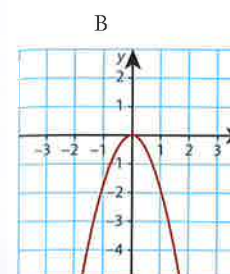
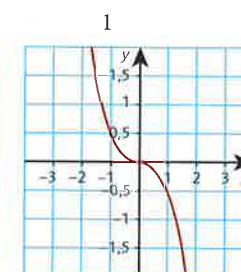
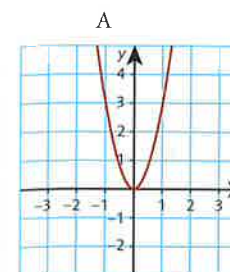


**3068** Rita med hjälp av digitala hjälpmedel grafen till funktionen  $f(x) = -x^2 + 6x - 4$  och grafen till dess derivata. Vilka samband finns mellan de båda graferna?



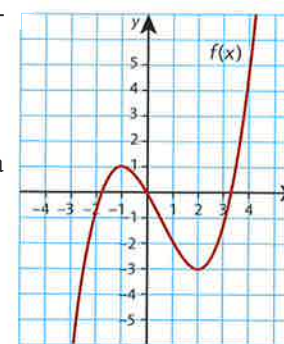
# ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

**3069** Graferna A–C visar derivatan till tre tredjegradsfunktioner och i graferna 1–3 är tredjegradsfunktionerna ritade. Para ihop rätt funktion med rätt derivata.



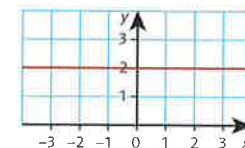
**3070** Figuren visar grafen för funktionen  $f(x)$ . Skissa grafen för funktionen  $f''(x)$ .

T



**3071** Figuren visar grafen för funktionen  $f''(x)$ .

- Skissa ett förslag för grafen för  $f(x)$ .

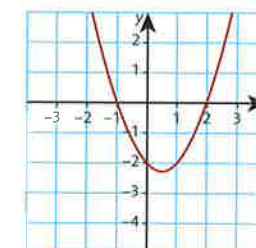


- Finns det flera möjligheter?
- Förklara med ord din tankegång för att komma fram till grafen för  $f(x)$ .

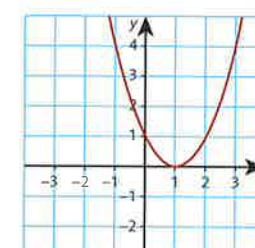
**3072** Graferna visar derivatan till tre olika tredjegradsfunktioner  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Skissa graferna till motsvarande funktioner och ge exempel på funktioner som passar in på derivatornas grafer. T

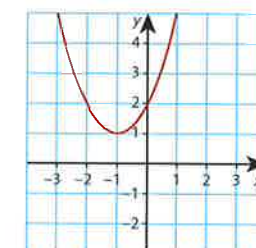
a)



b)

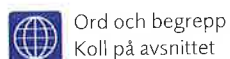


c)

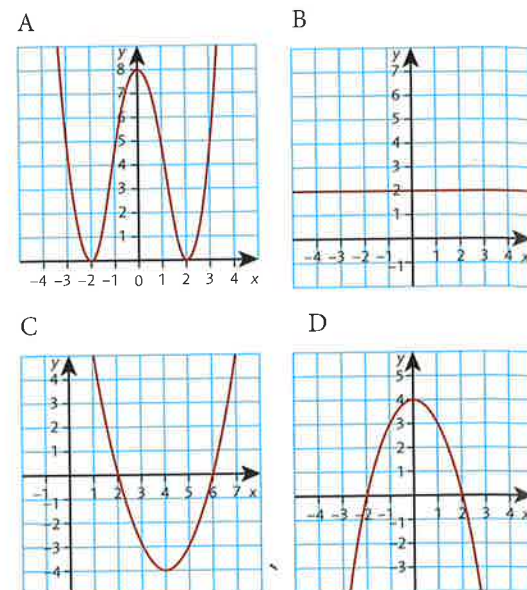


**\*\* 3073** Graferna visar några funktioners derivator. Koppla ihop funktionerna med respektive graf. En graf kan stämma in på mer än en funktion!

- $f(x)$  har en lokal minimipunkt för  $x = -2$
- $g(x)$  har en terrasspunkt följt av en terrasspunkt
- $h(3) > h(2)$
- $s(x)$  saknar lokala maximi-, minimi- eller terrasspunkter
- $t(x)$  har en lokal maximipunkt följt av en lokal minimipunkt
- $u(x)$  har en lokal minimipunkt följt av en lokal maximipunkt



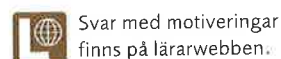
Ord och begrepp  
Koll på avsnittet



## REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 Genom att studera grafen till en funktions derivata kan man bestämma funktionens lokala extrempunkter.
- 2 Genom att studera grafen till en funktions andraderivata kan man bestämma funktionens lokala extrempunkter.
- 3 Genom att studera grafen till en funktions förstaderivata kan man bestämma funktionens terrasspunkter.



Svar med motiveringar  
finns på lärarwebben.

## 3.3 Deriveringsregler för exponentialfunktioner



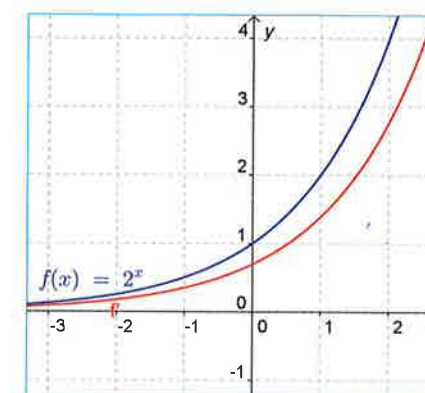
Teorigenomgång  
Simulering

För att kunna bestämma förändringshastigheter hos exponentialfunktioner behöver vi kunna derivera dem. Du har tidigare lärt dig att derivera linjära funktioner, potensfunktioner och polynomfunktioner.

### Derivata av exponentialfunktioner och talet e

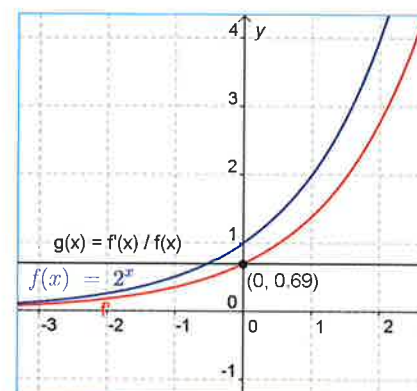
Vi ska med hjälp av digitala hjälpmedel jämföra grafer till exponentialfunktioner och deras derivator. Grafen till funktionen  $f(x) = 2^x$  (blå) och grafen till dess derivata (röd) ritas.

