

4

Primitiva funktioner och enkla integraler

Centralt innehåll

- Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
- Bestämning av enkla integraler såväl med som utan digitala verktyg i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnen.

Inledning

Tidigare har du startat med en känd funktion och bestämt dess derivata för att få information om funktionens beteende. I många tillämpningar inom både naturvetenskap och samhällsvetenskap gäller det omvända, derivatan är given och man vill bestämma funktionen. T.ex. hastigheten för ett föremål är känd och man vill veta vilken sträcka föremålet rör sig på en viss tid eller hastigheten med vilken en population ökar är känd och man vill bestämma populationens storlek i framtiden.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) är en av matematikens förgrundsgestalter. Oberoende av varandra men ungefär samtidigt definierade Leibniz och Newton derivering och integrering av kontinuerliga funktioner. Under 1700-talet utvecklades integralkalkylen och tillämpades på många olika fenomen. Men det var först under 1800-talet som de grundläggande begreppen fick helt strikta definitioner. Ordet integral infördes av Johann Bernoulli (1667–1748) som var professor i Basel.

Din första uppgift

Bestäm de funktioner som har följande derivator:

- 1 $f'(x) = 2$
- 2 $f'(x) = 2x$
- 3 $f'(x) = 3x^2$
- 4 $f'(x) = x$
- 5 $f'(x) = e^{2x}$

4.1 Primitiva funktioner



Att bestämma funktionen då derivatan är känd är att tänka deriveringsregeln baklänges, dvs. att ställa frågan "Vilken funktion har denna derivata?" Att bestämma den funktionen kallas att bestämma den **primitiva funktionen**.

En funktion F kallas för en primitiv funktion till f om $F'(x) = f(x)$

EXEMPEL

En primitiv funktion

Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x$

LÖSNING:

Den primitiva funktionen måste ha exponenten 2.

Vi kallar den primitiva funktionen för $F(x)$ och prövar med $F(x) = ax^2$.

Deriverar vi $F(x)$ får vi $F'(x) = 2ax$ som ska jämföras med $f(x) = x$.

Det betyder att $2a = 1$ eller $a = \frac{1}{2}$

Den primitiva funktionen är $F(x) = \frac{x^2}{2}$

SVAR: En primitiv funktion är $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Samtliga primitiva funktioner

Bestäm *samtliga* primitiva funktioner till $f(x) = x$.

LÖSNING:

Vi såg i exemplet ovan att en primitiv funktion till $f(x) = x$ är $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Men även $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ har derivatan $F'(x) = x = f(x)$

Alla funktioner $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ har derivatan x eftersom derivatan av en konstant C är 0.

SVAR:

Samtliga primitiva funktioner är $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$.

EXEMPEL

Samtliga primitiva funktioner till olika potensfunktioner

Bestäm samtliga primitiva funktioner till

a) $f(x) = 5x^3$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = \frac{3}{x^5}$ d) $g(x) = \sqrt{x}$

LÖSNING:

a) Den primitiva funktionen måste ha exponenten 4.

Vi söker en primitiv funktion $F(x) = ax^4$

Deriverar vi $F(x)$ får vi $F'(x) = 4ax^3$ som ska jämföras med $f(x) = 5x^3$

Det ger $4a = 5$ eller $a = \frac{5}{4}$. En primitiv funktion är då $F(x) = \frac{5x^4}{4}$ och

samtliga primitiva funktioner är $F(x) = \frac{5x^4}{4} + C$

b) Vi skriver $f(x) = 2 = 2x^0$.

Den primitiva funktionen måste ha exponenten 1.

Vi får då den primitiva funktionen $F(x) = 2x$ och samtliga primitiva funktioner är

$F(x) = 2x + C$.

c) Vi skriver $f(x) = \frac{3}{x^5}$ som $f(x) = 3x^{-5}$

Vi ska höja exponenten -5 med 1, dvs. den primitiva funktionen måste ha -4 som exponent.

Vi söker en primitiv funktion $F(x) = ax^{-4}$

Derivering av $F(x)$ ger $F'(x) = -4ax^{-5}$ som ska jämföras med $f(x) = 3x^{-5}$

Vi får $-4a = 3$ eller $a = -\frac{3}{4}$

Samtliga primitiva funktioner är $F(x) = -\frac{3x^{-4}}{4} + C$

d) $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Den sökta funktionen bör ha en exponent som är $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Vi prövar med att derivera $G(x) = ax^{\frac{3}{2}}$

$G'(x) = \frac{3a}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Vi jämför $G'(x)$ med $g(x)$ och får $\frac{3a}{2} = 1$ eller $a = \frac{2}{3}$

$G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

SVAR: a) $F(x) = \frac{5x^4}{4} + C$ b) $F(x) = 2x + C$ c) $F(x) = -\frac{3x^{-4}}{4} + C$ d) $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Till potensfunktionen $f(x) = ax^n$ finns det oändligt många primitiva funktioner

$$F(x) = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

När man ska bestämma primitiva funktioner för polynomfunktioner bestämmer man primitiva funktionen för var och en av de ingående potensfunktionerna.

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

4001 Bestäm samtliga primitiva funktioner $F(x)$ till

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = x^3$
- c) $f(x) = x^{10}$
- d) $f(x) = x''$

4002 Bestäm samtliga primitiva funktioner $F(x)$ till

- a) $f(x) = x^{-5}$
- b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- c) $f(x) = 10$
- d) $f(x) = 0$

4003 Vilka funktioner har derivatan

- a) $f(x) = 2x$
- b) $f(x) = 5x^4$
- c) $f(x) = 1$
- d) $f(x) = 3x^2$

4004 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = 3x$
- b) $f(x) = \frac{1}{3}$
- c) $f(x) = \frac{x^3}{4}$
- d) $f(x) = \frac{3}{x^2}$

4005 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = 2x^3 + x + 5$
- b) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

*** 4006** Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
- b) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2}$ T

*** 4007** Bestäm en funktion $f(x)$ då $f'(x) = (5x - 1)^2$

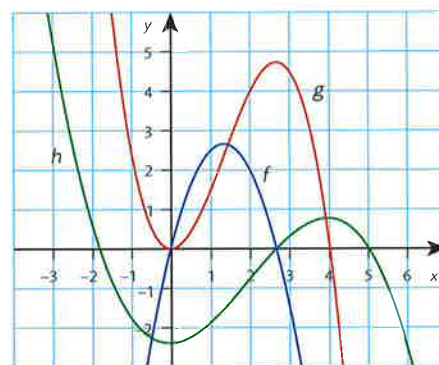
*** 4008** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}$ T

**** 4009** Vilka funktioner har derivatan

- a) $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$
- b) $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$
- c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

**** 4010** Figuren visar graferna till tre funktioner f , g och h . Vilken av funktionerna g och h är primitiv funktion till f ? Förklara varför.



