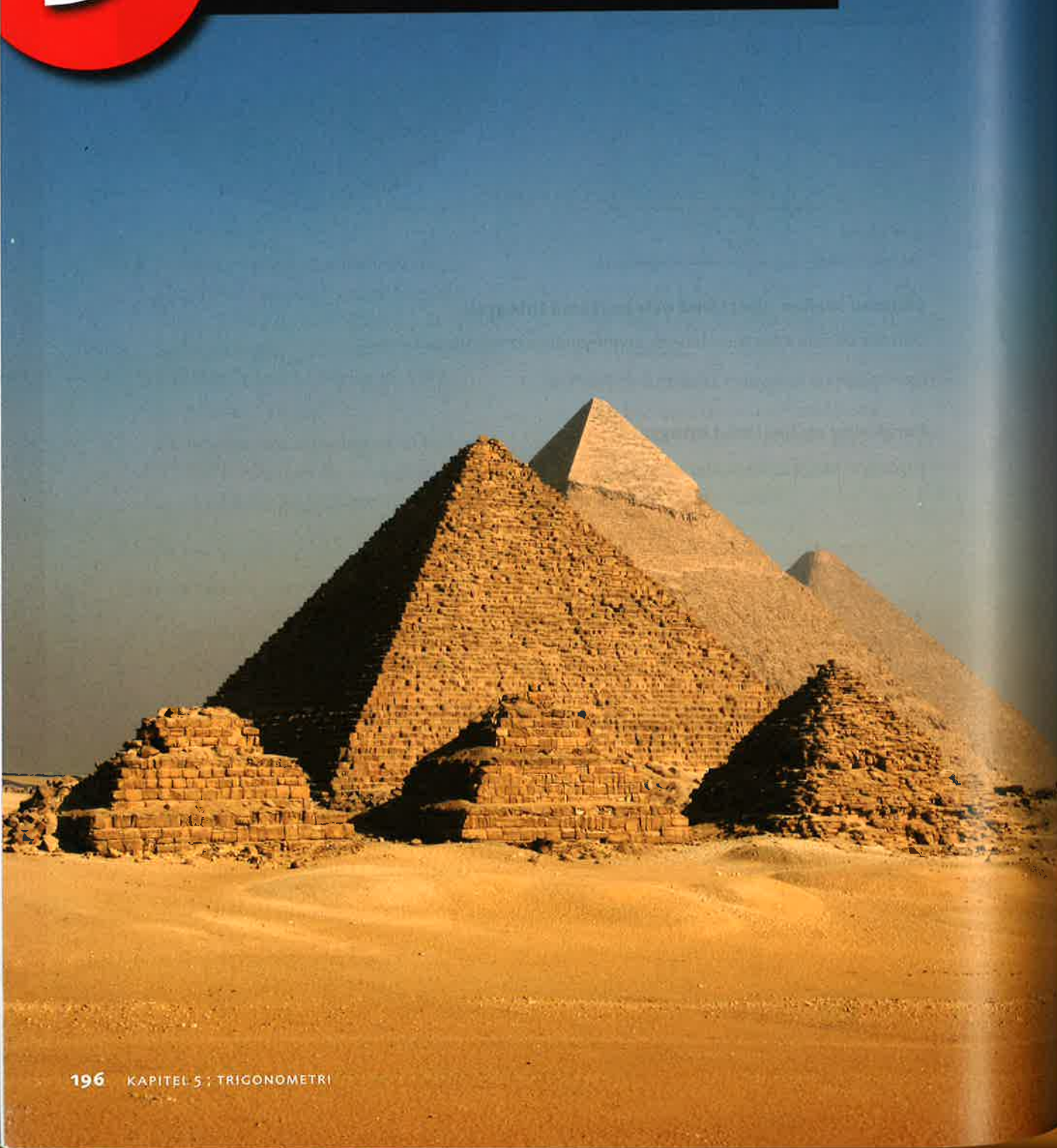


5

Trigonometri



Centralt innehåll

- Egenskaper hos cirkelns ekvation
- Enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp
- Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel

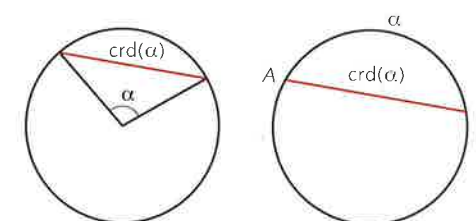
Trigonometri i olika sammanhang

Trigonometrin är en del av geometrin och utvecklades för mer än 2 000 år sedan. Den har sina rötter i beräkningar av solens och planeters rörelse. För att kunna beskriva deras rörelse behövdes ett samband mellan sträckor och vinklar i cirklar.

Greken Hipparchos gjorde ett arbete om "kordor i en cirkel" där han troligtvis formulerade ett samband mellan kordans längd och motsvarande medelpunktsvinkel.

En annan grek, Ptolemaios, gjorde på 100-talet gedigna beräkningar på samband mellan längden av kordan AB och den båginkel α som AB upptar. I sina beräkningar utgick han från en cirkel med diametern 120 enheter och delade in periferin i 360 delar. Han beräknade $\text{crd}(\alpha)$ för vinklar från $0,5^\circ$ till 180° . Ptolemaios beräkningar finns samlade i en tabell i *Almagest*, ett verk om himlakroppars rörelse. Idag skulle vi kunna beskriva hans samband med formeln

$$\text{crd}(\alpha) = 120 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$



Trigonometrin behandlar samband mellan sträckor och vinklar i trianglar. Ordet kan översättas med triangelmätning och är sammansatt av tre grekiska ord, *tri* (tre), *gonia* (vinkel) och *metron* (mått).

Nu för tiden finner vi trigonometrin inom många olika områden. Med triangulering kan man bestämma avståndet till en tredje punkt om avståndet mellan två andra punkter är känt. Navigation med satelliter är ett annat område som bygger på trigonometri. Men även i områden såsom musikteori, akustik, optik, analys av finansiella marknaden förekommer trigonometri.

Dina första uppgifter

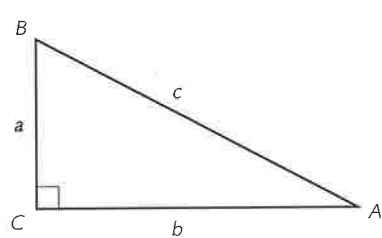
- Utgå från en cirkel med radien r . Rita en korda med medelpunktsvinkel α . Visa att $\text{crd}(90^\circ) = \sqrt{2} \cdot r$ och $\text{crd}(60^\circ) = r$.
- Utgå från en cirkel med diametern 120 i.e. och använd den för att bestämma $\text{crd}(90^\circ)$ och $\text{crd}(60^\circ)$.

5.1 Trigonometriska grundbegrepp



Teorigenomgång
Simulering

I kurs 1c lärde du dig att använda trigonometriska samband mellan vinklar och sidor i en rätvinklig triangel. Triangelns form bestäms av en av de spetsiga vinklarna, t.ex. vinkeln A . Alla rätvinkliga trianglar med samma spetsiga vinkel A är likformiga.



$$\sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{a}{b}$$

I en rätvinklig triangel gäller att vinkelsumman för de spetsiga vinklarna är 90° . Alltså är $A = 90^\circ - B$ och $B = 90^\circ - A$. Det innebär att

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A = \sin(90^\circ - B)$$

$$\sin B = \cos(90^\circ - B) \text{ och } \cos B = \sin(90^\circ - B)$$

Här följer några exempel på att bestämma sidor och vinklar i rätvinkliga trianglar. Vinklar och sidor i en triangel brukar kallas triangelns **element**.

EXEMPEL

Vinklar i en rätvinklig triangel

Bestäm de två spetsiga vinklarna i den rätvinkliga triangeln ABC .

LÖSNING:

Vi kan börja med att bestämma vinkel A . Sidan AC är närliggande katet till hörnet A , alltså använder vi sambandet

$$\cos A = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

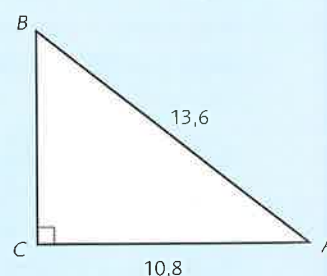
$$\text{Insättning av figurens måttal ger } \cos A = \frac{10,8}{13,6}$$

Använd räknaren för att bestämma A .

$$A \approx 37,4^\circ$$

$$\text{Då är vinkel } B = 90^\circ - 37,4^\circ \approx 52,6^\circ$$

SVAR: De spetsiga vinklarna är $37,4^\circ$ och $52,6^\circ$.



EXEMPEL

Katetlängder

I en rätvinklig triangel ABC är hypotenusan $c = 7,3$ cm och en av de spetsiga vinklarna 23° . Bestäm kateternas längder.

LÖSNING:

Vi ritar först en figur och markerar det som är givet. Vi kan välja vinkel $A = 23^\circ$.

$$\text{Kateten } a \text{ fås genom } \sin A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c}$$

Vi löser ut a och sätter in mätvärdena.

$$a = c \cdot \sin A$$

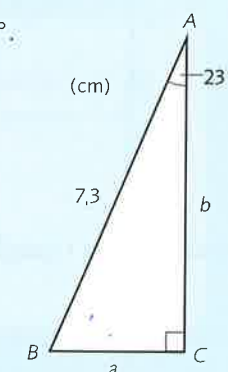
$$a = 7,3 \cdot \sin 23^\circ \approx 2,9$$

$$\text{Kateten } b \text{ fås genom } \cos A = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$$

$$b = c \cdot \cos A$$

$$b = 7,3 \cdot \cos 23^\circ \approx 6,7$$

SVAR: Kateternas längder är 2,9 cm respektive 6,7 cm.



En vinkel och motstående katet är givna

I den rätvinkliga triangeln ABC är $\angle B = 71,4^\circ$ och dess motstående sida $b = 11,6$ cm. Bestäm triangelns övriga element.

LÖSNING:

Vi börjar med att bestämma den tredje vinkeln.

$$\angle A = 90^\circ - 71,4^\circ = 18,6^\circ$$

$$\text{Hypotenusan } c \text{ bestäms genom } \sin B = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$$

Vi löser ut c och sätter in de givna värdena.

$$c = \frac{b}{\sin B}$$

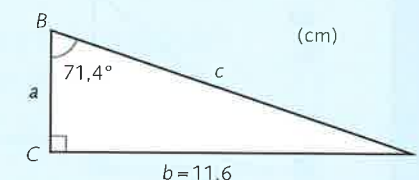
$$c = \frac{11,6}{\sin 71,4^\circ} \approx 12,2$$

$$\text{Kateten } a \text{ fås genom } \tan A = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{b}{a}$$

$$a = \frac{b}{\tan A}$$

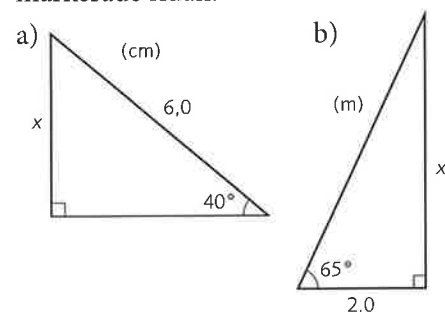
$$a = \frac{11,6}{\tan 71,4^\circ} \approx 3,90$$

SVAR: Triangelns tredje vinkel är $18,6^\circ$ och de övriga sidorna är 3,90 cm respektive 12,2 cm.

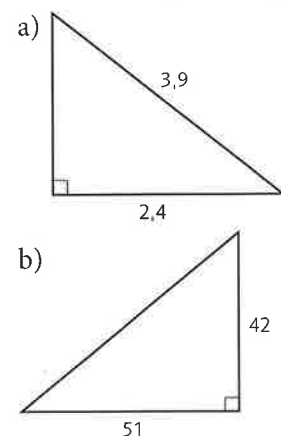


ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5001 Bestäm längden av den med x markerade sidan.



5002 Bestäm trianglarnas spetsiga vinklar.

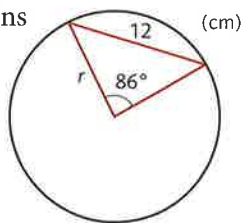


5003 I triangeln ABC är vinkeln C rät. Beräkna triangelns övriga element om

- $B = 78^\circ$ och $c = 1,0$ dm
- $A = 25,7^\circ$ och $b = 37,9$ cm
- $a = 29$ m och $c = 53$ m

5004 I triangeln ABC är vinkeln C rät. Bestäm $\cos B$ om $\sin A = 0,6$.

5005 Bestäm cirkelns radie r .



ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

* 5006 Wille ser rakt framför sig i fjärran en hög byggnad som han vet är 160 m hög. Hur långt ifrån byggnaden befinner sig Wille om han uppskattar den vinkel under vilken han ser byggnaden till $7,5^\circ$?