Vi kan nu se att graferna liknar varandra och det vore intressant att studera kvoten mellan  $y'$  och  $y$ .



Kvoten  $k = \frac{y'}{y}$  är konstant (grafen är en vågrät linje).  $k \approx 0,69$ . Med andra ord gäller  $y' = k \cdot y$ .

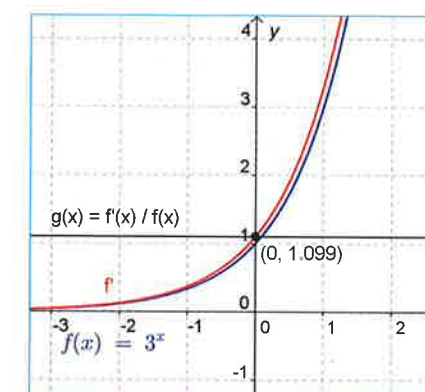
Hur ändras kvoten om vi ändrar basen i exponentialfunktionen?



Med basen 3 får vi graferna till höger.

Vi ser att graferna nästan sammanfaller, dvs.  $k \approx 1$  ( $k = 1,099...$ )

Om vi kan hitta en bas där kvoten  $k = 1$ , blir  $y' = 1 \cdot y = y$ . Funktionen är då lika med sin egen derivata. Enligt ovanstående undersökning bör basen vara mellan 2 och 3. Den bas som ger  $\frac{y'}{y} = 1$  har fått ett speciellt namn: talet e.

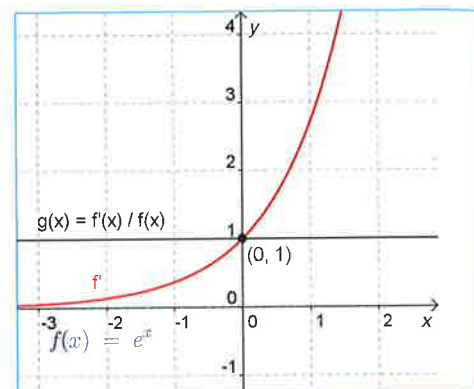


Talet  $e \approx 2,718\ 281\ 828...$



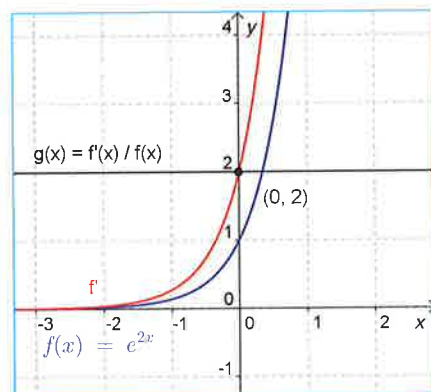
Figuren visar graferna till  $f(x) = e^x$  och dess derivata  $f'(x) = e^x$ . Lägg märke till att graferna sammanfaller och att kvoten mellan dem är 1.

Med hjälp av datorn har vi illustrerat att  $f(x) = e^x$  har derivatan  $f'(x) = e^x$ .



Funktionen  $f(x) = e^x$  har derivatan  $f'(x) = e^x$ .

Vilken derivata har  $f(x) = e^{2x}$ ? Vi kan jämföra graferna till  $f(x)$  och  $f'(x)$ .



Kvoten  $\frac{y'}{y} = 2$ , dvs.  $y' = 2 \cdot y$

$f(x) = e^{2x}$  har derivatan  $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ .

På motsvarande sätt kan man grafiskt visa att

$f(x) = C \cdot e^{kx}$  har derivatan  $C \cdot k \cdot e^{kx}$

$f(x) = C \cdot e^{kx}$  har derivatan  $f'(x) = C \cdot k \cdot e^{kx}$ ,  
 $C$  och  $k$  är konstanter.

## EXEMPEL

### Derivera exponentialfunktion med basen e

Derivera

a)  $y = 3 \cdot e^x$       b)  $y = e^{-x}$       c)  $y = 2e^{0,5x} + 3x^2 - 4x + 1$

**LÖSNING:**

a)  $y' = 3 \cdot e^x$

b)  $y' = (-1) \cdot e^{-x} = -e^{-x}$

c)  $y' = 2 \cdot 0,5e^{0,5x} + 6x - 4 = e^{0,5x} + 6x - 4$

**SVAR:**

a)  $y' = 3 \cdot e^x$

b)  $y' = -e^{-x}$

c)  $y' = e^{0,5x} + 6x - 4$

### Tangenten till en exponentialfunktion

Bestäm tangentens ekvation till funktionen  $f(x) = 5e^{0,4x}$  i punkten med x-koordinaten 0.

**LÖSNING:**

$f(0) = 5 \cdot e^{0,4 \cdot 0} = 5 \cdot 1 = 5$

$f'(x) = 5 \cdot 0,4 \cdot e^{0,4x} = 2e^{0,4x}$

$f'(0) = 2 \cdot e^{0,4 \cdot 0} = 2 \cdot 1 = 2 = k$  för tangenten i punkten (0, 5)

Tangentens ekvation:  $y = kx + m$

$y = 5$ ,  $k = 2$  och  $x = 0$  ger

$5 = 2 \cdot 0 + m$

$m = 5$

Tangentens ekvation:  $y = 2x + 5$

**SVAR:**  $y = 2x + 5$

### ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

**3074** Derivera

a)  $y = 0,5e^x$

b)  $y = 4e^{0,5x}$

c)  $y = 2e^{-x}$

d)  $y = 6e^{x/3}$

**3075** Derivera

a)  $y = 4e^x - x^2$

b)  $y = 3x - e^{-2x} + 2$

c)  $y = \frac{x - e^x}{2}$

**3076** Bestäm  $f'(0)$  om

a)  $f(x) = 3e^x$

b)  $f(x) = 0,4e^x - x + 5$

c)  $f(x) = x^3 + 2e^{-x}$

**3077** Bestäm för funktionen  $f(x) = e^{2x}$

a)  $f(0)$  och  $f'(0)$

b)  $f(-1)$  och  $f'(-1)$

c)  $f(2,5)$  och  $f'(2,5)$



3078 Bestäm  $f'(1)$  exakt och med tre gällande siffror om

- a)  $f(x) = e^{2x} - x$
- b)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 4e^x$
- c)  $f(x) = e^{-x} - x^3$

3079 Bestäm  $y''(0)$  om  $y = 6e^{-x/3}$

3080 Bestäm minsta värdet för funktionen  $y = e^{-x} + 3x$ .

3081 För vilka värden på  $x$  är funktionen  $f$  växande?

- a)  $f(x) = e^x - x$
- b)  $f(x) = e^x + x$

3082 För vilka värden på  $x$  är funktionen  $f$  avtagande?

- a)  $f(x) = e^{-x} + x$
- b)  $f(x) = e^{-2x} - 2x$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

3083 Är derivatan positiv eller negativ hos följande exponentialfunktioner? Motivera ditt svar. 