EXEMPEL

Primitiva funktioner till exponentialfunktioner

Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = 2e^x$
- b) $f(x) = e^{-2x}$
- c) $f(x) = 2^x$

LÖSNING:

a) Derivatan av e^x är e^x .

Vi provar med att derivera $F(x) = 2e^x + C$.

$$F'(x) = 2e^x = f(x)$$

b) Derivatan av ae^{kx} är ake^{kx} .

Vi provar därför med att derivera $F(x) = ae^{-2x} + C$ och jämför sedan med $f(x)$.

$$F'(x) = -2ae^{-2x} = e^{-2x}. \text{ Det ger } -2a = 1 \text{ eller } a = -1/2.$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

c) Derivatan av 2^x är $\ln 2 \cdot 2^x$.

Vi provar med att derivera $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ och jämför sedan med $f(x)$.

$$F'(x) = \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\ln 2} = 2^x$$

SVAR:

- a) $F(x) = 2e^x + C$
- b) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$
- c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

PRIMITIVA FUNKTIONER TILL POTENS- OCH EXPONENTIALFUNKTIONER

Funktion $f(x)$	Primitiv funktion $F(x)$
k	$kx + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$e^{kx}, k \neq 0$	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$a^{kx}, k \neq 0$	$\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

4011 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = e^{5x}$
b) $f(x) = e^{10x}$

4012 Bestäm en primitiv funktion till

- a) $f(x) = 3^x$
b) $f(x) = 10^x$

4013 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = 3e^x$
b) $f(x) = 2e^{3x}$
c) $f(x) = e^{-x}$
d) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$ **T**

4014 Bestäm en primitiv funktion till

- a) $f(x) = e^{-4x} + 1$
b) $f(x) = 2x - 8^x$

4015 Vilka funktioner har derivatan

- a) $f(x) = e^3$
b) $f(x) = 4^x$
c) $f(x) = e^{-5x}$
d) $f(x) = \frac{1}{2^x}$

4016 Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = 3e^{2x} + 5x$
b) $f(x) = 5^x - x^5$
c) $f(x) = \frac{2}{e^x} - 2$
d) $f(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x$

*** 4017** Bestäm samtliga primitiva funktioner till

- a) $f(x) = x^2 + 7e^{5x} + \frac{4}{x^2}$
b) $f(x) = e^{5-2x}$

*** 4018** Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 4(e^{2,5x} + x) + 5$

*** 4019** Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = 2 \cdot 5^{3x}$

*** 4020** Vilka funktioner har derivatan

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}?$$

*** 4021** Bestäm samtliga primitiva funktioner till

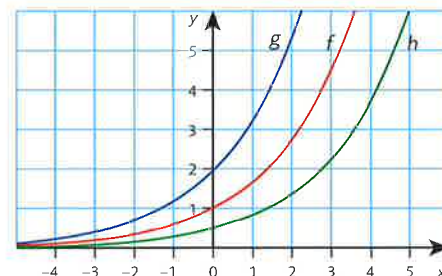
- a) $f(x) = e^{x+1}$
b) $f(x) = 4^{x+1}$
c) $f(x) = 4^3$
d) $f(x) = \frac{1}{e^{2x-3}}$

**** 4022** Bestäm en primitiv funktion till

- a) $f(x) = (e^x - e)^2$
b) $f(x) = \frac{2}{3 \cdot 2^x} - \frac{x^3}{3}$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

**** 4023** Figuren visar graferna till tre funktioner f , g och h . Vilken av funktionerna g och h är primitiv funktion till f ? Motivera ditt svar.



Primitiva funktioner med villkor



Av alla oändligt många primitiva funktioner kan vi bestämma en speciell om vi har ett villkor för den primitiva funktionen.

EXEMPEL

Primitiv funktion med villkor

Bestäm den funktion $F(x)$ som har derivatan $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 5$ och vars graf går genom punkten $(0, 2)$.

LÖSNING:

Vi vet att $f(x) = 3x^2 - 5$. Samtliga primitiva funktioner till $f(x)$ är $F(x) = x^3 - 5x + C$.

Vi söker den funktion $F(x)$ som uppfyller villkoret $F(0) = 2$.

Sätt in $x = 0$ i $F(x)$ och sätt uttrycket lika med 2.

$$F(0) = C = 2.$$

$$\text{SVAR: } F(x) = x^3 - 5x + 2$$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

4024 Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ om

- a) $f(x) = x$ och $F(0) = 3$
b) $f(x) = 6x^2 + 1$ och $F(1) = 2$
c) $f(x) = e^{2x} - x$ och $F(0) = 3$
d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ och $F(4) = 0$

4025 Bestäm den funktion $f(x)$ som har derivatan $f'(x) = 3x^2 - 2x - e^{-x}$ och $f(0) = 2$.

4026 För den primitiva funktionen $F(x)$ gäller att $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x + 3$. Bestäm $F(2) - F(1)$.

4027 Ett föremål rör sig med hastigheten $v(t)$ m/s som kan beskrivas med funktionen $v(t) = 4,0t + 5,0$, där t är tiden i sekunder beräknat från starten.

- a) Vilken hastighet har föremålet efter 10 s?
b) Vilken sträcka har föremålet rört sig efter 10 s? **L**

*** 4028** Bestäm funktionen y om

- a) $y' = 1 + 2x$ och $y(1) = -1$
b) $y' = x + e^{-x}$ och $y(0) = 1$
c) $y' = e^{0,008x}$ och $y(0) = 0$
d) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ och $y(4) = 0$



ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- * **4029** Influenzan har kommit till skolan. Låt $P(t)$ vara antalet sjuka personer t dagar efter det att epidemin bröt ut och $P(0) = 100$. Antag att influensan sprids med hastigheten $P'(t) = 120t - 3t^2$ personer/dag. Hur många är sjuka efter 5 dagar?
- ** **4030** En funktion vars tangent har lutningen $2a - 3$ för alla $x = a$ går genom punkten $(0, 4)$. Vilken är funktionen?
T
- ** **4031** Bestäm konstanten a så att grafen till den primitiva funktionen till funktionen $f(x) = 3ax^2 + 2ax + 2$ går genom punkterna $(1, 0)$ och $(2, 16)$.

Ord och begrepp
Koll på avsnittet

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 4.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 En andragsgradsfunktion har en förstagsgradsfunktion som primitiv funktion.
- 2 Till varje funktion finns bara en primitiv funktion.
- 3 Om $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ så är $F(x) = G(x) + C$.
- 4 En primitiv funktion $F(x)$ till funktionen $f(x)$ uppfyller villkoret $F(x) = f'(x)$.