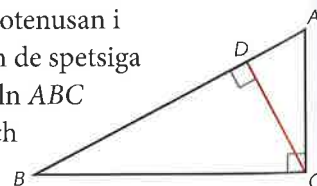
* 5007 I en likbent triangel är basvinklarna 32° och basen 26 cm. Bestäm
a) omkrets b) area

* 5008 Emilia betraktar sin syster Jennys skugga och säger till sin mamma: "Varför är skuggan längre än Jenny?"

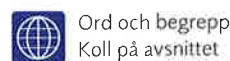
- Förklara för Emilia hur hon kan utnyttja skuggans längd för att bestämma solhöjden.
- Jenny är 1,42 m lång och hennes mamma mäter upp skuggan till 1,93 m. Hur högt står solen?



** 5009 I den rätvinkliga triangeln ABC dras en höjd från det rätvinkliga hörnet. Höjden träffar hypotenusan i punkten D . Bestäm de spetsiga vinklarna i triangeln ABC om $BC = 7,0$ dm och $AD = 2,0$ dm. **T**



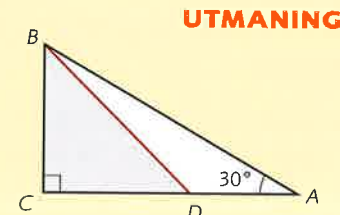
** 5010 Från en punkt A dras tangenter AB och AC till en cirkel. Bestäm längden av kordan BC om $\angle A = 84^\circ$ och cirkelns radie är 4,5 cm. **T**



SKUGGAT OMRÅDE

Bestäm arean av det skuggade området om sträckan

$$AD = 3 - \sqrt{3} \text{ l. e. och } BC = CD.$$



UTMANING

1
3
4
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 5.1

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- I en rätvinklig triangel är tangens för en vinkel kvoten mellan kateternas längder.
- I en rätvinklig triangel är sinus för en vinkel kvoten mellan längden av den längsta kateten och längden av hypotenusan.
- Om sinus för den ena spetsiga vinkeln i en rätvinklig triangel är lika med cosinus för den andra spetsiga vinkeln så är triangeln likbent.
- I en rätvinklig triangel är tangens för en vinkel alltid mindre än 1.

L Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1
5
6

5.2 Cirkelns ekvation och enhetscirkeln

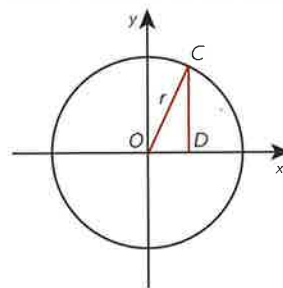
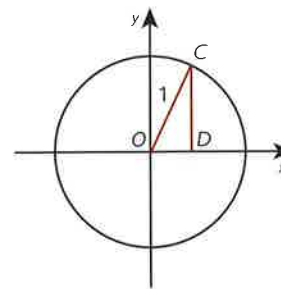


Cirkelns ekvation

Med en cirkel menas alla punkter som ligger på samma avstånd från en given punkt. Vi ritar ett koordinatsystem och placerar ut en cirkel med medelpunkt i origo (O) och radien 1 l.e. (längdenheter), en **enhetscirkel**.

Låt $C = (x, y)$ vara en punkt på cirkeln. Vi markerar punkten $D = (x, 0)$ på x -axeln och drar linjen CD . Då är triangeln OCD rätvinklig, kateten $OD = x$, kateten $CD = y$ och hypotenusan $OC = 1$. Pythagoras sats ger $x^2 + y^2 = 1$, vilket är ekvationen för en enhetscirkel med medelpunkt i origo och radie 1.

Vi låter fortfarande cirkeln ha medelpunkten i origo (O) men vi ändrar radien till r l.e. $C = (x, y)$ är en punkt på cirkeln, punkten $D = (x, 0)$. Pythagoras sats ger $x^2 + y^2 = r^2$



ENHETSCIRKEL

En cirkel med radie 1 och medelpunkt i origo.
Enhetscirkelns ekvation är $x^2 + y^2 = 1$.

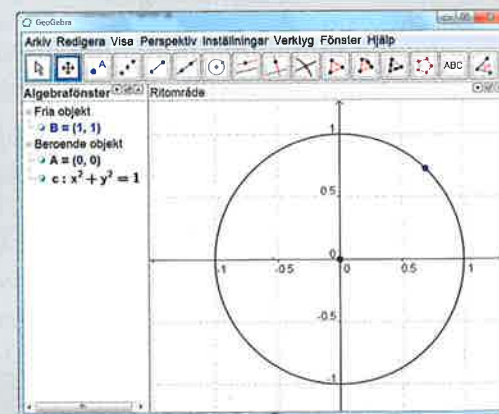
Gruppaktivitet

CIRKELNS EKVATION

I den här övningen ska ni undersöka hur cirkelns ekvation ändras om medelpunkten inte är origo. Använd gärna ett datorprogram t.ex. GeoGebra. Ni kan i GeoGebra rita en cirkel genom att ange medelpunkten och radien. Ni kan också rita cirkeln genom att skriva in dess ekvation i inmatningsfältet.

Börja med att rita en enhetscirkel och undersök hur ekvationen förändras om medelpunkten förflyttas

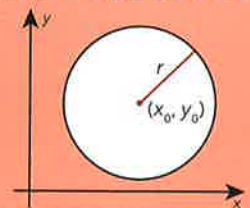
- utefter x -axeln, både i positivt och i negativt led. Skriv ner en ekvation om medelpunktens koordinater är $(x_0, 0)$.
- utefter y -axeln, både i positivt och i negativt led. Skriv ner en ekvation om medelpunktens koordinater är $(0, y_0)$.
- både i x -led och y -led. Skriv ner en ekvation om medelpunktens koordinater är (x_0, y_0) .
- Hur ändras ekvationerna om cirkeln har radien r ?



I Gruppaktiviteten Cirkelns ekvation har du undersökt hur cirkelns ekvation ändras om medelpunkten förflyttas. Motsvarande förflyttningar gjorde du med andragradsfunktioner i kurs 2c. En förflyttning utefter x -axeln till $(x_0, 0)$ ger ekvationen $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$. Förflyttar vi istället medelpunkten utefter y -axeln till $(0, y_0)$ blir ekvationen $x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Utförs båda förflyttningar så att cirkelns medelpunkt hamnar i punkten (x_0, y_0) blir ekvationen på medelpunktsform $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

EKVATIONEN FÖR EN CIRKEL PÅ MEDELPUNKTSFORM

En cirkel med medelpunkt (x_0, y_0) och radie r har ekvationen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Cirkelns ekvation

Vilken medelpunkt respektive radie har cirkeln som beskrivs av ekvationen

- a) $x^2 + y^2 = 81$ b) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$

LÖSNING:

- a) Eftersom $81 = 9^2$ kan ekvationen skrivas som $x^2 + y^2 = 9^2$. Alltså är medelpunkten origo och radien 9 l.e.
b) Termen $(x - 2)^2$ betyder att cirkelns medelpunkt är förskjuten 2 steg i positivt x -led, dvs. åt höger, jämfört med enhetscirkeln. Alltså är medelpunktens koordinater $(2, 0)$ och radien 1 l.e.
c) Västerledet säger att medelpunktens koordinater är $(-3, -1)$. Högerledet $9 = 3^2$ ger att radien är 3 l.e.

- SVAR:** a) Medelpunkt i origo och radie 9 l.e.
b) Medelpunkt i $(2, 0)$ och radie 1 l.e.
c) Medelpunkt i $(-3, -1)$ och radie 3 l.e.

Bestämma ekvationen för en cirkel

Vilken ekvation har en cirkel med medelpunkt i $(1, -1)$ och radie $\frac{1}{2}$ l.e.?

LÖSNING:

Vi använder cirkelns ekvation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ med $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ och $r = \frac{1}{2}$. Insättningen ger $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

SVAR: Ekvationen är $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

Bestämma cirkels medelpunkt och radie

Vilken medelpunkt och radie har den cirkel som beskrivs av ekvationen $y^2 = 4x - x^2$?

LÖSNING: Vi samlar alla termerna på vänster sida om likhetstecknet,

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

Addera 4 i båda led.

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

Använd andra kvadreringsregeln.

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

SVAR: Cirkeln har medelpunkt i (2, 0) och radie 2.

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5011 Bestäm medelpunkten och radien för en cirkel med ekvationen

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $x^2 + (y - 2,5)^2 = 2,25$

c) $(x + 0,5)^2 + (y - 1,4)^2 = 1,96$

5012 I vilken kvadrant ligger medelpunkten till cirkeln

$(x - 15)^2 + (y + 30)^2 = 400$?

5013 Bestäm ekvationen för en cirkel med

a) medelpunkt i (0, -1) och radie 2.

b) medelpunkt i (5, 0) och radie 3

c) medelpunkt i (-1, -1) och radie 1,1.

5014 Medelpunkten i en cirkel är (-3, -2) och radien är 8.

a) Bestäm ekvationen för cirkeln.

b) Undersök om cirkeln går genom punkten (2, 3).

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5015 Vilka skärningspunkter med koordinataxlarna har cirkeln med ekvationen

a) $x^2 + y^2 = 100$ b) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

c) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 49$

5016 Medelpunkten i en cirkel är (2, -3)

och radien är 6. Undersök vilka av

punkterna $A = (-2, 3)$, $B = (2, 3)$,

$C = (-2, -3)$, $D = (5, 0)$ och

$E = (0, -10)$ som ligger

a) på cirkeln

b) inuti cirkeln

c) utanför cirkeln.

* **5017** Bestäm fyra punkter på cirkeln

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

* **5018** Medelpunkten i en cirkel är (-4, 2).

Bestäm ekvationen för cirkeln

när cirkeln

a) går genom (-7, 1)

b) tangerar x-axeln

c) tangerar y-axeln

d) tangerar linjen $y = x$ **T**

* **5019** a) Beskriv med ord vad det innebär att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

b) Lös ekvationssystemet

** **5020** Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln med ekvationen $x^2 + 2x + y^2 = 0$. **T**

Enhetscirkeln och trigonometri



Teorigenomgång
Simulering

Vi har definierat sambanden för sinus, cosinus och tangens för spetsiga

vinklar utifrån en rätvinklig triangel. Men det finns även trianglar med en trubbig vinkel.

Vi ska visa hur man kan använda enhetscirkeln för att bestämma sinus, cosinus och tangens för vinklar i de fyra kvadranterna.

Vinklar i intervallet 0° till 90°

Vi ritar en enhetscirkel och markerar i första kvadranten en punkt

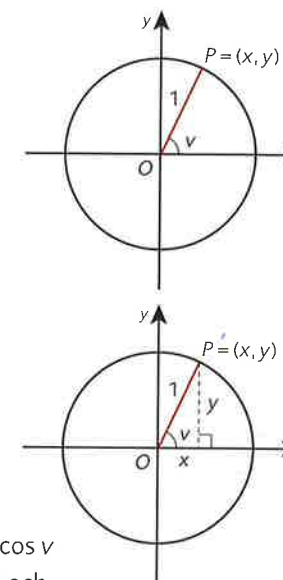
$P = (x, y)$ på cirkeln och drar radien OP . Beteckna vinkeln mellan radien OP och x-axeln med v .

Vi konstruerar en rätvinklig triangel genom att dra en linje parallell med y-axeln från punkten P till x-axeln.

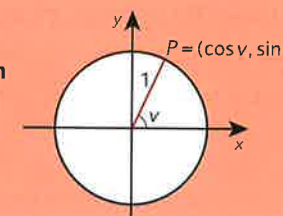
Eftersom kateterna har längderna x respektive y och hypotenusan längden 1 kan vi ställa upp följande samband:

$$\cos v = \frac{x}{1} = x \quad \sin v = \frac{y}{1} = y \quad \tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}$$

På en enhetscirkel ges koordinaterna för en punkt P i första kvadranten av $P = (\cos v, \sin v)$ där v är vinkeln som radien bildar med x-axeln. Enhetscirkelns ekvation är $x^2 + y^2 = 1$. Vi sätter in $x = \cos v$ och $y = \sin v$ och får $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$. $\cos^2 v$ utläses "cos kvadrat v" och betyder $(\cos v)^2$. Sambandet kallas **trigonometriska ettan**.