- a)  $f(x) = 0,2e^x$
- b)  $f(x) = e^{0,2x}$
- c)  $f(x) = e^{-x}$

3084 Bestäm ekvationen för tangenten till  $y = 2e^x$  i punkten  $(0, 2)$ .

3085 Bestäm en ekvation för tangenten till funktionen  $f(x) = e^x$  i punkten

- a)  $(0, 1)$
- b)  $(1, e)$
- c)  $(-1, e^{-1})$

\* 3086 Bestäm derivatan för  $y = 60\,000e^{-0,5x}$  när  $x = 2,5$ .

\* 3087 Bestäm ekvationen för den tangent till kurvan  $y = e^x$  som passerar genom origo. 

\*\* 3088 Grafen till funktionen  $f(x) = C \cdot e^{kx}$  går genom punkten  $(0, 4)$  och har där lutningen 2. Bestäm konstanterna  $C$  och  $k$ .

\*\* 3089 Ett företag vill starta helikopterflygningar från en flygplats. Man räknar med att passagerarantalet ska följa modellen  $f(x) = 300 - 220 \cdot e^{-0,226x}$  där  $f(x)$  är antalet passagerare i tusental per år efter  $x$  år.

- a) Bestäm  $f'(5,0)$ . Vad säger svaret?
- b) Bestäm  $f''(5,0)$ . Vad säger svaret?



## Talet e och den naturliga logaritmen



Tidigare har du löst exponentialekvationer med hjälp av 10-logaritmer. Om vi löser ekvationen  $e^x = 5$  med 10-logaritmer blir lösningen

$$\begin{aligned} e^x &= 5 \\ \lg e^x &= \lg 5 \\ x \lg e &= \lg 5 \\ x &= \frac{\lg 5}{\lg e} \\ x &\approx 1,61 \end{aligned}$$

Det finns en logaritm som hör ihop med basen  $e$  och som ger en enklare lösning. Den logaritmen kallas för den **naturliga logaritmen** och betecknas  $\ln$ .

Om  $y = e^x$  så är  $x = \ln y$ ,  $y > 0$

Detta ger att alla positiva tal kan skrivas med basen  $e$ .

$y = e^{\ln y}$ ,  $y > 0$

Dessutom gäller det att  $\ln e^x = x$ , vilket kan användas vid ekvationslösning.

$$\begin{aligned} e^x &= 5 \\ \ln e^x &= \ln 5 \\ x &= \ln 5 \\ x &\approx 1,61 \end{aligned}$$

För den naturliga logaritmen gäller samma räknelagar som för övriga logaritmer.

FÖR POSITIVA TAL  $a$  OCH  $b$  GÄLLER

- 1  $\ln 1 = 0$
- 2  $\ln e = 1$
- 3  $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- 4  $\ln ab = \ln a + \ln b$
- 5  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- 6  $\ln a^k = k \cdot \ln a$

### EXEMPEL

#### Skriva ett tal med basen e

Skriv med basen  $e$

- a) 10
- b) 0,2

**SVAR:** a)  $10 = e^{\ln 10}$  b)  $0,2 = e^{\ln 0,2}$

### Lösa exponentialekvation som har basen e

Lös ekvationerna

a)  $e^x = 3,5$       b)  $10e^{-2x} = 4$

#### LÖSNING:

a)  $e^x = 3,5$

$$x = \ln 3,5$$

$$x \approx 1,25$$

b)  $10e^{-2x} = 4$

$$e^{-2x} = 0,4$$

$$-2x = \ln 0,4$$

$$x = \frac{\ln 0,4}{-2}$$

$$x = -\frac{\ln 0,4}{2}$$

$$x \approx 0,458$$

**SVAR:** a)  $x = \ln 3,5 \approx 1,25$       b)  $x = -\frac{\ln 0,4}{2} \approx 0,458$

### ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

**3090** Skriv följande tal med basen e.

a) 7    b) 0,5    c) 1    d)  $a$  ( $a > 0$ )

**3091** Bestäm utan räknare

a)  $e^{\ln 100}$     b)  $3e^{\ln 3}$     c)  $\frac{1}{e^{\ln 2}}$     d)  $e^{\ln e}$

**3092** Lös ekvationerna exakt

a)  $4e^x = 2,8$       b)  $5e^{0,5x} = 10$

c)  $e^x = 1$       d)  $e^x = e$

**3093** Rita med hjälp av digitala verktyg i samma koordinatsystem graferna till  $y = e^x$  och  $y = \ln x$ .

a) Vilken definitionsmängd och värdemängd har  $y = e^x$ ?

b) Vilken definitionsmängd och värdemängd har  $y = \ln x$ ?

\* **3094** Bestäm utan räknare

a)  $e^{2\ln 3}$     b)  $e^{-\ln 6}$     c)  $4(e^{-\ln 1})^{-1}$

\* **3095** Lös ekvationerna och svara med närmevärde med tre gällande siffror.

a)  $7,6e^{-x} = 3,5$

b)  $e^x = -1$

c)  $e^x = \frac{1}{e} + 5$

\* **3096** Lös ekvationerna exakt.

a)  $\ln x - \ln(x-1) = 1$

b)  $\ln(x^2 + 6x + 9) = 0$  **L**

c)  $(e^x)^2 + 5e^x = 14$  **T**

\*\* **3097** I vilken punkt har grafen till funktionen  $f(x) = 2e^x - x$  en horisontell tangent?



### Derivatan av $a^x$

Genom att skriva om funktionen  $f(x) = a^x$  i basen e kan man derivera den ( $a > 0$ ).

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

$$f'(x) = \ln a \cdot (e^{\ln a})^x = \ln a \cdot a^x$$

På samma sätt kan  $f(x) = a^{kx}$  skrivas i basen e.

$$f(x) = a^{kx} = (e^{\ln a})^{kx} = e^{kx \ln a}$$

Derivatan blir

$$f'(x) = k \cdot \ln a \cdot e^{kx \ln a} = k \cdot \ln a \cdot (e^{\ln a})^{kx} = k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$$

Funktionen  $f(x) = C \cdot a^{kx}$  har derivatan  $f'(x) = C \cdot k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$   
C och k är konstanter,  $a > 0$ .

### Derivatan av $f(x) = a^x$

Derivera  $f(x) = 2^x$

**LÖSNING:** Enligt regeln att  $f(x) = a^x$  har derivatan  $f'(x) = \ln a \cdot a^x$

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$$

**SVAR:**  $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$ .

### Derivatan av $f(x) = a^{kx}$

Derivera  $f(x) = 1,05^{2x}$

**LÖSNING:** Enligt regeln att  $f(x) = a^{kx}$  har derivatan  $f'(x) = k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 1,05 \cdot 1,05^{2x}$$

**SVAR:**  $f'(x) = 2 \cdot \ln 1,05 \cdot 1,05^{2x}$ .

### Derivatan av $f(x) = C \cdot a^{kx}$

a) Derivera  $f(x) = 400 \cdot 5^{2x}$

b) Bestäm  $f'(1)$  exakt.