Svar med motiveringar
finns på lärarwebben.

4.2 Integraler

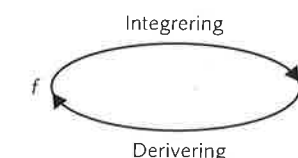
Teorigenomgång
Simulering

Ett annat skrivsätt för samtliga primitiva funktioner till f är $\int f(x) dx$.

Symbolen $\int$ kallas integraltecken och uttrycket $\int f(x) dx$ **obestämd integral**.

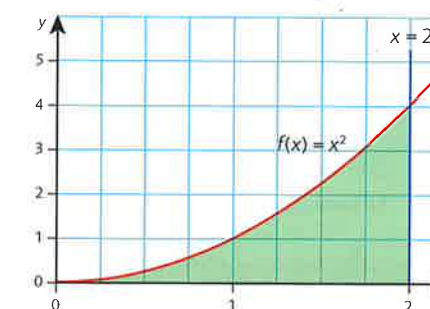
De primitiva funktionerna till funktionen f kan betecknas $F(x) = \int f(x) dx$ där $f(x)$ kallas **integrand**. Att integrera en funktion f betyder att man bestämmer de primitiva funktionerna F till den.

Beteckningen $\int f(x) dx$ utläses "integralen av f av x dx ".
 dx betyder att integrationen görs med avseende på variabeln x .



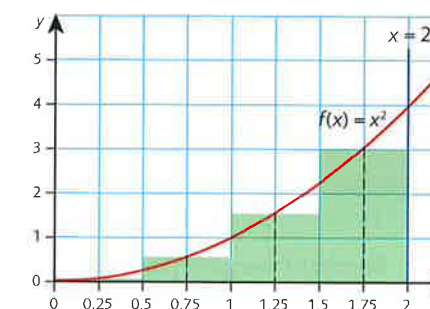
Bestämd integral

För att förstå vad som menas med **bestämd integral** tänker vi oss att vi ska beräkna arean under kurvan $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, det gröna området i figuren till höger. Området begränsas av kurvan $f(x) = x^2$, x -axeln och linjen $x = 2$.



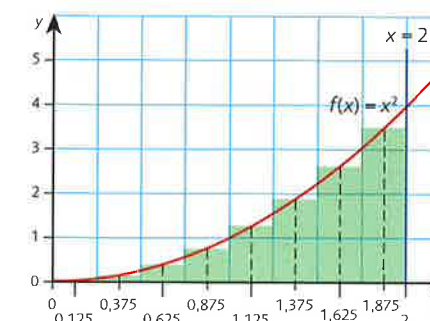
Vi kan göra en uppskattning av arean genom att dela in området i fyra lika breda rektanglar och summera areorna av rektanglarna. Alla rektanglarna har bredden 0,5 och höjden är funktionsvärdet för basens mittpunkt.

Summan av areorna av de fyra rektanglarna blir då:
 $0,5 \cdot f(0,25) + 0,5 \cdot f(0,75) + 0,5 \cdot f(1,25) + 0,5 \cdot f(1,75) =$
 $= 0,5 \cdot 0,25^2 + 0,5 \cdot 0,75^2 + 0,5 \cdot 1,25^2 + 0,5 \cdot 1,75^2 =$
 $= 2,625$



Vi har nu gjort en approximation av arean under kurvan med en s.k. **Riemannsumma**. För att få en bättre approximation kan vi dela in området i mindre och mindre delintervall.

Med åtta delintervall blir arean $0,25 \cdot (0,125^2 + 0,375^2 + 0,625^2 + 0,875^2 + 1,125^2 + 1,375^2 + 1,625^2 + 1,875^2) = 2,65625$



Låt bredden på rektanglarna vara Δx och höjden $f(x)$. Med summatecknet Σ kan vi teckna arean på följande sätt:

$$\sum_{i=1}^8 \Delta x \cdot f(x_i)$$

vilket utläses "summan av delta x gånger f av x_i där i går från 1 till 8".

För att göra en allmän definition av **bestämd integral** låter vi f vara en kontinuerlig funktion (dvs. en sammanhängande funktion) i intervallet $a \leq x \leq b$ som delas in i lika stora delintervall Δx .

Med n delintervall får vi arean $A \approx \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$

Vi låter $n \rightarrow \infty$ vilket också betyder att $\Delta x \rightarrow 0$.

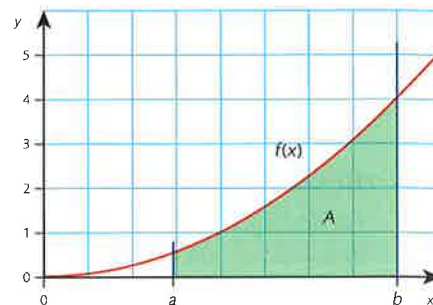
Man kan då visa att summan $\sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$ går mot

ett gränsvärde som kallas för **integralen av f från a till b** och skrivs $\int_a^b f(x) dx$.

Talen a och b kallas undre och övre integrationsgräns, $f(x)$ kallas integrand och x integrationsvariabel.

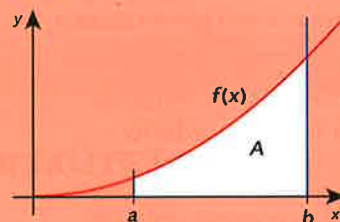
Integraltecknet $\int$ motsvarar summatecknet Σ i summan.

$\int$ är ett utdraget S för summan av alla småareor som tillsammans bildar arean under en kurva.



$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$ kallas en **bestämd integral** och är ett reellt tal.

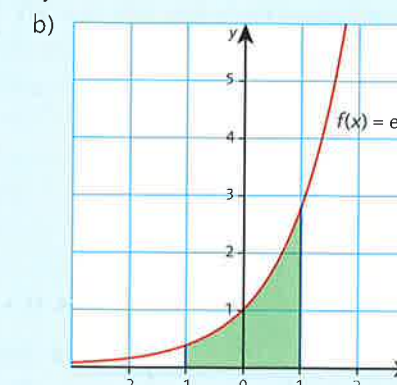
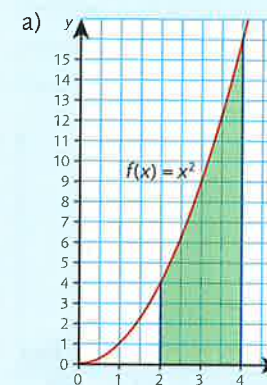


Bernhard Riemann (1826–66) var professor i matematik i Göttingen och en av den moderna matematikens pionjärer. Den definition som vi här gett på integral bygger på Riemannsummor som kommer från honom.