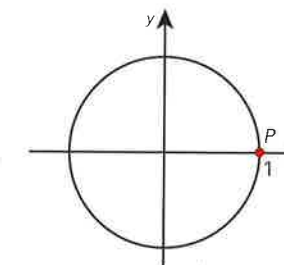
För en punkt P i första kvadranten på en enhetscirkel gäller att $P = (\cos v, \sin v)$



TRIGONOMETRISKA ETTAN
 $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$

När vinkeln $v = 0^\circ$ ligger punkten P på x-axeln och har koordinaterna (1, 0). Alltså är $\cos 0^\circ = 1$ och $\sin 0^\circ = 0$.

När vinkeln $v = 90^\circ$ ligger punkten P på y-axeln och har koordinaterna (0, 1). Alltså är $\cos 90^\circ = 0$ och $\sin 90^\circ = 1$



Vinklar i första kvadranten

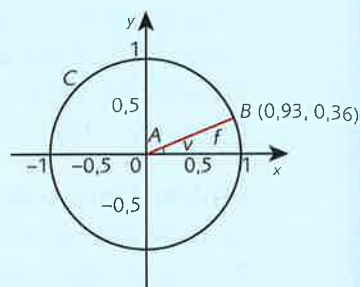
Bestäm $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ och v för den vinkel som visas i figuren.

LÖSNING: Ur figuren kan vi läsa av $\cos v = 0,93$, $\sin v = 0,36$

$\tan v$ bestäms från sambandet $\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{0,36}{0,93} \approx 0,39$

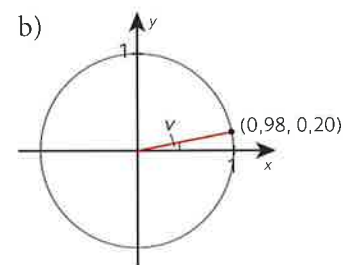
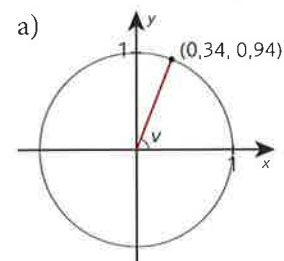
Vinkeln v kan vi t.ex. bestämma från $\sin v = 0,36$, $v \approx 21^\circ$

SVAR: $\cos v = 0,96$, $\sin v = 0,36$, $\tan v \approx 0,39$, $v \approx 21^\circ$

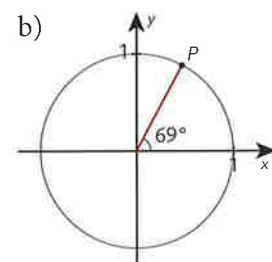
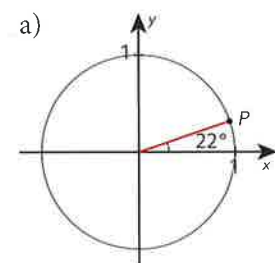


ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5021 Bestäm $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ samt v .



5022 Bestäm koordinaterna för punkten P . Svara med två decimaler.



5023 Bestäm koordinaterna med tre decimaler för punkten på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln

- a) $v = 5,30^\circ$ b) $v = 39,4^\circ$
c) $v = 72,6^\circ$

5024 För vilken vinkel v i första kvadranten gäller att

- a) $\cos v = 0,762$ b) $\sin v = 0,145$
c) $\tan v = 2$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5025 Vilken punkt på enhetscirkeln i första kvadranten motsvaras av

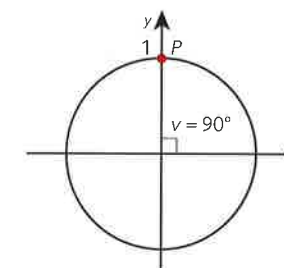
- a) $\tan v = 0,5$ b) $\tan v = 10$
c) $\tan v = 3,5$

5026 Vinkeln v ökar från 0° till 90° .

Hur ändras

- a) cosinusvärdet för v
b) sinusvärdet för v
c) tangensvärdet för v

* **5027** Tangenten till punkten P på enhetscirkeln har lutningen $-1,5$. Bestäm koordinaterna för punkten P om man vet att punkten ligger i första kvadranten. **T**



När punkten P rör sig utefter enhetscirkeln från $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$ växer vinkeln v från 0° till 90° . För vissa värden på vinkeln v , nämligen 30° , 45° och 60° , kan vi bestämma $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ exakt.

Exakta trigonometriska värden i första kvadranten

Bestäm exakt $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ om

- a) $v = 30^\circ$ b) $v = 45^\circ$ c) $v = 60^\circ$

LÖSNING: Vi markerar vinklarna i enhetscirkeln och konstruerar trianglar.

a) För $v = 30^\circ$ får vi en halv liksidig triangel med sidorna $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ och 1.

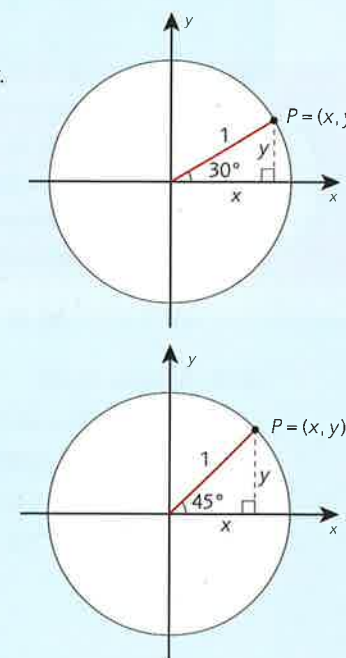
Det ger att punkten $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\cos 30^\circ = x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = y = \frac{1}{2}$ och

$$\tan 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) För $v = 45^\circ$ får vi en halv kvadrat med hypotenusan 1.

Det ger att punkten $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\cos 45^\circ = x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

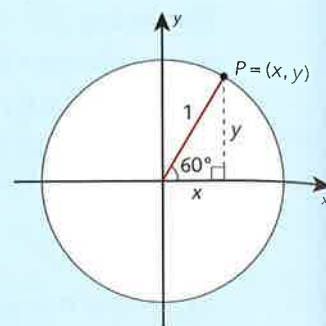
$$\sin 45^\circ = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ och } \tan 45^\circ = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$$



c) För $v = 60^\circ$ får vi en halv liksidig triangel med sidorna $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ och 1.

Det ger att punkten $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\cos 60^\circ = x = \frac{1}{2}$,

$\sin 60^\circ = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$



SVAR:

a) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$

c) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Resultatet kan sammanställas i en tabell

v	0°	30°	45°	60°	90°
cos v	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin v	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan v	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	odefinierad

5028 Bestäm x -koordinaten för den punkt i första kvadranten på enhetscirkeln som har y -koordinaten

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5029 Bestäm exakt

- a) $\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ$
 b) $\cos 60^\circ + \sin 60^\circ$
 c) $(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)^2$
 d) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

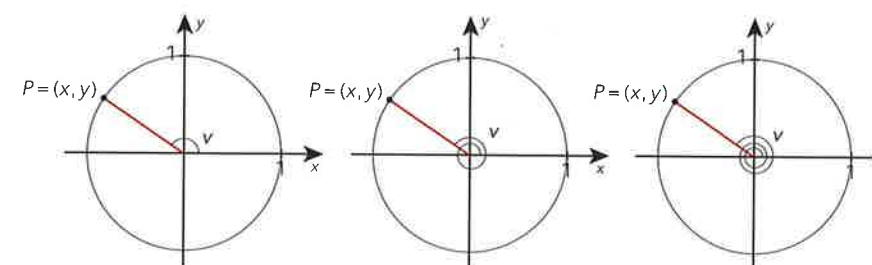
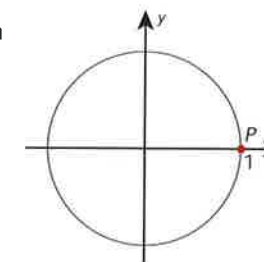
*** 5030** $P = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ och $Q = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$ är två punkter på enhetscirkeln. Bestäm längden av PQ .



Vinklar på enhetscirkeln

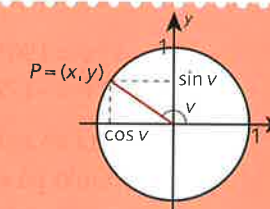
Vi ritar en enhetscirkel och markerar punkten $P = (1, 0)$. I den punkten är vinkeln $v = 0^\circ$. Vi låter nu punkten P vrida sig moturs utefter enhetscirkeln tills vi är tillbaka till utgångspunkten. Vinkeln v kommer då att öka från 0° till 360° . När punkten P passerar positiva y -axeln är vinkeln 90° , negativa x -axeln 180° och negativa y -axeln 270° . Varje vinkel kommer att motsvaras av exakt en punkt på cirkeln. Vi ser att vinklarna 0° och 360° motsvaras av samma punkt på enhetscirkeln. Det gäller att varje punkt på enhetscirkeln motsvaras av oändligt många olika vinklar beroende på hur många varv, moturs eller medurs, punkten P vrids.

Vinklarna v , $v + 360^\circ$, $v + 2 \cdot 360^\circ$, ..., dvs. vinklarna $v \pm n \cdot 360^\circ$, där n är ett heltal motsvaras av samma punkt på enhetscirkeln.



Vi vet att för varje punkt P på enhetscirkeln i första kvadranten finns ett samband mellan punktens koordinater och vridningsvinkeln v , nämligen $P = (\cos v, \sin v)$. Detta samband gäller även för punkter på enhetscirkeln i övriga kvadranter.

Om vinkeln v motsvaras av punkten $P = (x, y)$ på enhetscirkeln gäller att $x = \cos v$ och $y = \sin v$.



Vinklar i olika kvadranter

P är en punkt på enhetscirkeln. I vilken kvadrant ligger punkten P om

- a) $v = 137^\circ$ b) $v = 242^\circ$ c) $v = -76^\circ$

LÖSNING:

- a) Eftersom $90^\circ < v < 180^\circ$ så ligger P i andra kvadranten.
 b) $180^\circ < v < 270^\circ$ ger att P ligger i tredje kvadranten.
 c) $v = -76^\circ$ betyder att punkten P har vridits medurs 76° från punkten $(1, 0)$. P ligger i fjärde kvadranten.

SVAR: a) 2:a kvadranten b) 3:e kvadranten c) 4:e kvadranten

Vinklar med samma punkt på cirkeln

Vilken vinkel i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ motsvaras av samma punkt på enhetscirkeln som vinkeln

- a) 450° b) -100° c) 800°

LÖSNING: Den sökta vinkeln får vi genom att addera eller subtrahera multiplar av 360° .

a) $v + 360^\circ = 450^\circ$ ger $v = 450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$

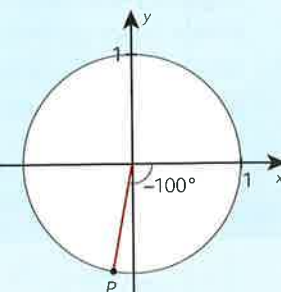
b) -100° betyder att punkten P har vridits 100° medurs eller i negativ riktning, se figuren.

$v - 360^\circ = -100^\circ$ ger $v = -100^\circ + 360^\circ = 260^\circ$

c) Eftersom $800^\circ > 2 \cdot 360^\circ$ så har punkten P vridits två varv moturs.