**LÖSNING:**

a) Enligt regeln att  $f(x) = C \cdot a^{kx}$  har derivatan  $f'(x) = C \cdot k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$

$$f'(x) = 400 \cdot 2 \cdot \ln 5 \cdot 5^{2x} = 800 \cdot \ln 5 \cdot 5^{2x}$$

b)  $f'(1) = 800 \cdot \ln 5 \cdot 5^{2 \cdot 1} = 2 \cdot 10^4 \cdot \ln 5$

**SVAR:** a)  $800 \cdot \ln 5 \cdot 5^{2x}$

b)  $f'(1) = 2 \cdot 10^4 \cdot \ln 5$



## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

3098 Derivera

- a)  $y = 2^x$       b)  $y = 10^x$   
c)  $y = 2 \cdot 5^x$       d)  $y = 2^{5x}$

3099 Bestäm  $f'(1)$  exakt om

- a)  $f(x) = 3^x$   
b)  $f(x) = 4 \cdot e^{2x} + x^2 - 10$

3100 Är derivatan positiv eller negativ hos följande exponentialfunktioner?

Motivera ditt svar. **T**

- a)  $f(x) = 4^x$       b)  $f(x) = 0,4^x$   
c)  $f(x) = 4^{0,4x}$       d)  $f(x) = 4^{-x}$

3101 Derivera

- a)  $y = 5^{-x}$       b)  $y = 2000 \cdot 1,05^x$   
c)  $y = 3 \cdot 2^{2x}$       d)  $y = 2 \cdot 4^{-2x} + 3 \cdot e^{-x}$

3102 Derivera  $h(t) = t^a - a^t$  ( $a$  konstant)

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* 3103 När man dricker kaffe tas koffein upp i blodet. Mängden koffein  $y$  mg efter  $x$  h kan beskrivas med formeln  $y = 100 \cdot 0,87^x$ . Med vilken hastighet minskar mängden koffein i blodet efter 2,0 h?

\* 3104 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $y = 2^x$  i punkten med  $x$ -koordinaten

- a) 0      b) 1

\* 3105 För exponentialfunktionen  $f(x) = a^x$  gäller att  $f'(0) = 5$ . Bestäm  $a$ .

\*\* 3106 Ange en exponentialfunktion där  $f'(x) = C \cdot 2^{-0,2x}$  och  $f(0) = 40$ .  $C$  är en konstant.

\*\* 3107 Kurvan  $y = 2^x$  har en tangent i punkten  $(2, 4)$  som skär  $x$ -axeln i punkten  $(a, b)$ . Bestäm  $a$  och  $b$  exakt. **L**

\*\* 3108 Bestäm med hjälp av derivata eventuella lokala extrempunkter för funktionen  $f(x) = 2^x - 2x$ . **T**

\*\* 3109 En behållare fylls med gas från en ledning.  $t$  minuter efter att påfyllningen startat strömmar det in  $f'(t)$  kg gas per minut där  $f'(t) = 200 \cdot 0,88^{\frac{t}{60}}$ . Beräkna  $f''(60)$  och beskriv med ord vad svaret säger.

## Naturvetenskapliga tillämpningar



Inom naturvetenskapen finns många företeelser som kan beskrivas med exponentialfunktioner. Med hjälp av derivata kan man studera förändringar av dessa företeelser.

EXEMPEL

### Storlek och förändring av en population

Storleken  $P(t)$  hos en insektspopulation efter  $t$  dagar kan beskrivas med funktionen

$$P(t) = 300 e^{0,01t}$$

- a) Hur stor var populationen från början?  
b) När finns det 600 insekter i populationen?  
c) Vilken tillväxthastighet har populationen då det gått tio dagar?  
d) Efter hur lång tid är tillväxthastigheten 5 insekter per dag?

### LÖSNING:

a)  $t = 0$  ger begynnelseantalet  $P(0) = 300$  insekter.

b) Sätt  $P(t) = 600$  och lös ekvationen:

$$300e^{0,01t} = 600$$

$$e^{0,01t} = 2$$

$$0,01t = \ln 2$$

$$t = 100 \ln 2$$

$$t \approx 69$$

c) Derivatan anger tillväxthastigheten

$$P'(t) = 300 \cdot 0,01e^{0,01t} = 3e^{0,01t}$$

Sätt in  $t = 10$

$$P'(10) = 3e^{0,01 \cdot 10} \approx 3,3$$

d)  $P'(t) = 3 \cdot e^{0,01t}$

$$P'(t) = 5 \text{ ger}$$

$$5 = 3 \cdot e^{0,01t}$$

$$\frac{5}{3} = e^{0,01t}$$

$$\ln \frac{5}{3} = 0,01t$$

$$t = 100 \ln \frac{5}{3}$$

$$t \approx 51$$

### SVAR:

- a) 300 insekter      b) Efter ca 69 dagar      c) Ca 3,3 insekter/dag      d) Efter ca 51 dagar

## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 3110** Vid en infektion kan antalet vita blodkroppar beskrivas med funktionen  $N(t) = 5\,000 \cdot e^{0,30t}$  där  $t$  är tiden i timmar.
- Beräkna  $N(24)$  och tolka resultatet.
  - Beräkna  $N'(24)$  och tolka resultatet.
- 3111** En laxpopulations storlek  $P(t)$  efter  $t$  dygn kan bestämmas med funktionen  $P(t) = 10\,000 e^{0,040t}$
- Hur många laxar finns det från början? **T**
  - Hur lång tid tar det för populationen att fördubblas?
  - När är tillväxthastigheten 1 600 laxar/dygn?
- 3112** Antalet bakterier  $P(t)$  i en population under ett dygn kan beskrivas med funktionen  $P(t) = 1\,200 \cdot 1,005^t$  där  $t$  är tiden i minuter.
- Med hur många bakterier ökar antalet under hela dygnet? **T**
  - Med vilken medelhastighet ökar antalet bakterier under dygnet, mätt i bakterier/min?
  - Bestäm tillväxthastigheten efter 12 h.