EXEMPEL

Teckna integral

Teckna med hjälp av en integral ett uttryck för arean av det markerade området.



SVAR: a) $\int_2^4 x^2 dx$ b) $\int_{-1}^1 e^x dx$

Beräkna integral med geometrisk formel

Beräkna integralerna med geometriska formler

a) $\int_0^2 4x dx$ b) $\int_0^3 (x+1) dx$

LÖSNING:

a) $\int_0^2 4x dx$ kan beräknas med formeln för arean av en triangel.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{2 \cdot 8}{2} \text{ a.e.} = 8 \text{ a.e.}$$

$$\int_0^2 4x dx = 8$$

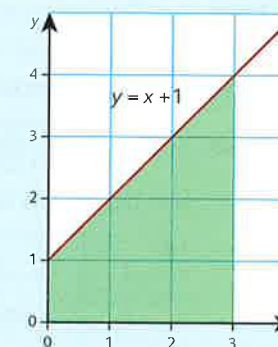
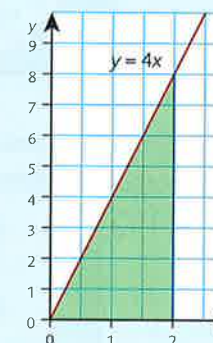
b) $\int_0^3 (x+1) dx$ kan beräknas med formeln för arean av ett parallelltrapets.

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

$$A = \frac{3(1+4)}{2} \text{ a.e.} = 7,5 \text{ a.e.}$$

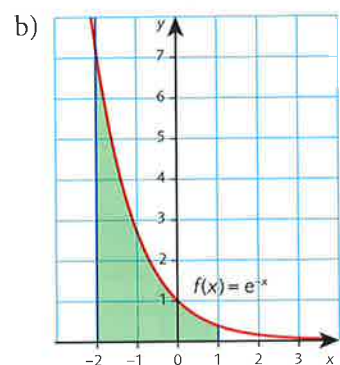
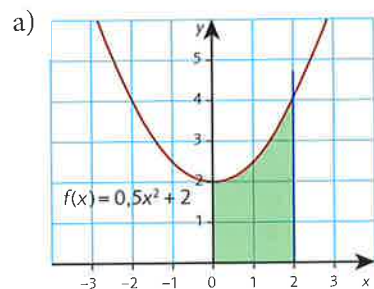
$$\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$$

SVAR: a) $\int_0^2 4x dx = 8$ b) $\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$



ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

4032 Teckna med hjälp av integral arean för det markerade området.

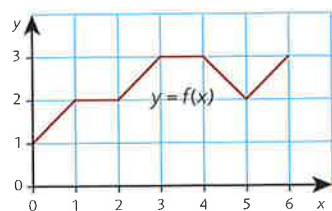


4033 Beräkna integralerna med hjälp av geometriska formler

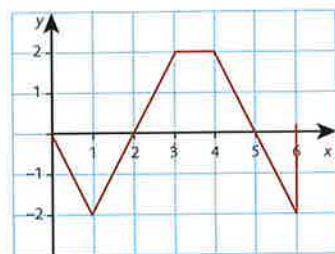
a) $\int_1^4 3 \, dx$ b) $\int_0^1 (x+1) \, dx$
 c) $\int_0^2 2x \, dx$ d) $\int_1^3 \frac{x}{2} \, dx$

4034 Beräkna arean mellan grafen till funktionen $f(x) = 0.5x + 2$ och koordinataxlarna.

4035 Bestäm $\int_0^5 f(x) \, dx$ om funktionen $f(x)$ har grafen nedan.

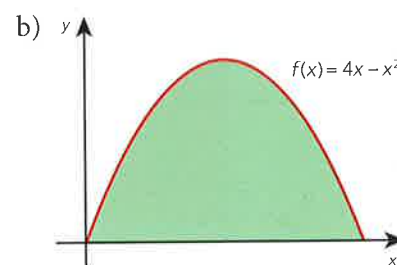
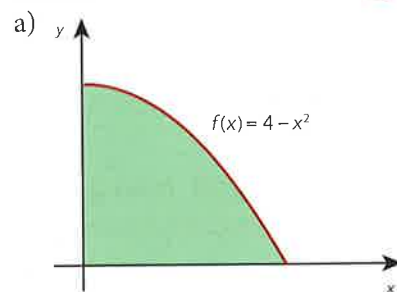


4036 Bestäm $\int_0^6 f(x) \, dx$ om funktionen $f(x)$ har grafen nedan.

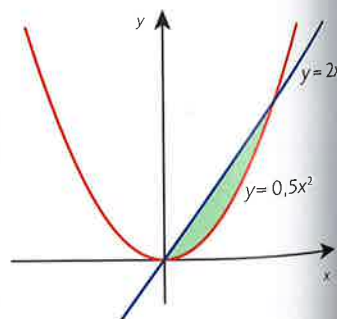


ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

* 4037 Teckna med hjälp av integral arean för det markerade området. T



* 4038 Teckna med hjälp av integral arean mellan kurvorna $y = 0.5x^2$ och $y = 2x$.

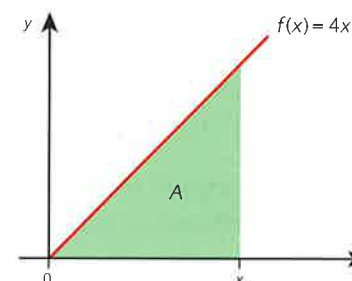


* 4039 Teckna arean mellan kurvorna $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, x -axeln samt linjen $x = 2$.

Samband mellan integral och derivata



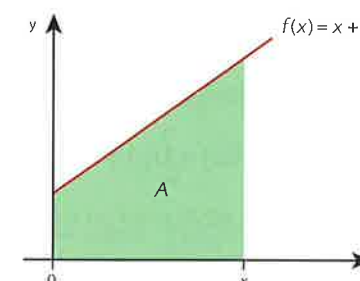
Vi har nu beräknat integraler med hjälp av kända geometriska formler, vilket är möjligt då integralen representeras av ett område som begränsas av räta linjer. Då området begränsas av t.ex. $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ eller andra funktioner finns inga kända geometriska formler. Vi måste då använda en annan metod att lösa integralerna. För att komma fram till denna metod kan vi undersöka vilket samband det finns mellan derivata och integral.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A(x) = \frac{x \cdot 4x}{2} = 2x^2$$

$$A'(x) = 4x$$



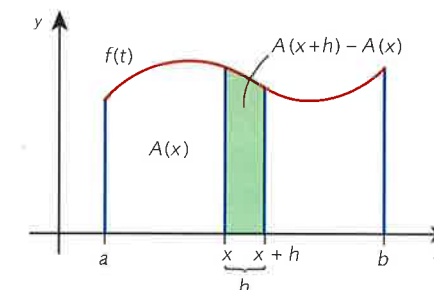
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

$$A = \frac{x(x+1+1)}{2} = \frac{x^2+2x}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{2} = \frac{x^2}{2} + x$$

$$A'(x) = x + 1$$

I exemplen ovan kan vi se att derivatan av areafunktionen, $A'(x)$, är lika med funktionen, $f(x)$. Om $A'(x) = f(x)$ så är $A(x)$ en primitiv funktion till $f(x)$.