$v + 2 \cdot 360^\circ = 800^\circ$ ger $v = 800^\circ - 720^\circ = 80^\circ$

SVAR: a) 90° b) 260° c) 80°



ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5031 P är en punkt på enhetscirkeln. I vilken kvadrant ligger punkten P om

- a) $v = 190^\circ$ b) $v = 67^\circ$
c) $v = -172^\circ$ d) $v = 455^\circ$

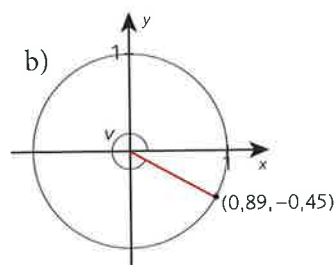
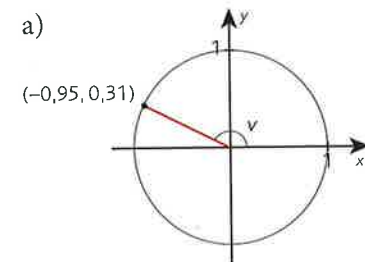
5032 Rita en enhetscirkel och markera den punkt på enhetscirkeln som motsvaras av vinkeln

- a) 130° b) -90°
c) 690° d) -800°

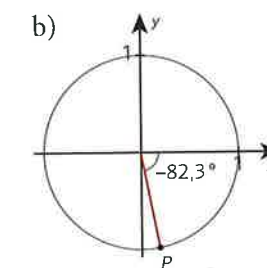
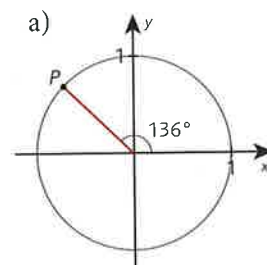
5033 Vilken vinkel i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ motsvaras av samma punkt på enhetscirkeln som vinkeln

- a) 495° b) -120° c) $1\,820^\circ$

5034 Bestäm $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ samt v



5035 Bestäm koordinaterna för punkten P .



5036 Rita en enhetscirkel och markera den punkt som motsvaras av

- a) $P = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ)$
b) $Q = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ)$
c) $R = (\cos (-30^\circ), \sin (-30^\circ))$
d) $S = (\cos (-540^\circ), \sin (-540^\circ))$

5037 I vilken kvadrant ligger en punkt som har koordinaterna

- a) $(\cos 255^\circ, \sin 255^\circ)$
b) $(\cos (-184^\circ), \sin (-184^\circ))$
c) $(\cos 700^\circ, \sin 700^\circ)$
d) $(\cos 1001^\circ, \sin 1001^\circ)$

5038 Vilken vinkel i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ motsvaras av punkten P på enhetscirkeln om

- a) $P = (0, -1)$
b) $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
c) $P = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
d) $P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5039 Låt v vara en vinkel i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$. Mellan vilka värden varierar

- a) $\cos v$ b) $\sin v$ c) $\tan v$

5040 Rita en enhetscirkel och markera lösningen till ekvationen

- a) $\cos u = -\frac{1}{2}$
b) $\sin v = -\frac{1}{2}$

5041 Lös ekvationerna i övning 5040.

* **5042** Rita en enhetscirkel och markera de vinklar v som uppfyller olikheten

- a) $\cos v > 0,5$ b) $-0,5 < \sin v < 0,5$

** **5043** Lös olikheterna i övning 5042.

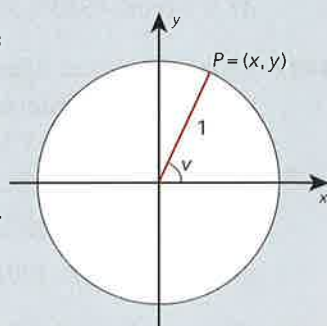


Gruppaktivitet

TRIGONOMETRISKA SAMBAND PÅ ENHETSCIRKELN

I den här aktiviteten ska ni undersöka samband mellan trigonometriska värden i de fyra kvadranterna. Rita en enhetscirkel och markera en punkt $P = (x, y)$.

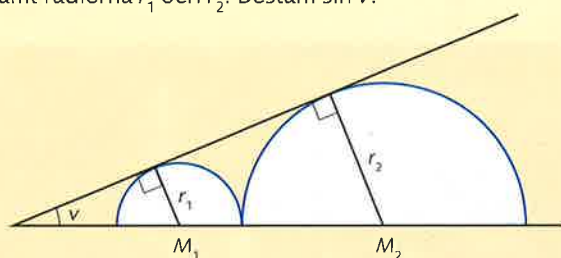
- Vilket är sambandet mellan punktens koordinater och vinkeln v ?
- Markera den punkt Q i andra kvadranten som ni får när punkten P speglas i y -axeln. Bestäm koordinaterna för punkten Q uttryckta i vinkeln v .
- Markera den punkt R i tredje kvadranten som ni får när punkten P speglas i origo. Bestäm koordinaterna för punkten R uttryckta i vinkeln v .
- Markera den punkt S i fjärde kvadranten som ni får när punkten P speglas i x -axeln. Bestäm koordinaterna för punkten S uttryckta i vinkeln v .



1
3
5
6

HALVCIRKLAR I EN VINKEL

Figuren visar två halvcirklar med medelpunkterna M_1 och M_2 samt radierna r_1 och r_2 . Bestäm $\sin v$.



UTMANING

1
3
5
6

Samband mellan trigonometriska värden i de fyra kvadranterna



I Gruppaktiviteten på föregående sida har du bestämt samband mellan koordinater för punkter på enhetscirkeln i de fyra kvadranterna utifrån en given punkt P i första kvadranten.

Spegling av punkten $P = (\cos v, \sin v)$ i första kvadranten i y -axeln ger en punkt Q i andra kvadranten. Punkterna P och Q har samma y -koordinat men motsatt x -koordinat, $Q = (-\cos v, \sin v)$. Eftersom spegling är en kongruensavbildning gäller att koordinaterna för Q kan skrivas som $Q = (\cos(180^\circ - v), \sin(180^\circ - v))$.

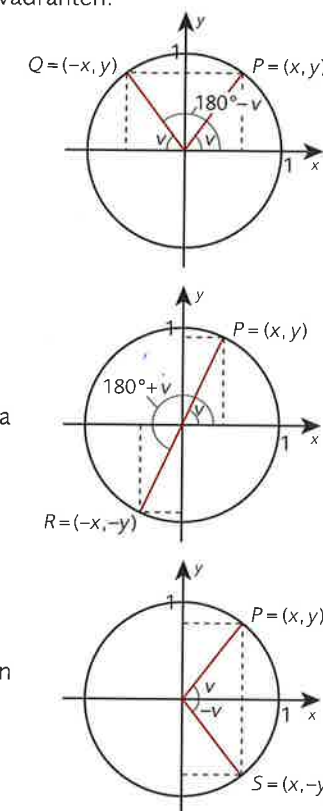
Det ger följande två användbara samband:
 $\cos(180^\circ - v) = -\cos v$ och $\sin(180^\circ - v) = \sin v$

Spegling av punkten $P = (\cos v, \sin v)$ i första kvadranten i origo ger en punkt R i tredje kvadranten. Punkterna P och R har motsatta x - och y -koordinater, $R = (-\cos v, -\sin v)$. Att spegla punkten P i origo är detsamma som att vrida punkten 180° . Alltså kan koordinaterna för punkten R skrivas som $R = (\cos(v + 180^\circ), \sin(v + 180^\circ))$.

Det ger sambanden: $\cos(v + 180^\circ) = -\cos v$ och $\sin(v + 180^\circ) = -\sin v$

Spegling av punkten $P = (\cos v, \sin v)$ i första kvadranten i x -axeln ger en punkt S i fjärde kvadranten. Punkterna P och S har samma x -koordinat men motsatt y -koordinat, $S = (\cos v, -\sin v)$. Att spegla punkten P i x -axeln är detsamma som att vrida punkten $-2v$ grader. Koordinaterna för punkten S är även $S = (\cos(-v), \sin(-v))$.

Det ger sambanden: $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$



TRIGONOMETRISKA SAMBAND

$\sin(90^\circ - v) = \cos v$	$\cos(90^\circ - v) = \sin v$
$\sin(180^\circ - v) = \sin v$	$\cos(180^\circ - v) = -\cos v$
$\sin(-v) = -\sin v$	$\cos(-v) = \cos v$
$\sin(v + 180^\circ) = -\sin v$	$\cos(v + 180^\circ) = -\cos v$
$\sin(v + n \cdot 360^\circ) = \sin v$	$\cos(v + n \cdot 360^\circ) = \cos v$
$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$	$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$

För första kvadranten bestämde vi exakta värden för cosinus, sinus och tangens för vinklarna 30° , 45° och 60° , se tabellen på s. 208. Med hjälp av ovanstående samband kan exakta värden bestämmas för motsvarande samband i de övriga kvadranterna.

Exakta trigonometriska värden i enhetscirkeln

Bestäm exakt $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ för

- a) $v = 120^\circ$ b) $v = 225^\circ$ c) $v = 270^\circ$

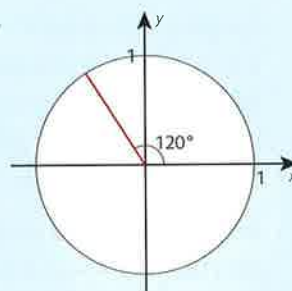
LÖSNING: Börja med att konstatera i vilken kvadrant vinkeln ligger.

- a) 120° är en vinkel i andra kvadranten.

$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

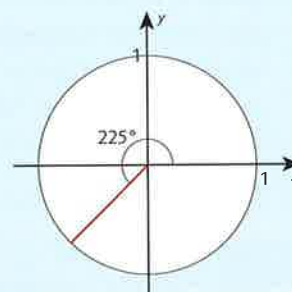


- b) 225° är en vinkel i tredje kvadranten.

$$\cos 225^\circ = \cos (45^\circ + 180^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin (45^\circ + 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{\sin 225^\circ}{\cos 225^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

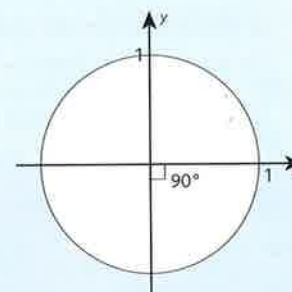


- c) Vinkeln 270° motsvarar en punkt på negativa y-axeln, dvs. en negativ vridning på 90° .

$$\cos 270^\circ = \cos (-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 270^\circ = \sin (-90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$\tan 270^\circ$ är inte definierat eftersom division med noll inte är tillåtet.



SVAR: a) $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

b) $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 225^\circ = 1$

c) $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\tan 270^\circ$ är odefinierat

Bestäm $\cos v$

Bestäm $\cos v$ om $\sin v = 0,6$.

LÖSNING:

För en punkt $P = (\cos v, \sin v)$ på en enhetscirkel gäller att $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$. Då är

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$

Ta roten ur båda led.

$$\cos v = \pm \sqrt{1 - \sin^2 v}$$

Insättning av $\sin v = 0,6$ ger

$$\cos v = \pm \sqrt{1 - 0,36}$$

$$\cos v = \pm \sqrt{0,64}$$

$$\cos v = \pm 0,8$$

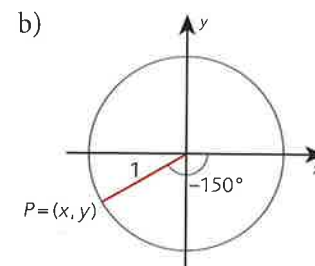
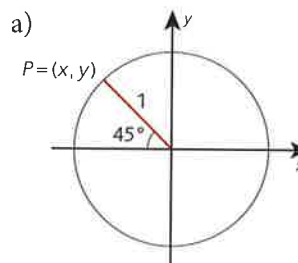
SVAR: $\cos v = 0,8$ eller $\cos v = -0,8$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5044 Uttryck i vinkeln u

- a) $\sin(u + 360^\circ)$ b) $\cos(u + 360^\circ)$
c) $\sin(-u)$ d) $\cos(-u)$
e) $\sin(90^\circ - u)$ f) $\cos(90^\circ - u)$

5045 Bestäm koordinaterna för punkten P på enhetscirkeln, svara exakt.



5046 Bestäm exakt

- a) $\sin 150^\circ$ b) $\cos 240^\circ$
c) $\tan(-30^\circ)$ d) $\cos 495^\circ$
e) $\sin(-540^\circ)$ f) $\tan 180^\circ$

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

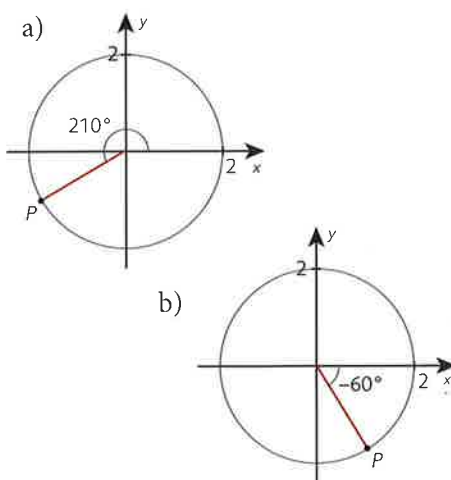
5047 Beräkna

- a) $\sin^2 210^\circ + \cos^2 210^\circ$
b) $\sin^2 210^\circ - \cos^2 210^\circ$

5048 Bestäm $\cos v$ exakt om v är en vinkel i första kvadranten och $\sin v = \frac{3}{4}$.

5049 Bestäm $\sin v$ om $\cos v = -0,8$ och v är en vinkel i andra kvadranten.

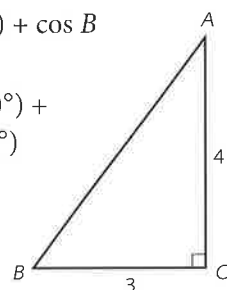
- 5050 Bestäm koordinaterna för punkten P om cirkeln har radien 2.