- 3113** Om en person blir liggande i nollgradigt vatten kan kroppstemperaturen i  $^{\circ}\text{C}$  efter  $t$  minuter ges av  $f(t) = 37e^{-0,012t}$ .
- Efter hur lång tid har kroppstemperaturen sjunkit från  $37^{\circ}\text{C}$  till  $25^{\circ}\text{C}$ ? (Det brukar räknas som den lägsta temperatur som man kan överleva.)
  - Bestäm  $f'(10)$ . Vad beskriver svaret?
- 3114** Ett nytt reningsverk har tagits i bruk vilket medför att koncentrationen av föroreningar  $N(t)$   $\mu\text{g}/\text{m}^3$  i en sjö efter  $t$  dygn kan beskrivas med funktionen  $N(t) = 0,1 + 0,5e^{-t/16}$ .
- Hur hög var koncentrationen av föroreningar när reningsverket togs i bruk?
  - Hur hög är koncentrationen efter ett år?
  - När minskar koncentrationen föroreningar med  $0,01$  ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )/dygn?

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- \* 3115** Antalet celler  $P$  i en bakteriekultur efter  $t$  timmar kan beskrivas med funktionen  $P(t) = 5\,000 e^{kt}$  där  $k$  är en konstant.
- Efter 7 timmar finns det 20 000 celler. Bestäm konstanten  $k$ .
  - Hur snabbt växer bakteriekulturen när  $t = 0$ ?
  - När ökar bakterierna med 5 000 celler/h?

- \* 3116** I ett prov med det radioaktiva ämnet polonium är poloniummängden från början 100 mg. Efter  $t$  minuter är mängden  $y(t) = 100 \cdot e^{-0,23t}$ . Bestäm  $y'(5,0)$  och  $y'(10)$ . Beskriv med ord vad svaren säger?
- \* 3117** I början av en influensaepidemi var antal nya smittade per dygn  $y(t) = 500 \cdot e^{0,157t}$  där  $t$  är antal dygn efter att epidemin startat. Beräkna  $y'(4,0)$  och beskriv vad svaret säger.
- \* 3118** En bakteriepopulation växer exponentiellt. Antalet bakterier i populationen är  $P(t)$  efter  $t$  timmar. Nedan finns sex frågor. Vad behöver man göra för att få frågorna besvarade? Para ihop siffrorna 1–6 med bokstäverna A–F.

| Fråga                                                    | Att göra               |
|----------------------------------------------------------|------------------------|
| 1. När växer populationen med $a$ bakterier/h?           | A. Lös $P(t) = 2 P(0)$ |
| 2. Hur snabbt växer populationen efter $a$ timmar?       | B. Lös $P(t) = a$      |
| 3. Hur stor är populationen efter $a$ timmar?            | C. Beräkna $P(0)$      |
| 4. När är antalet bakterier $a$ ?                        | D. Beräkna $P'(a)$     |
| 5. Hur lång tid tar det för populationen att fördubblas? | E. Lös $P'(t) = a$     |
| 6. Hur stor är populationen från början?                 | F. Beräkna $P(a)$      |

- \* 3119** En population med 1000 insekter ökar med 2,3 % per dag.
- Ange en funktion för antalet insekter  $P(t)$  vid tiden  $t$  dagar.
  - Beräkna  $P'(7)$  och tolka resultatet.
- \*\* 3120** En termos fylls med hett kaffe och placeras direkt utomhus där temperaturen ligger kring noll grader. Temperaturen på kaffet avtar exponentiellt med tiden. Efter 4 timmar är temperaturen  $76^{\circ}\text{C}$  och vid samma tidpunkt minskar temperaturen med hastigheten  $4,1^{\circ}\text{C}$  per timme.
- Vilken var temperaturen på kaffet då det hällades i termosen?
  - Kaffet anses drickbart så länge dess temperatur inte understiger  $55^{\circ}\text{C}$ .

Hur lång tid efter att man hållt kaffet i termosen är det fortfarande drickbart? (NP Ma C vt 05)

 Ord och begrepp  
Koll på avsnittet





**\*\* 3121** Temperaturen  $f(t)$  °C i en mugg choklad kan beskrivas med funktionen  $f(t) = C \cdot e^{kt}$  där  $t$  är tiden i minuter efter det att chokladen hållts upp i koppen och  $C$  och  $k$  konstanter. När chokladen hålls upp är dess temperatur 80 °C och efter 5,0 minuter är temperaturen 50 °C.

- Bestäm konstanterna  $C$  och  $k$  i funktionen.
- När sjunker temperaturen 1,0 °C/min?

**\*\* 3122** Massan av ett radioaktivt ämne i ett preparat kan beskrivas med funktionen  $m = C \cdot e^{kt}$  där  $m$  är massan i mg och  $t$  är tiden i år. Ett preparat innehåller 0,80 mg radium vars halveringstid är 1 620 år. Bestäm sönderfallshastigheten i mg/år efter 1 000 år. **T**

 Ord och begrepp  
Koll på avsnittet

### REFLEKTERA OCH DISKUTERA 3.3

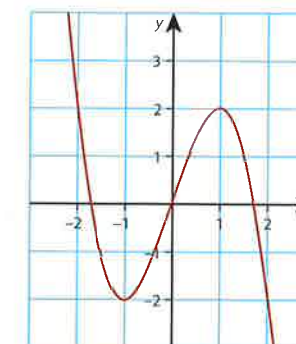
Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- Derivatan av  $y = e^x$  är  $y' = e^x$ .
- Derivatan av  $y = a^x$  är  $y' = a^x$ .
- Funktionen  $y = \ln x$  är definierad för alla reella värden på  $x$ .
- Funktionerna  $y = \ln x$  och  $y = e^x$  har samma värdemängd.

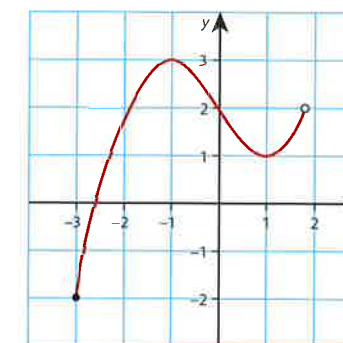
 Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

### 3.1 EXTREMVÄRDESPROBLEM

- Grafen visar funktionen  $y = -x^3 + 3x$ .
  - I vilka punkter är  $f'(x) = 0$ ?
  - Vilket tecken har derivatan mellan lokala maximi- och minimipunkterna?
  - Vad vet man om funktionen i det intervallet?
- Bestäm de intervall där funktionen är växande respektive avtagande.
  - $y = 4x^2 + 8x + 13$
  - $y = 6x - 2x^2$
  - $y = x^3 - 12x + 17$
- Bestäm lokala maximi- och minimipunkter till funktionen  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ 
  - med teckenstudium av förstaderivatan.
  - med andraderivatan.



- Bestäm med hjälp av grafen funktionens lokala och globala extrempunkter.
- Bestäm största och minsta värde för funktionen i det givna intervallet.
  - $f(x) = 1 - x^2$ ,  $-1 \leq x < 2$
  - $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ,  $-2 \leq x \leq 2$
- Bestäm två tal med differensen 20 och minsta möjliga produkt.