Sats: Om $A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ och f är kontinuerlig gäller att $A'(x) = f(x)$.



Grafisk illustration av satsen:

Eftersom beviset är komplicerat nöjer vi oss med att göra satsen trolig genom att studera arean mellan kurvan $y = f(t)$ och t -axeln då $f(t) \geq 0$.

Enligt föregående avsnitt kan vi tolka $A(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ som arean mellan grafen och t -axeln i intervallet $a \leq t \leq x$. På motsvarande sätt är $A(x+h)$ arean i intervallet $a \leq t \leq x+h$ och därmed kan den skuggade arean i figuren skrivas $A(x+h) - A(x)$.

Om h är litet gäller approximationen $A(x+h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$.

Vi dividerar båda leden med h och får $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$.

Ju mindre h är ju bättre är approximationen så det är rimligt att dra slutsatsen att

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

Beräkning av bestämda integraler med primitiva funktioner

Vi anknyter till föregående teorigenomgång där f var en kontinuerlig funktion i intervallet $a \leq x \leq b$ och F en primitiv funktion till f .

Sats: Om f är kontinuerlig och F är en primitiv funktion till f är $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

BEVIS: Enligt föregående avsnitt gäller att

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ och därmed att } A(b) = \int_a^b f(t) dt \text{ och } A(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Eftersom $A'(x) = f(x)$ får vi även att $A(x) = F(x) + C$ och därmed gäller följande:

$$A(b) = F(b) + C \quad A(a) = F(a) + C = 0$$

Den andra likheten medför att $C = -F(a)$, vilket sätts in i $A(b) = F(b) + C$: $A(b) = F(b) - F(a)$

Eftersom $A(b) = \int_a^b f(t) dt$ enligt ovan kan vi kombinera de två uttrycken för $A(b)$: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ visar hur man beräknar integralens värde. Resultatet är ett reellt tal.

$\int f(x) dx = F(x) + C$ visar hur man bestämmer primitiv funktion. Resultatet är en samling funktioner.

När man ska bestämma värdet av en integral, ska man först bestämma den primitiva funktionen för att sedan sätta in gränserna. För att det ska bli tydligt vad som är primitiv funktion används följande skrivsätt: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

EXEMPEL

Beräkna integral med primitiv funktion

Beräkna integralerna

$$a) \int_0^3 (x+1) dx \quad b) \int_1^2 x^3 dx \quad c) \int_0^1 (4-e^{2x}) dx$$

LÖSNING:

$$a) \int_0^3 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^3 = \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{0}{2} + 0 \right) = 4,5 + 3 = 7,5$$

$$b) \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$c) \int_0^1 (4-e^{2x}) dx = \left[4x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \left(4 \cdot 1 - \frac{e^{2 \cdot 1}}{2} \right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{e^{2 \cdot 0}}{2} \right) = 4 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{e^2}{2} = \frac{9-e^2}{2}$$

SVAR: a) $\int_0^3 (x+1) dx = 7,5$ b) $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$ c) $\int_0^1 (4-e^{2x}) dx = \frac{9-e^2}{2}$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

4040 Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

$$a) \int_0^1 3x^2 dx \quad b) \int_1^2 (x^2 - 3) dx$$

$$c) \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2) dx$$

4041 Bestäm $\int_{-1}^2 f(x) dx$ om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och $F(-1) = 5$ och $F(2) = 3$.

4042 Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

$$a) \int_0^1 e^{5x} dx \quad b) \int_{-1}^1 5x^4 dx$$

$$c) \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx$$

4043 Bestäm $\int_{-1}^1 f(x) dx$ om $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$ och $\int_0^1 f(x) dx = -3$.

4044 Beräkna integralerna.

$$a) \int_2^4 t^2 dt \quad b) \int_{-1}^0 (1-e^{-x}) dx$$

$$c) \int_0^2 (t^2 + t) dt$$

4045 Bestäm konstanten a så att $\int_a^2 (x+1) dx = 0$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

*** 4046** Bestäm $\int_{-1}^0 f(x) dx$ om $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ och $\int_0^1 f(x) dx = 5$.

*** 4047** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

$$a) \int_1^4 \sqrt{x} dx \quad b) \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$c) \int_0^1 x\sqrt{x} dx$$

*** 4048** Om $g(0) = -2$ och $g(3) = -1$, vad är då $\int_0^3 g'(x) dx$?

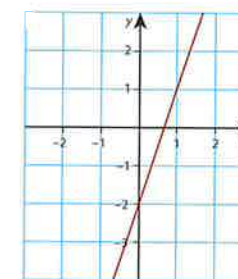
*** 4049** Bestäm konstanten k så att $\int_0^2 k(x-1)^2 dx = 2$.

*** 4050** Beräkna integralerna med hjälp av primitiva funktioner.

$$a) \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx \quad b) \int_0^2 \frac{2}{2^x} dx$$

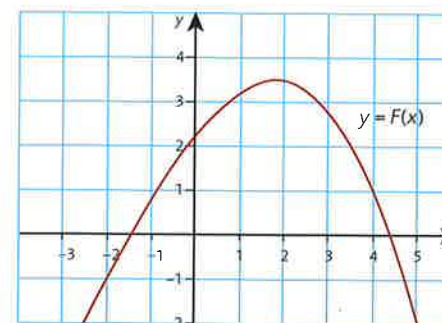
$$c) \int_{-2}^{-1} \frac{x^2+3}{x^2} dx$$

**** 4051** Funktionen F är primitiv funktion till f . Figuren visar $y = F(x)$. Bestäm $\int_0^1 f(x) dx$.



**** 4052** F är en primitiv funktion till funktionen f . I figuren nedan visas grafen till funktionen F .

$$\text{Bestäm } \int_{-2}^5 f(x) dx$$



NpMa3c ht 2012

Ord och begrepp
Koll på avsnittet

Gruppaktivitet

RÄKNEREGLER FÖR INTEGRALER

- Undersök med egna exempel om följande likhet gäller och vad som gäller för a , b och c .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Undersök med egna exempel om följande likhet gäller:

$$\int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx$$

- Förklara varför $\int_a^a f(x) dx = 0$

- Undersök med egna exempel om följande likhet gäller och vad som gäller för k .