- * 5051 Förklara hur man kan bestämma exakta värden på $\cos 315^\circ$ och $\sin 315^\circ$. Bestäm även de exakta värdena.

- * 5052 Bestäm med hjälp av den rätvinkliga triangeln ABC

- a) $\sin B + \cos(180^\circ - A)$
 b) $\sin(180^\circ - A) + \cos B$
 c) $\sin(-B) + \sin(B - 180^\circ) + \sin(B + 180^\circ)$
 d) $\sin A + \sin B + \sin C$



- * 5053 Låt $P = (\cos v, \sin v)$ vara en punkt i första kvadranten. Vilka koordinater, uttryckt i vinkeln v , får punkten P om den vrids

- a) 90°
 b) 270°
 c) Formulera generella samband för $\cos(v + 90^\circ)$, $\sin(v + 90^\circ)$, $\cos(v + 270^\circ)$ och $\sin(v + 270^\circ)$ utifrån att $\cos v$ och $\sin v$ är givet.

- * 5054 Förenkla

- a) $\sin(180^\circ - v) + 2 \sin(-v) - \sin(v + 180^\circ)$
 b) $\cos v + \cos(v + 180^\circ) + \cos(v + 360^\circ)$
 c) $\cos(90^\circ - v) + \cos(90^\circ + v)$

- * 5055 Bestäm $\cos v$ exakt om $\sin v = -\frac{1}{3}$.

- ** 5056 Visa att

- a) $\tan(v + 180^\circ) = \tan v$
 b) $\tan(-v) = -\tan v$
 c) $\tan(90^\circ - v) = \frac{1}{\tan v}$
 d) $\tan(90^\circ + v) = -\frac{1}{\tan v}$

- ** 5057 Bestäm $\sin v$ och $\tan v$ exakt om $\cos v = \frac{3}{5}$ och $270^\circ \leq v \leq 360^\circ$.

- ** 5058 Bestäm $\sin v$ exakt då $\tan v = -2\sqrt{2}$ och $90^\circ \leq v \leq 180^\circ$. **T**

- ** 5059 Visa att $\frac{\cos v}{1 - \sin v} + \frac{\cos v}{1 + \sin v} = \frac{2}{\cos v}$ **T**

Trigonometriska ekvationer

I rätvinkliga trianglar kan vi bestämma en av de spetsiga vinklarna, t.ex. vinkel A , genom att lösa någon av ekvationerna

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c} \text{ eller } \tan A = \frac{a}{b}.$$

Genom införandet av enhetscirkeln är vi inte längre begränsade till vinklar i intervallet 0° till 90° utan en trigonometrisk ekvation kan ha oändligt många rötter om vi inte anger vilka vinklar som är tillåtna. I denna kurs kommer vi att begränsa oss till vinklar i intervallet 0° till 180° eftersom vi ska använda trigonometriska ekvationer till att bestämma vinklar i trianglar.

Vi ritar en enhetscirkel och betraktar först grafiskt rötter till trigonometriska ekvationer när $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$. Sedan ska vi även lösa dem algebraiskt.

Ekvationen $\cos v = k$ betyder att vi ska bestämma de vinklar v som uppfyller ekvationen. För att ekvationen ska vara lösbar så måste $|k| \leq 1$. $\cos v$ motsvarar x -koordinaten för punkten P , dvs. ekvationens rot avläses på x -axeln.

Om P är en punkt i första kvadranten så är $0 \leq k \leq 1$ och roten är en vinkel v som uppfyller $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$. Om P är en punkt i andra kvadranten så är $-1 \leq k \leq 0$ och roten är en trubbig vinkel v , $90^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

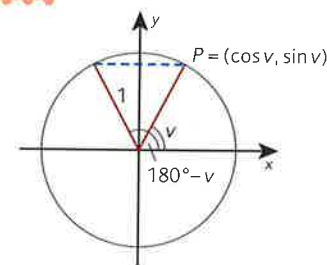
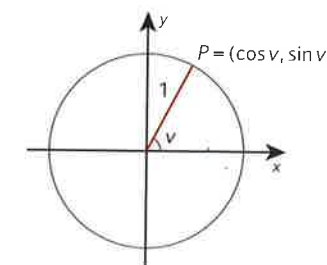
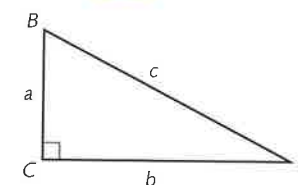
Ekvationen $\cos v = k$, $0 \leq k \leq 1$, har roten $v = v_1$ där $0^\circ \leq v_1 \leq 90^\circ$.

Ekvationen $\cos v = k$, $-1 \leq k \leq 0$, har roten $v = v_2$ där $90^\circ \leq v_2 \leq 180^\circ$.

I ekvationen $\sin v = k$, $|k| \leq 1$, motsvarar $\sin v$ y -koordinaten för punkten P , dvs. ekvationens rot avläses på y -axeln.

Både i första och andra kvadranten gäller att $0 \leq \sin v \leq 1$. Om P är en punkt i första eller andra kvadranten så har ekvationen två rötter, en vinkel v_1 och en vinkel $v_2 = 180^\circ - v_1$.

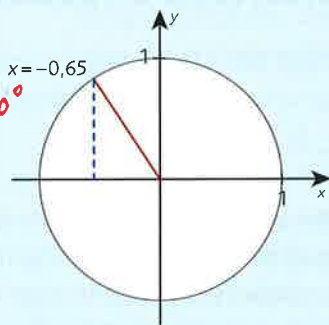
Ekvationen $\sin v = k$, $0 \leq k \leq 1$, har rötterna $v = v_1$ eller $v = 180^\circ - v_1$.



Ekvation av typ $\cos v = \text{konstant}$.

Lös ekvationen $\cos v = -0,65$.

$0^\circ \leq v \leq 180^\circ$



LÖSNING:

Cosinus är negativ i andra kvadranten.

Det ger $v = 131^\circ$

SVAR: $v = 131^\circ$

Ekvation av typ $\sin v = \text{konstant}$

Lös ekvationen $\sin v = 0,5$, $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

LÖSNING:

Sinus är positiv i första och andra kvadranten.

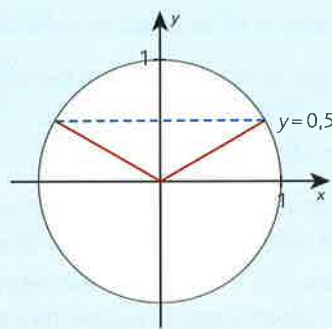
Det ger den allmänna lösningen

$$v_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$v_2 = 180^\circ - 30^\circ + n \cdot 360^\circ = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Men $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ ger $v_1 = 30^\circ$, $v_2 = 150^\circ$.

SVAR: $v_1 = 30^\circ$, $v_2 = 150^\circ$



Lös ekvation

Lös ekvationen $2 \cos 3v = 1$ exakt, $0 \leq v \leq 180^\circ$.

LÖSNING:

$$2 \cos 3v = 1 \quad \text{Dividera i båda led med 2.}$$

$$\cos 3v = \frac{1}{2} \quad \text{Cosinus är positiv i första och fjärde kvadranten. Det ger den allmänna lösningen}$$

$$3v_1 = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad 3v_2 = 300^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$v_1 = 20^\circ + n \cdot 120^\circ \quad v_2 = 100^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Vi undersöker vilka vinklar som uppfyller villkoret $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

$$n = 0 \text{ ger } v_1 = 20^\circ, v_2 = 100^\circ \quad n = 1 \text{ ger } v_1 = 140^\circ$$

Kontroll:

$$v_1 = 20^\circ \text{ ger } VL = 2 \cdot \cos(3 \cdot 20^\circ) = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = HL$$

$$v_2 = 100^\circ \text{ ger } VL = 2 \cdot \cos(3 \cdot 20^\circ) = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = HL$$

$$v_1 = 140^\circ \text{ ger } VL = 2 \cdot \cos(3 \cdot 140^\circ) = 2 \cdot \cos 420^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = HL$$

SVAR: $20^\circ, 100^\circ, 140^\circ$

ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5060 Bestäm de vinklar x , $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, som uppfyller ekvationen.

Svara med en decimal.

a) $\sin x = 0,35$ b) $\cos x = 0,79$

c) $\sin x = -0,18$ d) $\tan x = -0,18$

5061 Lös ekvationerna exakt, $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

a) $\sin v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos v = -\frac{1}{2}$

c) $\tan v = 0$ d) $\tan v = -1$

5062 Lös ekvationerna, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, svara med en decimal.

a) $\cos x = -0,6$ b) $\sin x = 0,25$

c) $\sin x = -1,25$ d) $\tan x = 10$

* **5064** Lös ekvationerna exakt, $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

a) $2 \sin 2v = \sqrt{2}$ b) $2 \cos \frac{2v}{3} = -\sqrt{3}$

* **5065** Låt v vara en vinkel som uppfyller $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$. I vilka kvadranter har

a) $\cos v = k$

b) $\sin v = k$

lösningar för olika värden på k ?

** **5066** Lös ekvationerna exakt för $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

a) $\sin(2x + 40^\circ) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(\frac{x}{2} - 45^\circ) = -1$

** **5067** Undersök om ekvationen $3 \sin x = 1$ har någon rot i intervallet $510^\circ < x < 610^\circ$.

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

* **5063** Lukas har löst ekvationen $\sin v = k$, $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ och svarat med $v = 63^\circ$.

a) Vad har Lukas gjort för fel?

b) Bestäm k .



Ord och begrepp
Koll på avsnittet



UTMANING

PUNKTEN PÅ ENHETSCIRKELN

$P = (x, y)$ är en punkt på enhetscirkeln.

Vad beskriver kvoten $-\frac{x}{y}$?

1
3
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 5.2

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- 1 När gradtalet för vinkel v ökar från 0° till 90° så ändras $\cos v$ från 0 till 1.
- 2 När gradtalet för vinkel v ökar från 0° till 90° så ändras $\tan v$ från 0 till 1.
- 3 I första kvadranten är $\sin v$ större än 0.
- 4 I tredje kvadranten gäller $-1 < \cos v < 0$ och $-1 < \sin v < 0$.
- 5 För alla vinklar v gäller att $|\cos v| < 1$.
- 6 $\sin v = \sin(v - 180^\circ)$
- 7 När en punkt P har vridit sig ett varv utefter enhetscirkeln så har vinkeln ökat med 360° .
- 8 När $\tan v = 1$ så är $v = 225^\circ$.
- 9 En cirkel är alla punkter som ligger på samma avstånd från origo.
- 10 Ekvationen $x^2 + (y - 3)^2 = 5$ beskriver en cirkel med medelpunkten $(0, 3)$ och radie 5.



Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1
3
5
6

5.3 Triangelsatser

En triangel har sex element, tre sidor och tre vinklar. Är triangeln rätvinklig kan vi med hjälp av de trigonometriska begreppen cosinus, sinus och tangens bestämma samtliga element. Spetsvinkliga och trubbvinkliga trianglar kan alltid delas upp i rätvinkliga trianglar genom att konstruera höjder. Men för att bestämma den konstruerade höjdens längd behöver några element i den ursprungliga triangeln vara givna.

Gruppaktivitet

TRIANGELKONSTRUKTION

I den här aktiviteten ska ni undersöka vilka element i en triangel som måste vara givna för att kunna bestämma höjden i en godtycklig triangel.

- Rita en spetsvinklig triangel ABC , låt en sida och en vinkel vara givna. Undersök vilken sida och vilken vinkel som ska vara givna för att en höjd ska kunna bestämmas. Går det att bestämma triangelns övriga element?
- Rita en spetsvinklig triangel och låt två sidor och en vinkel vara givna. Undersök vilka sidor och vilken vinkel som ska vara givna för att en höjd ska kunna bestämmas. Går det att bestämma triangelns övriga element?
- Rita en spetsvinklig triangel och låt en sida och två vinklar vara givna. Undersök vilken sida och vilka vinklar som ska vara givna för att en höjd ska kunna bestämmas. Går det att bestämma triangelns övriga element?
- Rita en spetsvinklig triangel och låt samtliga sidor vara givna. Konstruera en höjd. Undersök om det går att bestämma höjdens längd. Går det att bestämma triangelns övriga element?
- Upprepa de fyra första punkterna för en trubbvinklig triangel.

1
3
5
6

I gruppaktiviteten bör du ha upptäckt vad som behövs för att kunna bestämma samtliga element i en triangel. Det här avsnittet behandlar tre viktiga triangelsatser som är användbara för att bestämma sidor och vinklar i godtyckliga trianglar.