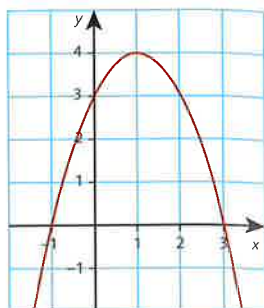
- En bonde skall bygga två rektangulära hästhagar som har en gemensam sida. Han har 600 m stängsel till sitt förfogande. Bestäm hagarnas maximala totalarea.
- Figuren visar ett motionsspår med längden 5000 meter som innesluter ett område som består av en rektangel och två halvcirklar. Vilka mått ska den gula rektangeln ha om dess area ska vara maximal?



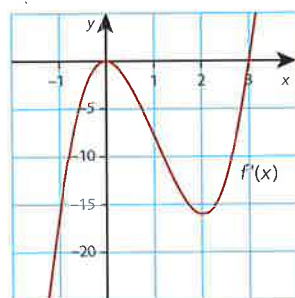


### 3.2 SAMBAND MELLAN EN FUNKTIONS GRAF OCH FUNKTIONENS FÖRSTA- OCH ANDRADERIVATA

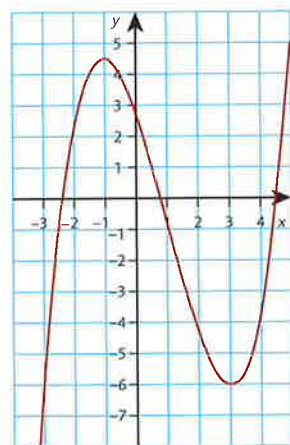
- 1 Grafen visar derivatan till en polynomfunktion. För vilka  $x$ -värden är funktionen växande?
- 2 Derivatan till en funktion  $f(x)$  är  $f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$ . Beskriv funktionen  $f(x)$ .
- 3 Grafen till en andragsradsfunktion har sin lokala maximipunkt i  $(1, 3)$ . Skissa i ett koordinatsystem hur grafen till funktionens derivata kan se ut.
- 4 Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  
 $f'(-3) = 0, f'(1) = 0, f''(-3) < 0, f''(1) > 0$ .



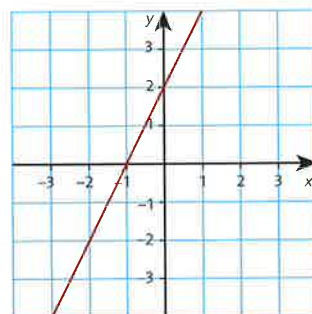
- 5 Grafen visar  $f'(x)$ . Skissa grafen för  $f(x)$ .



- 6 Grafen till  $f(x)$  är ritad. Skissa grafen för  
a)  $f'(x)$   
b)  $f''(x)$



- 7 Funktionen  $f$  har derivatan  $f'(x) = (x - a)(x - b)^2$  där  $a$  och  $b$  är konstanter och  $0 < a < b$ . Undersök för vilka  $x$  funktionen  $f$  är avtagande.



- 8 Grafen visar  $f'(x)$ . Skissa grafen för  $f(x)$ .

### 3.3 DERIVERINGSREGLER FÖR EXPONENTIALFUNKTIONER

- 1 Derivera

a)  $f(x) = e^{5x}$       b)  $f(x) = 3e^{-4x}$       c)  $f(x) = 5^{3x}$

- 2 Beräkna utan att använda räknare

a)  $\ln e^2$       b)  $e^{\ln 1,5}$       c)  $e^{5 \ln 1}$

- 3 Bestäm ekvationen för tangenten till  $f(x) = 0,5e^{-2x} + x^2 + 3x - 7$  i punkten med  $x$ -koordinaten 0.

- 4 En 1 000 liters tank innehåller en saltlösning. Innehållet i tanken byts ut genom tillförsel av rent vatten så att mängden salt  $y$  kg efter tiden  $t$  minuter kan beskrivas med funktionen  $y(t) = 50 \cdot e^{-0,010t}$ .

- a) Hur mycket salt innehöll tanken innan rent vatten tillfördes?
- b) När finns det 40 kg salt i tanken?
- c) Bestäm ändringshastigheten efter 1,0 h.

- 5 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $y = 2^x$  i punkten med  $x$ -koordinaten 2.

- 6 Antalet bakterier i en näringslösning kan beskrivas med funktionen  $P(t) = 10\,000 \cdot e^{0,080t}$  där  $t$  är tiden i timmar.

- a) Hur många bakterier finns det från början?
- b) Bestäm tillväxthastigheten efter 10 h.
- c) När är tillväxthastigheten 5000 bakterier/h?

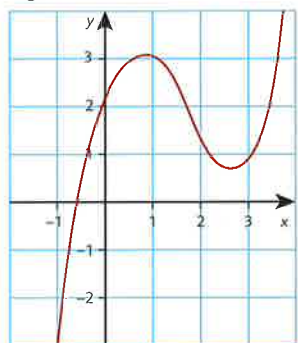
- 7 I ett prov med det radioaktiva ämnet polonium är poloniummängden från början 100 mg. Mängden efter  $t$  minuter ges av formeln  $m(t) = 100 \cdot e^{-0,23t}$ .

- a) Beräkna  $m(3)$  och beskriv med ord vad svaret säger.
- b) Beräkna  $m'(3)$  och beskriv med ord vad svaret säger.
- c) Lös ekvationen  $m(t) = 10$  och beskriv med ord vad svaret säger.

- 8 Antalet bakterier i en bakteriekultur ges av funktionen  $f(x) = 2600 \cdot 2^{0,36x}$  där  $x$  är tiden i timmar räknat från den tidpunkt då antalet bakterier var 2 600. Beräkna  $f'(10)$  och beskriv med ord var du beräknat.

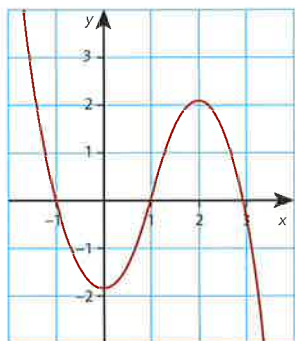
## ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 1 Funktionen  $f(x)$  har den graf som figuren visar.



Rita av grafen och

- markera en punkt på grafen där derivatan är noll
  - markera en punkt på grafen där derivatan är negativ
- 2 Använd grafen till funktionen  $f(x)$  för att bestämma tecknet för följande derivator.
- $f'(-1)$
  - $f'(0)$
  - $f'(1)$
  - $f'(2)$
  - $f'(3)$



- 3 Funktionen  $y = x^2 + 4x + 8$  har en lokal minimipunkt. Bestäm med hjälp av derivata  $x$ -koordinaten för denna punkt.

- 4  $f(x) = -2x^3 + 6x - 4$ .
- Bestäm  $f'(2)$  och förklara med ord vad du har bestämt.
  - Lös ekvationen  $f'(x) = 0$ .
  - Förklara med ord hur du kan använda dina resultat i uppgift b.
  - Rita funktionens graf.