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

- Vilket samband råder mellan $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_b^a f(x) dx$? Förklara varför.

MINSTA VÄRDE FÖR EN INTEGRAL

UTMANING

För vilket värde på a antar integralen $\int_0^1 (a+x)^2 dx$ sitt minsta värde?

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 4.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- $\int_a^b f(x) dx = F(x) + C$

- Om $F(x) = G(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$ så är $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

- $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

4.3 Beräkning av integraler med digitala verktyg

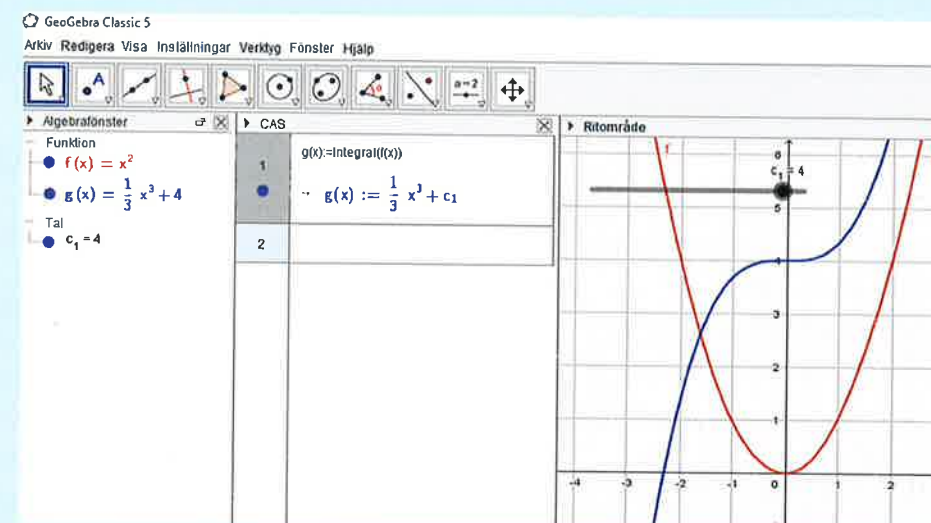
Med verktyget CAS i t.ex. GeoGebra kan bestämda integraler beräknas exakt. Man kan också bestämma primitiva funktioner och jämföra dess graf med den ursprungliga funktionen. Detta visas här med några exempel, så att du även kan använda t.ex. GeoGebra för att lösa övningarna i de naturvetenskapliga tillämpningarna i nästa avsnitt.

Bestäm samtliga primitiva funktioner $F(x)$ till $f(x) = x^2$ med hjälp av digitalt verktyg.

LÖSNING:

T.ex. med CAS i GeoGebra:

- Skriv in funktionen $f(x) = x^2$ i inmatningsfältet och tryck Enter.
- Välj **Visa**.
- Välj verktyget **CAS**.
- Skriv in Integral ($f(x)$) och tryck Enter.
- Då får du alla primitiva funktioner $\frac{1}{3}x^3 + c_1$.
- Markera $\frac{1}{3}x^3 + c_1$ och du får grafen till den primitiva funktion då $c_1 = 0$.
- Markera c_1 och du får en glidare i graffönstret där värdet på konstanten c_1 kan ändras och du kan se olika grafer för den primitiva funktionen i graffönstret beroende på konstanten c_1 .



SVAR: Samtliga primitiva funktioner till $f(x) = x^2$ är $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c_1$.

Lös integralen $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ med digitalt verktyg.

LÖSNING:

T.ex. med CAS i GeoGebra:

- 1 Välj **Visa**
- 2 Välj verktyget **CAS** och **Tangentbord**.
- 3 Välj verktyget Tangentbord för att kunna mata in specialtecken.
- 4 Skriv in $\text{Integral}(1/(1+x^2), 0, 1)$ och tryck Enter.

Du får då exakt lösning för $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ som är $\frac{\pi}{4}$.



SVAR: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

4053 Bestäm med hjälp av digitala verktyg

- a) alla primitiva funktioner till $f(x) = (x-1)(x+2)dx$
- b) graferna till $f(x)$ och $F(x)$ då $C = -2$.

4054 $g(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2-1} dt$. Beräkna med hjälp av digitala verktyg ett exakt värde för $g(4)$.

4055 Beräkna integralerna med hjälp av digitala verktyg.

- a) $\int_{-1}^0 (x+1)(x-2) dx$
- b) $\int_0^2 \frac{x+1}{x+5} dx$
- c) $\int_1^2 \sqrt{x^2+2} dx$
- d) $\int_2^5 \frac{e^{2x}}{x+1} dx$



4.4 Tillämpningar och problemlösning

Vi har visat att integraler kan användas för att beräkna ändringen i sträcka $s(t)$ mellan två tidpunkter om funktionen för hastigheten $v(t)$ är given: $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

Det finns många fler användningsområden:

- Beräkna ändringen i hastighet $v(t)$ mellan två tidpunkter om funktionen för accelerationen $a(t)$ är given: $v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$
- Beräkna ändringen i populationsstorlek $p(t)$ mellan två tidpunkter om funktionen för tillväxthastigheten $p'(t)$ är given: $p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p'(t) dt$
- Beräkna förbrukningen mellan två tidpunkter om funktionen för förbrukningshastigheten är given: $f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt$
- Beräkna energiförbrukningen $W(t)$ mellan två tidpunkter om funktionen för effekten $P(t)$ är given: $W(t_2) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$
- Beräkna arbetet $W(x)$ om funktionen för kraften $F(x)$ är given: $W(x_2) - W(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$

Beräkna sträckan om hastigheten är känd

Den hastighet v m/s som ett föremål rör sig med kan beskrivas av funktionen $v(t) = 4,0t + 5,0$ där t är tiden i sekunder. Beräkna sträckan s meter som föremålet rört sig i tidsintervallet $2,0 \leq t \leq 5,0$.

LÖSNING:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{2,0}^{5,0} (4t + 5,0) dt = \left[2,0t^2 + 5,0t \right]_{2,0}^{5,0} = (2,0 \cdot 5,0^2 + 5,0 \cdot 5,0) - (2,0 \cdot 2,0^2 + 5,0 \cdot 2,0) = 57$$

SVAR: 57 m

Tillämpning

En raket skjuts rakt uppåt. Dess hastighet v m/s efter t sekunder ges av funktionen $v(t) = 20t + 50$. Hur högt upp befinner sig raketen efter 100 sekunder?