Areasatsen

När basen b och höjden h är givna i en triangel kan vi beräkna arean T med hjälp av formeln $T = \frac{b \cdot h}{2}$

I triangeln ABC är två sidor b och c samt mellanliggande vinkel A givna.

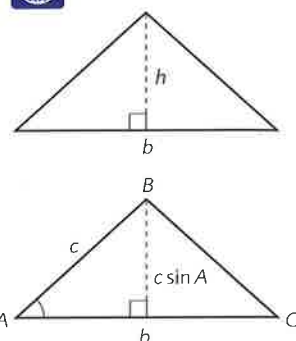
Höjden h från hörnet B är då motstående katet mot vinkeln A och

kan bestämmas genom $\frac{h}{c} = \sin A$ vilket ger $h = c \cdot \sin A$.

Triangelns area T blir då $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$. Triangelns area kan

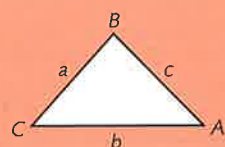
uttryckas på tre olika sätt, beroende på vilka två sidor och mellanliggande vinkel som är givna.

Teorigenomgång



AREASATSEN

$$T = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$



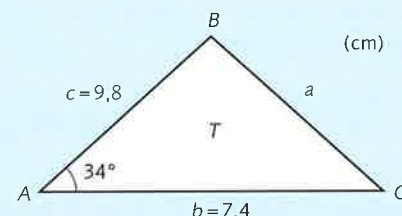
Triangelarea

Bestäm triangelns area.

LÖSNING:

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \text{ ger } T = \frac{7,4 \cdot 9,8 \cdot \sin 34^\circ}{2} \approx 20,3$$

SVAR: Triangelns area är 20 cm²



Vinkelbestämning

Triangeln ABC har arean 25,2 cm². Sidan AB är 7,2 cm och sidan BC är 8,3 cm.

Bestäm den mellanliggande vinkeln.

LÖSNING:

Vi ritar en triangel ABC och markerar de givna sidorna. Vi kan bestämma den mellanliggande vinkeln med hjälp av areasatsen.

$$T = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

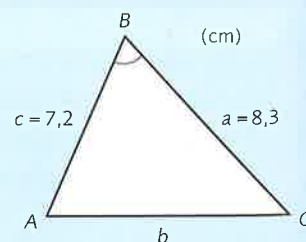
Lös ut $\sin B$.

$$\sin B = \frac{2T}{ac}$$

Sätt in de givna värdena.

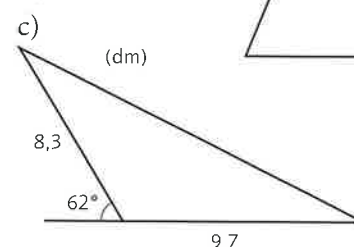
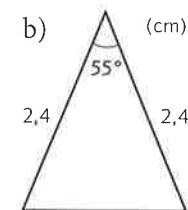
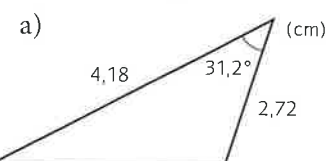
$$\sin B = \frac{2 \cdot 25,2}{8,3 \cdot 7,2}$$

$$\sin B \approx 0,843$$



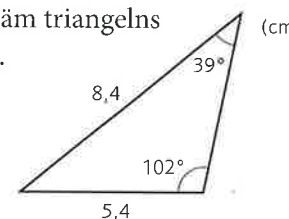
ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

5068 Bestäm triangelns areor



5069 I en triangel ABC är vinkeln $B = 60^\circ$, sidan $a = 35$ m och sidan $c = 22$ m. Bestäm triangelns area.

5070 Bestäm triangelns area.



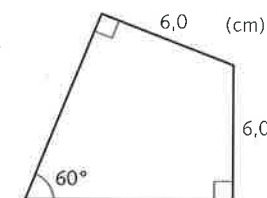
ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5071 En rektangels diagonaler är 14 cm. De skär varandra under 50 graders vinkel. Bestäm rektangelns area.

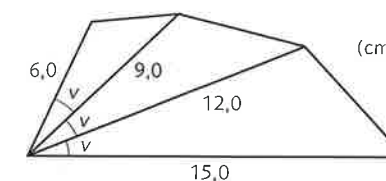
5072 Bestäm arean av en liksidig triangel med höjden 12 cm.

* **5073** I en likbent triangel är de lika stora vinklarna vardera 25°. Längden av mellanliggande sida är 37 cm. Bestäm triangelns area.

* **5074** Bestäm exakt arean av fyrhörningen i figuren. **T**

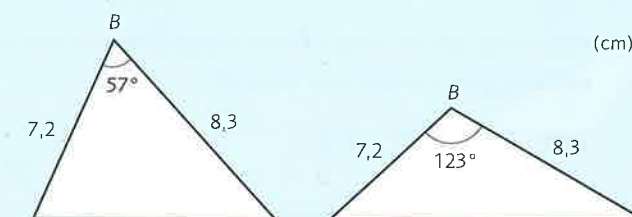


** **5075** Bestäm vinkeln v i femhörningen då dess area är 54 cm².



Tänk på enhetscirkeln! Det finns alltid två vinkelvärden, ett i första kvadranten och ett i andra kvadranten som har $\sin B \approx 0,843$. Med hjälp av räknaren får vi $B \approx 57^\circ$ eller $B \approx 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$

Det innebär att de finns två trianglar, som uppfyller villkoren. Vi ritar de två trianglarna.



SVAR: Den sökta vinkeln är 57° eller 123°.

Sinussatsen



Teorigenomgång

Areasatsen ger tre uttryck för en triangels area beroende på vilka två sidor och mellanliggande vinkel som används.

$$\frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$

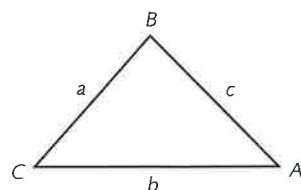
Multiplitera med 2 och dividera med abc .

$$\frac{2bc \sin A}{2abc} = \frac{2ac \sin B}{2abc} = \frac{2ab \sin C}{2abc}$$

Förenkling ger likheterna

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ vilket kallas } \textbf{sinussatsen}.$$

Sinussatsen säger att förhållandet mellan sinus för en vinkel och längden av den mot vinkeln stående sidan i en triangel är konstant.



SINUSSATSEN

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Triangelns vinklar

Bestäm triangelns vinklar.

LÖSNING:

Från figuren har vi $\angle A = 28^\circ$, $a = 34$ mm och $c = 41$ mm.

Sinussatsen säger att $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

Insättning av givna värden ger $\frac{\sin 28^\circ}{34} = \frac{\sin C}{41}$.

$$\sin C = \frac{41 \cdot \sin 28^\circ}{34}$$

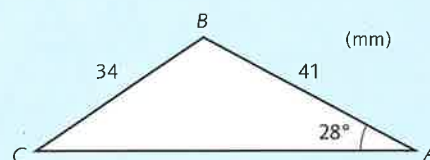
Ekvationen har två rötter.

$$C_1 \approx 34,48^\circ \text{ eller } C_2 \approx 180^\circ - 34,48^\circ = 145,52^\circ.$$

Den tredje vinkeln B blir $B_1 \approx 180^\circ - 28^\circ - 34,48^\circ = 117,52^\circ$ eller

$$B_2 \approx 180^\circ - 28^\circ - 145,52^\circ = 6,48^\circ.$$

SVAR: Triangelns vinklar är 28° , 34° och 118° eller 6° , 28° och 146° .



EXEMPEL

Triangelarea

Bestäm triangelns area.

LÖSNING:

För att bestämma triangelns area måste två sidor och mellanliggande vinkel vara kända. Vi har två sidor men inte

mellanliggande vinkel. Med hjälp av sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

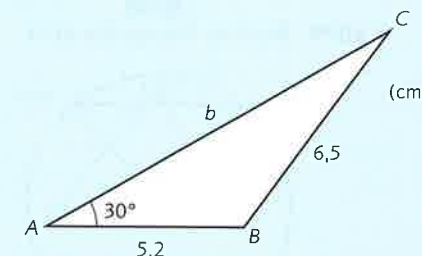
kan vi bestämma vinkel C . Insättning av figurens värden ger $\frac{\sin 30^\circ}{5,2} = \frac{\sin C}{6,5}$.

$$\sin C = \frac{5,2 \cdot \sin 30^\circ}{6,5}, C_1 \approx 23,6^\circ \text{ eller } C_2 \approx 180^\circ - 23,6^\circ = 156,4^\circ$$

Då är $B_1 \approx 180^\circ - 30^\circ - 23,6^\circ = 126,4^\circ$ och triangelns area

$$T = \frac{ac \sin B}{2} \approx \frac{6,5 \cdot 5,2 \cdot \sin 126,4^\circ}{2} \approx 13,6$$

SVAR: Triangelns area är 14 cm^2 .

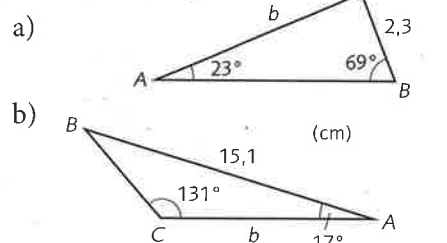


Vilket ger en vinkelsumma större än 180° .

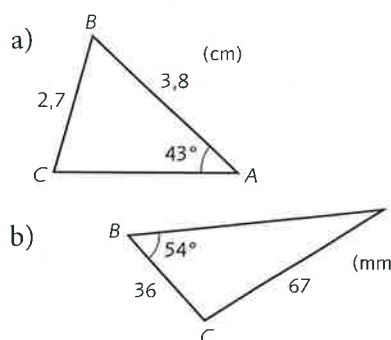
Att bestämma samtliga element i en triangel kallas att **solvera** triangeln.

ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

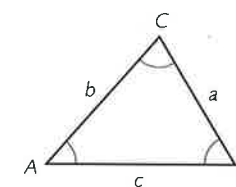
5076 Bestäm sidan b .



5077 Bestäm triangelns vinklar.



5078 ABC är en triangel med vinklarna A , B och C med respektive motstående sida a , b och c .

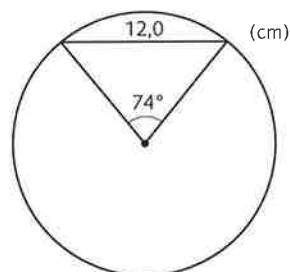


Använd den för följande uppgifter.

- Bestäm B om $a = 4,0$ cm, $b = 3,0$ cm och $A = 45^\circ$.
- Bestäm a om $c = 3,0$ cm, $A = 45^\circ$ och $B = 60^\circ$.
- Bestäm c om $a = 2,0$ cm, $b = 3,0$ cm och $A = 35^\circ$.
- Bestäm b om $a = 2,0$ cm, $B = 40^\circ$ och $C = 70^\circ$.

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5079 Bestäm triangelns area.



5080 I triangeln ABC är $\angle A = 60^\circ$ och $\angle B = 45^\circ$. Bestäm det exakta värdet av kvoten mellan sidorna a och b .

* 5081 Bestäm arean av triangel ABC om sidan $AB = 7,75$ cm, sidan $BC = 9,24$ cm och $\angle A = 52^\circ$.

* 5082 Ett lusthus har formen av en regelbunden åttahörning. Bestäm golvytan om varje kant har längden 0,9 m.



HERONS FORMEL

Arean av en triangel kan bestämmas genom att man känner triangelns sidor. Arean är $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ där a , b och c är triangelns sidor och p är triangelns halva omkrets. Härled formeln.

UTMANING

1
3
5
6

** 5083 I triangeln ABC är $a = 1$ och $b = 2$. Vilka värden kan vinkeln A anta?

L

** 5084 Martin har köpt en villa. Efter ett idogt regnande märker han att det samlas mycket vatten framför entrén till huset. Han vet att grusgången från gatan till huset lutar nedåt och han vill åtgärda det genom att fylla på grus så att gången istället lutar något uppåt från gatan. Martin tar reda på att nuvarande lutning är $1,5^\circ$ nedåt. Den vill han ändra på till $0,5^\circ$ uppåt. Gången är 6,9 m lång och 1,1 m bred. Hur många m^3 grus behöver Martin fylla på med? L

Mer om sinussatsen



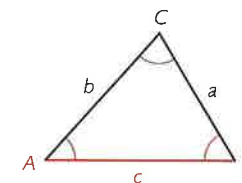
Teorigenomgång

Sinussatsen kan användas när följande är givet i en triangel:

Två vinklar och mellanliggande sida

Vinklarna A och B samt mellanliggande sida c är kända. Den tredje vinkeln C kan bestämmas ur $C = 180^\circ - A - B$.

$$\text{Sidan } b \text{ fås genom } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

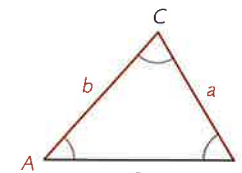


Två sidor och den ena sidans motstående vinkel

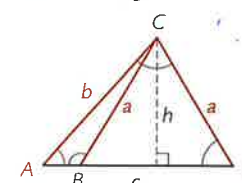
Sidorna a och b samt vinkeln A är kända.

$$\text{Vinkeln } B \text{ fås genom } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

Den ekvationen har två rötter eftersom $\sin v = \sin(180^\circ - v)$.