- 5 a) Bestäm den punkt i vilken funktionen  $y = x^{1/2} - x^{3/2}$  har en horisontell tangent.
- b) Vilken teckenväxling har derivatan i den punkten?

- 6 Bestäm eventuella lokala extrempunkter för funktionen  $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3$ .

- 7 Rita grafen till funktionen  $f(x) = x^2 + 4x + 6$  och grafen till dess derivata. Vilka samband finns mellan graferna?

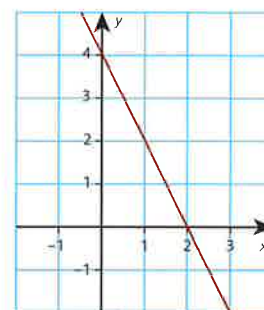
- 8 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $f(x) = e^x$  i punkten  $(3, e^3)$ .
- 9 Funktionen  $g(x)$  har följande egenskap  $g(1) = 5$  och  $g'(1) = -1$ . Vilken slutsats kan du dra om funktionens graf?

- 10 Bestäm det minsta värdet till funktionen  $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + 3$

- 11 Bestäm största och minsta värde för funktionen i det givna intervallet.

- $y = 5 - x^2, -1 \leq x < 2$
- $y = x^3 - 12x, -3 \leq x \leq 4$
- $y = 3x^5 - 5x^3, -2 \leq x \leq 2$
- $y = x^2 + \frac{16}{x}, 1 \leq x \leq 3$

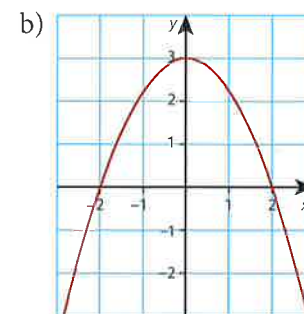
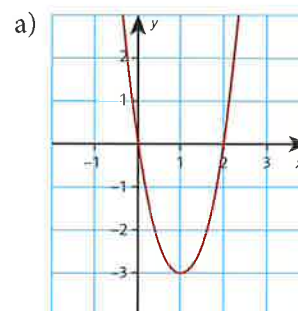
- 12 Grafen visar derivatan till funktionen  $y = f(x)$ .



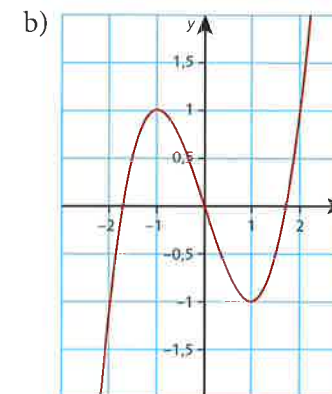
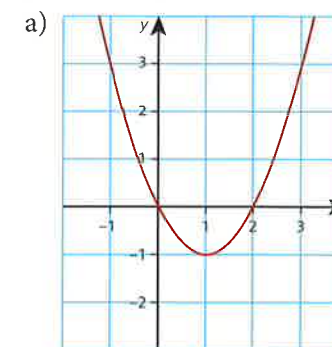
- För vilka  $x$ -värden är funktionen växande?
- Vilken sorts lokal extrempunkt har funktionen?

- 13 Skissa grafen till en funktion som har följande egenskaper:  
 $f'(-1) = 0, f'(2) = 0, f''(-1) < 0, f''(2) > 0$ .

- 14 Grafer till  $f'(x)$  visas. Rita en skiss för grafen till  $f(x)$ .



- 15 Graferna till  $f(x)$  visas. Skissa graferna till  $f'(x)$ .



- 16 Vilka av följande funktioner är växande i hela intervallet  $-1 < x < 3$ ?

- A  $y = 2x - 5$       B  $y = 5 - 2x^2$   
 C  $y = 2x^3 + 5$       D  $y = x^3 - x$

## ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

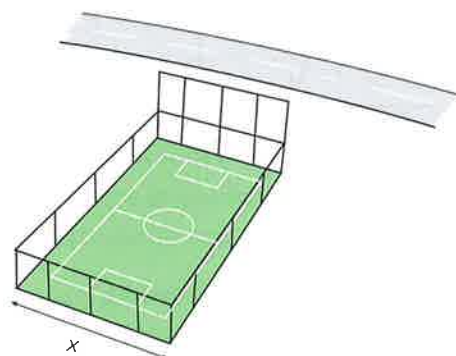
- \* 17 Av en tunn rektangulär metallplatta med måtten 5,0 dm och 8,0 dm ska man tillverka en öppen ask genom att skära bort lika stora kvadrater i de fyra hörnen.
- Hur stora kvadrater ska man skära bort om man vill att asken ska ha maximal volym?
  - Vilken volym kommer asken att ha?

- \* 18 Bestäm största möjliga volym som en öppen metallcylinder med botten kan ha om begränsningsytan är  $300\pi \text{ cm}^2$ .

- \* 19 Vilken är den minsta lutning som en tangent till kurvan  $y = x^5 + x$  kan ha?

T

- \* 20 Garfesta kommun ska bygga en bollplan. Den ska vara rektangulär med stängsel runtomkring. För att inte bollarna ska hamna ute på vägen bestämmer man sig för att bygga ett högre stängsel på den sida som ligger närmast vägen.



Kommunen har bestämt att stängslet maximalt får kosta 6600 kr. Det lägre stängslet kostar 75 kr/m och det högre 225 kr/m. Kostnaden för stolpar och grindar ingår i priset för stängslet. Om kommunen använder 6 600 kr till stängslet kan bollplanens area  $A \text{ m}^2$  beräknas enligt nedanstående samband:  $A(x) = 44x - 2x^2$  där  $x$  är längden i meter på bollplanens sida närmast vägen.

- a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på  $x$  som ger bollplanens maximala area.

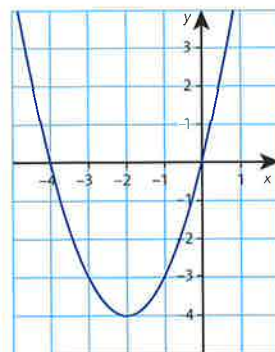
- b) Visa att bollplanens area  $A \text{ m}^2$  kan skrivas  $A(x) = 44x - 2x^2$ .

(NP Ma C vt 11)

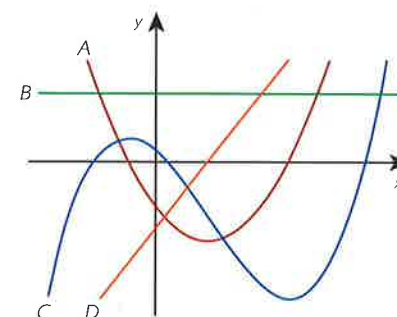
- \* 21 Höjden på första delen av en slalombacke kan beskrivas med funktionen  $h(x) = 500 + 0,00005x^3 - 0,015x^2$ ,  $0 < x < 200$  där  $h$  är höjden över havet i meter och  $x$  är det horisontella avståndet från start också mätt i meter. Efter hur många meter är backen brantast?