LÖSNING:

Hastigheten är derivatan av sträckan med avseende på tiden. Vi får då funktionen för sträckan $s(t)$ genom att bestämma den primitiva funktionen till $v(t)$.

$$s(t) = 10t^2 + 50t + C$$

När $t = 0$ skjuts raket upp och därför är $s(0) = 0$.

Det villkoret ger $C = 0$. Den sökta funktionen blir $s(t) = 10t^2 + 50t$.

Raketens höjd i km efter 100 s fås av $s(100) = 10 \cdot 100^2 + 50 \cdot 100 = 105\,000$.

SVAR: Raketens höjd är 105 km.

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

- 4056** Ett föremål rör sig med hastigheten v m/s enligt funktionen $v(t) = 6,0t$. Beräkna den sträcka som föremålet rör sig i tidsintervallet $1,0 \leq t \leq 10$.
- 4057** En bil accelererar från 25 m/s till 30 m/s på två sekunder med likformig acceleration och har hastigheten $v(t) = 25 + 2,5t$ m/s under accelerationen.
- a) Teckna med hjälp av en integral ett uttryck för sträckan som bilen har färdats under de två sekunderna,
b) Beräkna sträckan.
- 4058** Temperaturändringen $T'(t)$ °C/h på en ort kan beskrivas med funktionen $T'(t) = t^2 - 6t + 4$ där t är tiden i timmar efter midnatt. Beräkna temperaturen klockan 8 på morgonen om temperaturen vid midnatt var 0 °C. Svara med hela grader. **L**
- 4059** Vattenvolymen i en behållare ändras med hastigheten $f'(t)$ liter/min där t är tiden i minuter. Tolka med ord vad det betyder att $\int_0^{60} f'(t) dt = -5$
- 4060** En bakteriekultur har tillväxthastigheten $P'(t)$ bakterier/h enligt funktionen $P'(t) = 1000e^{0,2t}$ där t är tiden i timmar. Hur stor är tillväxten i tidsintervallet $1,0 \leq t \leq 2,0$?

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 4061** Vid flod strömmar vattnet in i en hamn med hastigheten $f'(t)$ m³/h där $f'(t) = -120t^2 + 600t$, $0 \leq t \leq 4,0$. t är tiden i timmar från att vattnets inströmning startat.
- a) När är inströmningshastigheten störst? **T**

b) Beräkna $\int_0^{4,0} f'(t) dt$ och beskriv med ord vad du beräknat.

- 4062** En kopp varmt te svalnar med hastigheten $-6e^{-0,070t}$ °C/min. Hur ändras temperaturen under de första 5,0 minuterna?
- * 4063** För en viss typ av fjäder gäller sambandet $F = 25x$ där F är kraften i N och x är förlängningen i meter. Hur långt har fjädern dragits ut från ursprungsläget om det utförda arbetet är 0,80 Nm?
- * 4064** Tolka innebörden av $\int_8^{16} P(t) dt = 40$ där $P(t)$ är effektförbrukning i kW och t är tiden i timmar efter midnatt.
- * 4065** Diabetes kan ibland behandlas med en kapsel som sätts in under huden och som långsamt avger insulin till blodet. En viss typ av kapsel avger insulin med hastigheten $0,52 \cdot e^{-0,89t}$ cm³/dygn, där t är tiden i dygn. Hur mycket insulin avger kapseln under den första månaden?
- * 4066** Tolka innebörden av $\int_0^5 F(x) dx$ där $F(x)$ är kraften i N och x är sträckan i meter.
- * 4067** En population med insekter ökar med hastigheten $P'(t)$ insekter/dag, vilket kan beskrivas med funktionen $P'(t) = 20 \cdot 1,023^t$ där t är tiden i dagar. Hur många fler insekter finns det efter 7,0 dagar? **L**
- ** 4068** En bilförare ska minska hastigheten från 90 km/h till 70 km/h. Hastigheten $v(t)$ m/s under inbromsningen är $v(t) = 25 \cdot e^{-0,060t}$ där t är tiden i sekunder från inbromsningens början. Hur lång sträcka hinner bilen under inbromsningen? **T**

4.1 PRIMITIVA FUNKTIONER

- 1** Bestäm samtliga primitiva funktioner $F(x)$ till
- a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = 3x^3$ c) $f(x) = 2e^{-x}$
- 2** Vilka funktioner $f(x)$ har derivatan
- a) $f'(x) = 2$ b) $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ c) $f'(x) = 2^x$
- 3** Bestäm de primitiva funktioner $F(x)$ som uppfyller följande villkor
- a) $f(x) = 2x^2 + 5$ och $F(0) = 4$
b) $f(x) = e^{-2x} + 3x$ och $F(0) = 1$
- 4** En boll kastas uppåt och dess hastighet v m/s kan beskrivas med $v(t) = -10t + 20$ där t är tiden räknat från starten.
- a) Vilken hastighet har föremålet efter 1,0 sekund?
b) Vilken höjd har då bollen nått?
- 5** Den primitiva funktionen F till funktionen $f(x) = 2x - 1$ uppfyller villkoret $F(-2) = 2$. Bestäm $F(4)$.
- 6** En kurva går genom punkten (2, 3). Riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i punkten (x, y) är $3x^2 - 2x$. Bestäm kurvans ekvation.
- 7** Bestäm konstanten b så att funktionen $F(x) = 3(b - 2x)^2 + 4b$ är en primitiv funktion till funktionen $f(x) = 24x + 4$.
- 8** En kropp rör sig med en konstant acceleration a . Kroppens begynnelsehastighet är 14 m/s. Bestäm ett uttryck för kroppens
- a) hastighet $v(t)$ vid tidpunkten t
b) läge $s(t)$ vid tidpunkten t då sträckan s var 28 m vid begynnelse tidpunkten

GRÄNSVÄRDE

UTMANING

Bestäm arean av det område som begränsas av x -axeln, kurvan $y = x^{-p}$ där p är ett heltal större än 1, samt de räta linjerna $x = 1$ och $x = a > 1$. Visa också att arean har ett gränsvärde då $a \rightarrow \infty$ och bestäm detta gränsvärde.