Låt $\angle A < 90^\circ$ i triangeln ABC . Dra höjden h från hörnet C . Höjden kan bestämmas genom $h = b \cdot \sin A$. Jämför värdet på h med sidorna a och b . Om $h < a < b$ kan vi konstruera två trianglar.

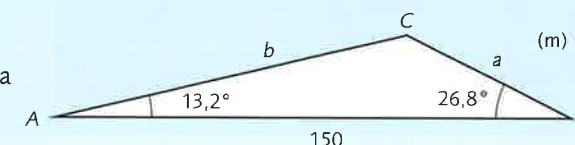


Solvera triangel

I en triangel är två vinklar $13,2^\circ$ respektive $26,8^\circ$ samt mellanliggande sida 150 m. Solvera triangeln.

LÖSNING:

Vi börjar med att rita triangeln och markera det som är givet.



$\angle C = 180^\circ - 13,2^\circ - 26,8^\circ = 140^\circ$. Sidorna a och b kan bestämmas med hjälp av likheterna

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow a = \frac{c \sin A}{\sin C} \text{ och } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

$$\text{Insättning av } A = 13,2^\circ, C = 140^\circ \text{ och } c = 150 \text{ m ger } a = \frac{150 \cdot \sin 13,2^\circ}{\sin 140^\circ} \approx 53,3$$

$$\text{Insättning av } B = 26,8^\circ, C = 140^\circ \text{ och } c = 150 \text{ m ger } b = \frac{150 \cdot \sin 26,8^\circ}{\sin 140^\circ} \approx 105,2$$

SVAR: Triangeln har sidorna 53,3 m, 105 m och 150 m samt vinklarna $13,2^\circ$, $26,8^\circ$ och 140° .

Bestäm okänd sida i en triangel

I triangeln ABC är sidan $BC = 5,00$ cm, $AC = 10,0$ cm och $\angle A = 28,3^\circ$. Bestäm sidan AB .

LÖSNING:

Vi ritar en bild av triangeln ABC och markerar det som är givet.

Vi drar höjden h från hörnet C mot sidan AB och beräknar dess längd för att avgöra antalet rötter.

$$\sin 28,3^\circ = \frac{h}{10,0} \text{ ger } h = 10,0 \cdot \sin 28,3^\circ \approx 4,74$$

Eftersom $h < a < b$ så finns det två rötter.

$$\text{Sinussatsen } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \text{ ger } \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

$$\sin B = \frac{10,0 \cdot \sin 28,3^\circ}{5,00} \approx 0,9482$$

Räknaren ger $\angle B_1 \approx 71,47^\circ$ eller $\angle B_2 \approx 180^\circ - 71,47^\circ = 108,53^\circ$

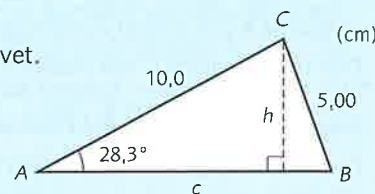
$$\text{Då är } \angle C_1 \approx 180^\circ - 28,3^\circ - 71,47^\circ = 80,23^\circ. \text{ Sinussatsen } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \text{ ger } c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$$

$$\text{Insättning av värden ger } c_1 = \frac{5,00 \sin 80,23^\circ}{\sin 28,3^\circ} \approx 10,4$$

$$\angle C_2 \approx 180^\circ - 28,3^\circ - 108,53^\circ = 43,17^\circ. \text{ Sinussatsen } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \text{ ger } c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$$

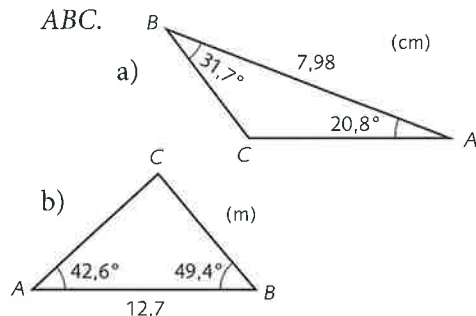
$$\text{Insättning av värden ger } c_2 = \frac{5,00 \sin 43,17^\circ}{\sin 28,3^\circ} \approx 7,22$$

SVAR: Sidan AB är 7,22 cm eller 10,4 cm.

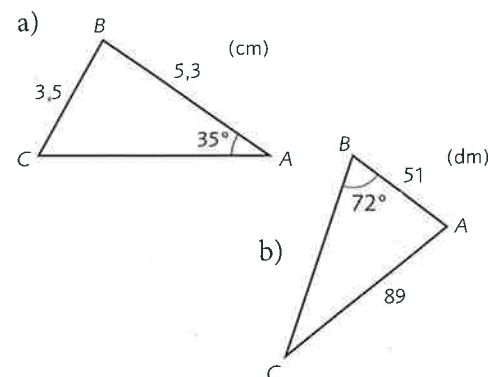


ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

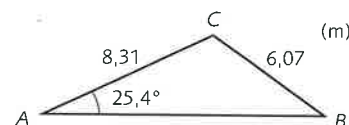
5085 Bestäm de okända sidorna i triangel ABC.



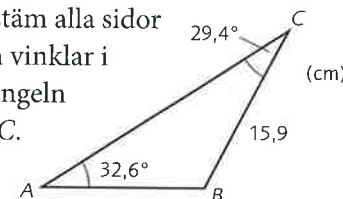
5086 Bestäm triangelns tredje sida.



5087 Solvera triangeln ABC.

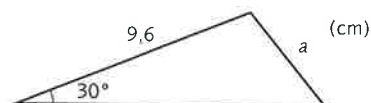


5088 Bestäm alla sidor och vinklar i triangeln ABC.



5089 Bestäm den tredje sidan i den avbildade triangeln om a är

- a) 4,5 cm b) 4,8 cm
c) 9,0 cm d) 9,8 cm



ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

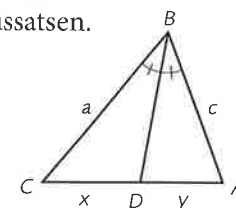
* **5090** I en triangel är två vinklar $65,4^\circ$ respektive $62,3^\circ$. Triangelns kortaste sida är 35,4 m. Hur lång är dess längsta sida?

* **5091** Bestäm samtliga sidor och vinklar i triangeln ABC om $\angle A = 48^\circ$, sidan $BC = 17$ cm och sidan $AC = 20$ cm.

* **5092** Lisa och Mark vill bestämma bredden på en å. De stegar upp en sträcka på 41 m utefter den ena åkanten. På åns motsatta sida finns ett högt träd. Från den ena änden av den uppstegade sträckan uppskattar de vinkeln till trädet till 41° och från den andra änden uppskattar de vinkeln till trädet till 38° . Hur bred är ån?

** **5093** I triangeln ABC dras höjden h från hörnet C mot sidan AB. Visa att höjden kan uttryckas $h = \frac{c \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin(A+B)}$.

** **5094** I triangeln ABC är BD en bisektris. Visa bisektrissatsen $\frac{x}{y} = \frac{a}{c}$ med hjälp av sinussatsen.



Cosinussatsen

Det finns två fall där sinussatsen inte är användbar för att lösa triangeln. Det är när

Två sidor och mellanliggande vinkel är givna

För att kunna använda sinussatsen måste den kända vinkeln stå mot en känd sida.

Tre sidor är givna

För att kunna bestämma en vinkel i en triangel där tre sidor är givna behövs en sats som beskriver ett samband mellan sidorna och en vinkel. Den sats som är användbar är **cosinussatsen**.

COSINUSSATSEN

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

BEVIS: Vi genomför beviset för satsen när triangeln ABC är spetsvinklig.

Vi drar en höjd h från hörnet B . Den träffar sidan AC i punkten D och delar triangeln ABC i två rätvinkliga trianglar CBD och DAB . Beteckna CD i triangeln CDB med x . Då får DA i triangeln DAB beteckningen $b-x$. Pythagoras på respektive rätvinklig triangel ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + (b-x)^2 \\ a^2 = h^2 + x^2 \end{cases}$$

Andra kvadreringsregeln på den första ekvationen ger

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ a^2 = h^2 + x^2 \end{cases}$$

Ledvis subtraktion av ekvationerna ger

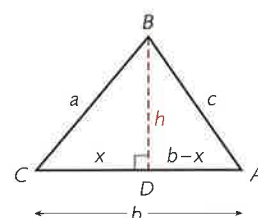
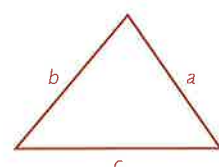
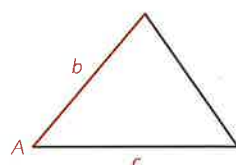
$$c^2 - a^2 = b^2 - 2bx$$

Från triangeln CDB får vi $\frac{x}{a} = \cos C \Leftrightarrow x = a \cos C$

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2ba \cdot \cos C \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



Teorigenomgång



COSINUSSATSEN

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Solva triangel II

Bestäm triangelns övriga element.

LÖSNING: Med hjälp av cosinussatsen kan vi bestämma sidan BC , som vi betecknar med a .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Insättning av givna värden ger

$$a^2 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos 50^\circ$$

Det är bara den positiva roten som är intressant.

$$a = \sqrt{61 - 60 \cos 50^\circ} \approx 4,74$$

Vi kan utnyttja cosinussatsen ytterligare en gång, nu för att bestämma en vinkel, t.ex. $\angle B$.

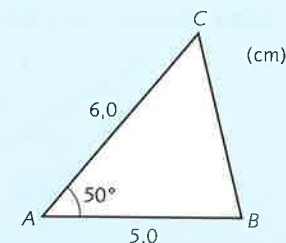
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{4,74^2 + 25 - 36}{2 \cdot 4,74 \cdot 5} \approx 0,242$$

$$\angle B \approx 76^\circ$$

$$\angle C \approx 180^\circ - 50^\circ - 76^\circ = 54^\circ$$

SVAR: Triangelns vinklar är 50° , 54° och 76° . De mot respektive vinkel stående sidorna har längderna 4,7 cm, 5,0 cm och 6,0 cm.



En triangelns vinklar

I en triangel ABC har sidorna längderna 8,0 cm, 7,0 cm och 4,0 cm. Bestäm triangelns vinklar.

LÖSNING: Vi ritat en triangel och markerar sidornas längder. Den största vinkeln står mot den längsta sidan. Vi börjar med den och använder cosinussatsen.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Lös ut $\cos C$.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Sätt in värdena på sidorna.

$$\cos C = \frac{16 + 49 - 64}{56} = \frac{1}{56}$$

$\cos C$ har en rot för vinklar i intervallet 0° till 180° .

$$\angle C \approx 89^\circ$$

När vi ska bestämma nästa vinkel kan vi antingen använda cosinussatsen eller sinussatsen.

Vi väljer att bestämma vinkel B med cosinussatsen. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

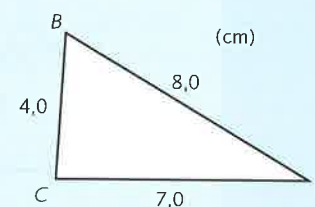
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{16 + 64 - 49}{64} = \frac{31}{64}$$

$$\angle B \approx 61^\circ$$

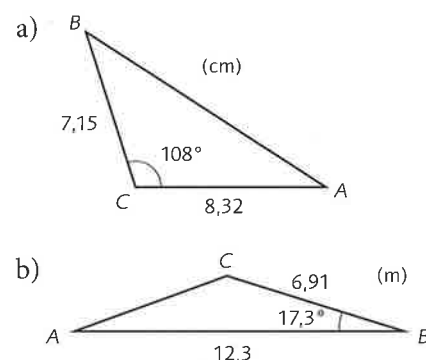
$$\angle A \approx 180^\circ - 89^\circ - 61^\circ = 30^\circ$$

SVAR: Triangelns vinklar är 30° , 61° och 89° .