- \* 22 Grafen visar derivatan till en tredjegradsfunktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Skissa hur grafen till  $f(x)$  skulle kunna se ut.



- \*\* 23 Figuren visar graferna till fyra funktioner  $p$ ,  $q$ ,  $r$  och  $s$ .



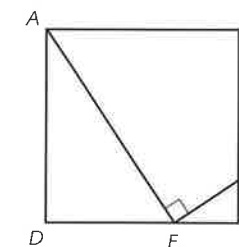
Funktionen  $p$  är en polynomfunktion av tredje graden. De andra funktionerna har bildats genom upprepad derivering av  $p$ , det vill säga:

$$q(x) = p'(x) \quad r(x) = q'(x) \quad s(x) = r'(x)$$

Para ihop funktionerna  $p$ ,  $q$ ,  $r$  och  $s$  med tillhörande graf A, B, C och D.

(NP Ma C vt 11)

- \*\* 24 ABCD är en kvadrat med sidan 3 cm och E är en punkt på sidan CD. F är en punkt på sidan BC sådan att linjen EF är vinkelrät mot AE.



- a) Bestäm arean  $A(x)$  av triangeln CEF som funktion av sidan  $CE = x$ .  
b) Bestäm funktionens definitionsmängd.  
c) Bestäm triangelns största area.

- \*\* 25 Funktionen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  har lokal maximipunkt i (2, 4), lokal minimipunkt i (4, 2) och inflexionspunkt i (3, 3). Bestäm funktionen. T

### OMFATTANDE PROBLEM

- 26 ■ Rita grafen till en andragradsfunktion vars derivata antar värdet 0 där grafen skär  $y$ -axeln.
- Bestäm de villkor för koefficienterna  $a$  och  $b$  samt konstanten  $c$  i andragradsfunktionen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  för att funktionens graf ska ha en lokal minimipunkt på den negativa  $y$ -axeln.
- Bestäm en andragradsfunktion vars graf har ett lokalt maximum i punkten (1, 0).
- Bestäm en tredjegradsfunktion  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  vars graf har ett lokalt minimum på  $y$ -axeln och ett lokalt maximum i punkten (1, 0).
- Bestäm de villkor som måste gälla för koefficienterna  $a$ ,  $b$  och  $c$  samt konstanten  $d$  i tredjegradsfunktionen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  för att funktionens graf ska ha ett lokalt minimum på  $y$ -axeln och ett lokalt maximum i punkten (1, 0).



**Växande funktion:** En funktion är växande i ett intervall om  $f'(x) \geq 0$  i intervallet.

**Avtagande funktion:** En funktion är avtagande i ett intervall om  $f'(x) \leq 0$  i intervallet.

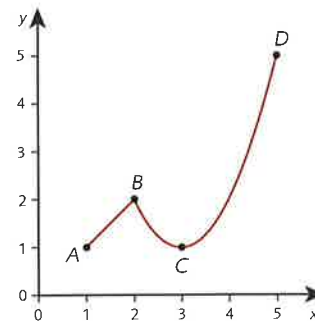
**Lokal extrempunkt:** Är antingen en lokal maximipunkt eller en lokal minimipunkt.

**Lokal maximipunkt:**  $f$  har ett lokalt maximum i  $a$  om  $f(x) \leq f(a)$  för alla  $x$  i definitionsmängden nära  $a$ .  $B$  och  $D$  i figuren.

**Lokal minimipunkt:**  $f$  har ett lokalt minimum i  $a$  om  $f(x) \geq f(a)$  för alla  $x$  i definitionsmängden nära  $a$ .  $A$  och  $C$  i figuren.

**Terrasspunkt:** I en sådan är  $f'(x) = 0$  och derivatan har teckenväxlingen  $-0-$  eller  $+0+$ .

**Global extrempunkt:** En funktion antar sitt största respektive minsta värde i de globala extrempunkterna.  $A$ ,  $C$  och  $D$  i figuren. En global extrempunkt är också en lokal extrempunkt.



**Andraderivata:** Derivatan av förstaderivatan.

Olika beteckningar är t.ex.  $y''$ ,  $f''(x)$  och  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**Extrempunktsbestämning med andraderivata:**

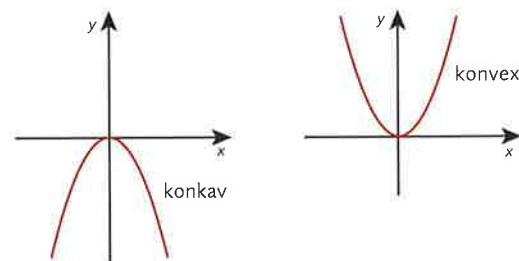
Förstaderivatans nollställen är t.ex.  $x = a$ .

$f''(a) > 0 \Rightarrow$  lokal minimipunkt för  $x = a$ .

$f''(a) < 0 \Rightarrow$  lokal maximipunkt för  $x = a$ .

$f''(a) = 0 \Rightarrow$  ingen slutsats kan dras om förekomst eller typ av lokal extrempunkt.

**Konkavitet och konvexitet:** Hur en graf buktar.



**Inflexionspunkt:** En punkt där en kurva ändras från konvex till konkav eller tvärtom.  $f''(x) = 0$  i en inflexionspunkt.

**Naturlig logaritm (ln):** Om  $e^x = y$  så är  $x = \ln y$ ,  $y > 0$ . För alla positiva tal  $y$  gäller  $y = e^{\ln y}$ .

**Logaritmlagar för naturliga logaritmer:** För positiva tal  $a$  och  $b$  gäller

- 1  $\ln 1 = 0$
- 2  $\ln e = 1$
- 3  $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- 4  $\ln ab = \ln a + \ln b$
- 5  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- 6  $\ln a^k = k \cdot \ln a$

**Exponentialekvationer med basen e:**

Löses algebraiskt med hjälp av naturliga logaritmer.

$$e^x = 5$$

$$x = \ln 5$$

$$x \approx 1,6$$

**Logaritmekvationer:**

Löses algebraiskt genom att man låter båda leden i ekvationen få samma bas.

$$\ln x = 3,8$$

$$e^{\ln x} = e^{3,8}$$

$$x = e^{3,8}$$

$$x \approx 45$$

**Derivata av exponentialfunktioner:**

$$f(x) = C \cdot e^{kx}$$

$$f'(x) = C \cdot k \cdot e^{kx}$$

$$f(x) = C \cdot a^{kx}$$

$$f'(x) = C \cdot k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$$