1
3
5
6

4.2 INTEGRALER

4.4 TILLÄMPNINGAR OCH PROLEMLÖSNING

1 Beräkna exakt integralerna

a) $\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx$ b) $\int_0^1 (3x - e^{2x}) dx$

2 Bestäm $\int_0^5 f(x) dx$ om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och $F(0) = 4$ och $F(5) = 10$.

3 Beräkna integralerna

a) $\int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$ b) $\int_1^5 \sqrt{x} dx$ c) $\int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4 Bestäm $\int (e^{2x} - 3x) dx$

5 Bestäm största och minsta värde för funktionen $F(x) = \int_1^x (4 + 2t) dt$

6 Tolka innebörden av $\int_2^5 a(t) dt = 20$ där $a(t)$ är accelerationen i m/s^2 och t är tiden i sekunder.

7 En 10 cm hög planta har en växthastighet (m/mån) enligt formeln $h'(t) = \sqrt{t} - 0,5t$, $0 \leq t \leq 3$ där t är tiden i månader. Bestäm en funktion $h(t)$ för plantans höjd i meter efter t månader.

8 En laxpopulation $P(t)$ har tillväxthastigheten $P'(t) = 400 \cdot e^{0,040t}$ där t är tiden i dygn. Hur många fler laxar finns det efter en vecka?

Blandade övningar

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

1 Bestäm samtliga primitiva funktioner till
a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = e^{3x}$ c) $f(x) = 3^x$

2 Bestäm en primitiv funktion F till
 $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ sådan att $F(1) = 3$.

3 Beräkna integralerna

a) $\int_1^2 x dx$ b) $\int_1^3 2 dx$ c) $\int_0^1 x^{99} dx$

4 Integralen $\int_1^2 x(x+2) dx$ har värdet $\frac{16}{3}$.
Visa hur man kommer fram till detta resultat med hjälp av primitiv funktion.

5 Beräkna ett exakt värde på integralen $\int_1^2 \frac{x^3}{4} dx$

6 Antalet bakterier y i en viss bakteriekultur är en funktion av tiden t timmar. Om denna kultur vet man att tillväxthastigheten är $y' = 3,0t^2$ och begynnelseantalet är 3 500. Bestäm antalet bakterier efter 10 timmar. **L**

7 Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till funktionen $f(x) = 8x^3 - 2x + 2$ för vilken $F(1) = 4$.

8 Beräkna ett exakt värde på integralen $\int_0^1 e^{-2x} dx$.

9 Beräkna integralen $\int_{-1}^1 (2x - 3)^2 dx$

10 Vatten rinner ut från ett akvarium med hastigheten v liter/s och ges av formeln $v(t) = 3,8 \cdot e^{-0,050t}$ där t är tiden i sekunder räknat från utströmningens början. Hur mycket vatten strömmar ut på 60 sekunder?

11 Bestäm $\int \frac{1}{e^{3x}} dx$

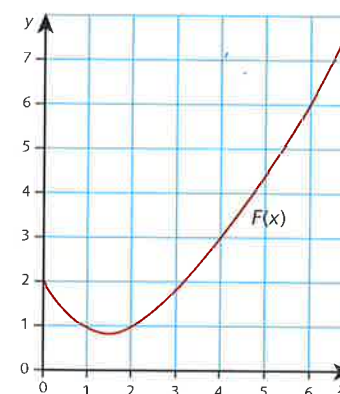
ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

12 En kurva $y = f(x)$ går genom punkten $(-3, 1)$. Riktningskoefficienten för tangenten i punkten (x, y) är $4x - 5$. Bestäm kurvans ekvation.

13 Bestäm det positiva talet a så att
 $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = 0,5$.

14 Beräkna integralen $\int_{-2}^3 (t^2x - x) dt$

* 15 Funktionen $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$. Den primitiva funktionens graf är ritad i figuren. Bestäm $\int_0^6 f(x) dx$



* 16 För den årliga folkökningen $f'(t)$ personer i en kommun gäller att den för år t beräknas till $f'(t) = 800(1 + \frac{t}{50})$, $0 \leq t \leq 20$. Beräkna den totala folkökningen under 20-årsperioden.

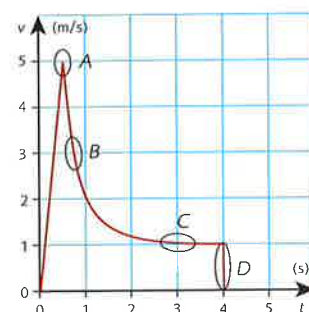
* 17 En kropp rör sig rätlinjigt med en acceleration a m/s^2 som varierar med tiden t sekunder så att $a = 3,0 - e^{0,20t}$. Kroppen har hastigheten 9,5 m/s vid tidpunkten $t = 0$. Bestäm kroppens hastighet vid den tidpunkt då accelerationen $a = 0$.

L



- * 18 Prognosen för vattenförbrukningen per år i en kommun ges av formeln $f'(t) = 2,3 - 1,2 \cdot e^{-0,25t}$ där $f'(t)$ är vattenförbrukningen i miljoner m^3 per år och t är tiden i år från början av 2012.
- Bestäm $\int f'(t) dt$
 - Bestäm den sammanlagda vattenförbrukningen för åren 2012–20 med hjälp av prognosen. **T**

- 19 En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen visar hur stenens hastighet v m/s varierar med tiden t sekunder från det ögonblick då den släpps.



- Beskriv vad som händer med stenkulan i A, B, C och D.
- Hur högt ovanför vattenytan släpptes stenen?
- Stenkulans hastighet $v(t)$ m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$. Bestäm vattendjupet där stenkulan släpps. Ge svaret i meter med två decimaler. (NP Ma D vt 99)

SAMMANFATTNING

Primitiv funktion: En funktion F kallas för en primitiv funktion till f om $F'(x) = f(x)$.

Funktion $f(x)$	Primitiv funktion $F(x)$
k	$kx + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$e^{kx}, k \neq 0$	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$a^{kx}, k \neq 0$	$\frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$

Skillnad mellan obestämd och bestämd integral:

Den obestämda integralen $\int f(x) dx$ anger samtliga primitiva funktioner.

Den bestämda integralen $\int_a^b f(x) dx$ är ett reellt tal.

Beräkning av bestämd integral:

$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$ där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

OMFATTANDE PROBLEM

- 20 Låt $A = \int_0^c x^n dx$ och $B = c^2$, n och c reella tal större än noll.

Du ska undersöka kvoten $\frac{A}{B}$ för olika värden på c och n .

- Sätt $n = 2$ och undersök för några olika värden på c vad kvoten $\frac{A}{B}$ blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på c när $n = 2$.
- Sätt $c = 1$ och undersök för några olika värden på n vad kvoten $\frac{A}{B}$ blir och formulera en slutsats.
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på n när $c = 1$.
- Låt nu både c och n variera. Formulera en slutsats om kvoten $\frac{A}{B}$ och visa att din slutsats gäller för alla värden på c och n .