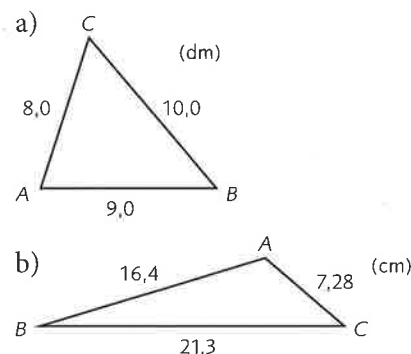


ÖVA I • BEGREPP OCH PROCEDUR

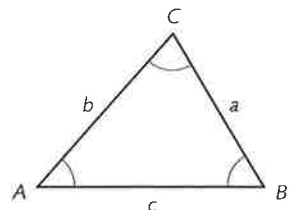
5095 Bestäm den okända sidan.



5096 Bestäm vinklarna i triangel ABC.



* 5097 En triangel enligt figuren är given.



Använd den för följande uppgifter.

- Bestäm A om $a = b = 20$ cm och $c = 30$ cm.
- Bestäm c om $a = 20$ cm, $b = 30$ cm och $\angle C = 35^\circ$.
- Bestäm B om $a = 14$ cm, $b = 18$ cm och $\angle C = 45^\circ$.
- Bestäm a om $b = c = 34$ cm och $\angle A = 34^\circ$.

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5098 Bestäm samtliga vinklar i en triangel ABC om $a = 12$ m, $b = 7,8$ m och $c = 10$ m.

5099 I en parallelogram är sidorna 3,5 m och 4,6 m. En vinkel är $50,2^\circ$. Bestäm

- diagonalernas längder
- parallelogrammens area

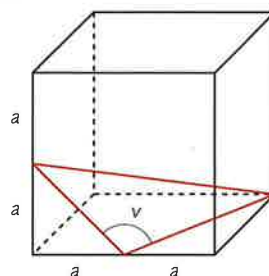
5100 Hur förändras cosinussatsen om vinkeln C är rät?

* 5101 Albert går 2 km utefter en rak väg. Därefter vrider sig vägen 46° . Albert fortsätter i den nya riktningen ytterligare 1,4 km rakt framåt. På hemvägen tar han en genväg rakt mot utgångspunkten. Hur mycket kortare blev hans väg tillbaka?

* 5102 Två krafter $F_1 = 25$ N och $F_2 = 40$ N har samma utgångspunkt. Vinkeln mellan deras riktningar är 70° . Bestäm resultantens storlek och riktning.

* 5103 Genomför beviset för cosinussatsen om triangeln är trubbvinklig.

** 5104 Bestäm den markerade vinkeln i kuben.



Ord och begrepp
Koll på avsnittet

UTMANING

TVÅ PUNKTER PÅ EN ENHETSCIRKEL

Låt $P = (\cos u, \sin u)$ och $Q = (\cos v, \sin v)$ vara två punkter på enhetscirkel. Härled ett uttryck för $\cos(u - v)$ genom att bestämma längden av PQ på två olika sätt.

1
2
3
5
6

REFLEKTERA OCH DISKUTERA 5.3

Avgör för varje påstående om det är *sant*, *falskt* eller *sant om* (sant under vissa förutsättningar). Motivera svaren med ord eller beräkningar där det är möjligt.

- Om två vinklar och mellanliggande sida är givna kan arean av en triangel beräknas med areasatsen.
- Sinussatsen säger att i varje triangel är längden av en sida direkt proportionell mot motstående vinkel.
- Om man känner två sidor och en vinkel i en triangel kan sinussatsen alltid användas.
- Om man känner två sidor och en vinkel i en triangel kan cosinussatsen alltid användas.
- Om tre sidor i en triangel är givna kan samtliga vinklar bestämmas med cosinussatsen.
- Pythagoras sats är ett specialfall av cosinussatsen.

Svar med motiveringar finns på lärarwebben.

1
2
3
5
6

5.4 Problemlösning

I det här avsnittet kommer du att möta uppgifter där du bland annat får användning för dina hittills förvärvade kunskaper i trigonometri. Du får också möjlighet att utveckla samtliga förmågor. När det gäller problemlösning kan du behöva använda olika strategier.

- Vad är givet och vad efterfrågas är det första som du måste formulera.
- Har du sett något liknande problem?
- Går det att förenkla problemet?
- Kan jag finna ett mönster?
- Behöver jag rita en figur?
- Vilka matematiska redskap behöver jag använda?
- Kan jag ställa upp ekvationer?

När du väl har bestämt dig för en lösningsmetod håll då fokus på vad som efterfrågas. Glöm inte att din lösning ska vara förstålig för en utomstående som inte är insatt i problemet.

ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

5105 I triangeln ABC är $\angle C = 90^\circ$. Bestäm $\sin B$, $\cos A$ och $\tan B$ om $\sin A = \frac{7}{25}$.

5106 Niklas använder sin skugga för att beräkna solens höjd över horisonten. Hur högt över horisonten står solen om skuggan är ungefär sju gånger Niklas längd?

* **5107** I triangel ABC är $\angle C = 90^\circ$. Man drar två medianer, en från hörnet A och en från hörnet B . Bestäm $\angle A$ och $\angle B$ om medianernas längder är 5 l.e. respektive $\sqrt{40}$ l.e.

* **5108** I triangeln ABC är sidan AB dubbelt så lång som sidan BC . Bestäm $\angle A$ om $\angle C = 67,8^\circ$.

* **5109** Från en luftballong som befinner sig 560 m upp i luften ser man rakt framför sig en långsmal sjö. Hur lång är sjön om den ena ändpunkten syns under $7,5^\circ$ och den andra ändpunkten under $21,9^\circ$ relativt en lodrät linje rakt ner?



* **5110** $A = (-2, 3)$ och $B = (2, -3)$ är två punkter på en cirkel. Bestäm cirkelns ekvation om AB är en diameter.

* **5111** Den räta linjen $y = 2 - x$ skär cirkeln $x^2 + y^2 = 34$ i två punkter A och B . Bestäm längden av kordan AB .

* **5112** Den räta linjen $y = x - 4$ skär cirkeln $x^2 + y^2 = 40$ i två punkter C och D . Bestäm skärningspunkten P mellan tangenterna till cirkeln i punkten C respektive punkten D . **L**

* **5113** Förenkla $\cos^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \tan x + \sin^2 x$

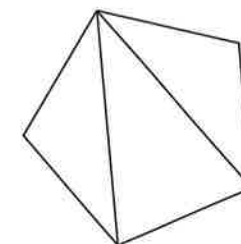
* **5114** Beräkna summan $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ$.

* **5115** Bestäm vinkeln mellan vektorerna $u = (2, 1)$ och $v = (1, 5)$. **T**

* **5116** Sök förhållandet mellan den kortaste och den längsta diagonalen i en regelbunden tiohörning. **L**

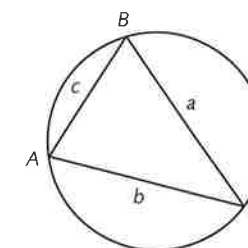
** **5117** Bestäm utan räknare värdet av uttrycket $\frac{5}{\tan^2 A} + \frac{7}{\cos^2 B}$ om $\cos A = -\frac{2}{3}$ och $\sin B = \frac{3}{4}$ och $\tan B < 0$.

** **5118** I den regelbundna femhörningen har diagonalerna dragits från ett hörn, varvid femhörningen delas i tre trianglar. Bestäm förhållandet mellan areorna av två närliggande trianglar.



** **5119** En triangel har sina hörn i punkterna $(-2, -4)$, $(-1, 3)$ och $(2, 4)$. Bestäm ekvationen för den omskrivna cirkeln. **L**

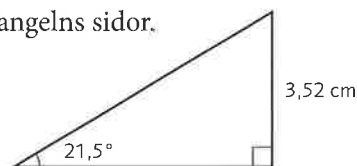
** **5120** Triangeln ABC är inskriven i en cirkel med radien R .



- a) Visa att $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- b) Visa att $R = \frac{abc}{4T}$ där T är triangelns area.

5.1 TRIGONOMETRISKA GRUNDBEGREPP

- 1 Bestäm triangelns sidor.



- 2 I en rätvinklig triangel är hypotenusan 84,0 cm och en vinkel 60° . Bestäm de övriga sidornas längder exakt.

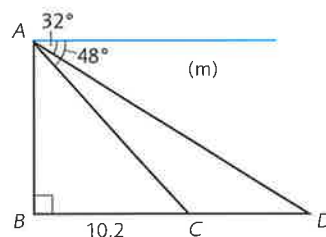
- 3 Bestäm de spetsiga vinklar som uppfyller

a) $\sin v = 0,76$ b) $\cos(90^\circ - v) = 0,34$ c) $\tan \frac{3v}{2} = 1$

- 4 Visa med hjälp av en halv liksidig triangel de exakta värdena för $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ om

a) $v = 30^\circ$ b) $v = 60^\circ$

- 5 Använd figuren för att bestämma längden av hypotenusorna AC respektive AD om längden av sträckan BC är 10,2 m.



- 6 I en rätvinklig triangel är förhållandet mellan kateterna 2:3. Bestäm förhållandet mellan triangelns spetsiga vinklar.

- 7 Kraften $F = 100$ N ska delas upp i två vinkelräta komponenter F_1 och F_2 . Vinkeln mellan den ena komponenten och kraften F är 28° . Bestäm storleken av F_1 och F_2 .

- 8 a) Illustrera ekvationen $\sqrt{8} \sin v = 2$ med en rätvinklig triangel.
b) Lös ekvationen.

5.2 CIRKELNS EKVATION OCH ENHETSCIRKELN

- 1 Bestäm ekvationen för en cirkel med

- a) medelpunkt i origo och radie 5.
b) medelpunkt i $(0, 3)$ och radie $\sqrt{5}$.
c) medelpunkt i $(-1, 1)$ och radie 4.

- 2 Bestäm medelpunkt och radie för en cirkel med ekvationen

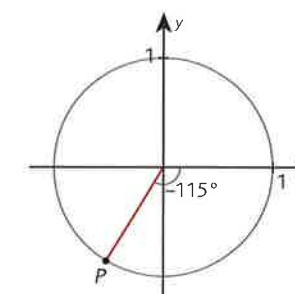
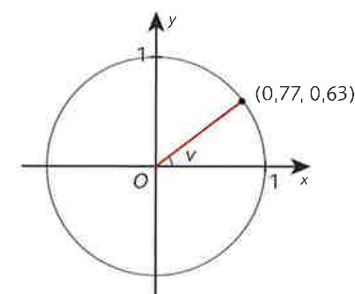
a) $x^2 = 49 - y^2$ b) $3x^2 + 3y^2 = 6$ c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$

- 3 Bestäm exakt

a) $\sin 480^\circ$ b) $\cos(-120^\circ)$ c) $\tan 585^\circ$

- 4 Bestäm

- a) $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ b) koordinaterna för punkten P



- 5 Lös ekvationerna

a) $\sin v = 0,352$, $0^\circ \leq v < 180^\circ$
b) $\cos 2v = -0,652$, $0^\circ \leq v < 180^\circ$

- 6 Bestäm de exakta värdena för $\cos v$ och $\tan v$ om $\sin v = -\frac{4}{5}$ och vinkeln v ligger i fjärde kvadranten.

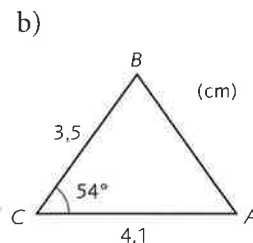
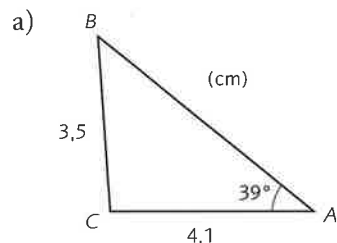
- 7 Förenkla

a) $\sin v + \sin(180^\circ - v) - \sin(-v)$
b) $\cos(90^\circ - v) + \sin(v + 180^\circ) + \sin(90^\circ - v) + \cos(180^\circ - v)$

- 8 Bestäm ekvationen för tangenten till enhetscirkeln i punkten $P = (\cos 330^\circ, \sin 330^\circ)$.

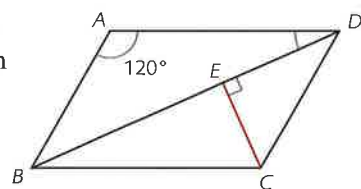
5.3 TRIANGELSATSER

- 1 Bestäm sidan AB i triangeln ABC .



- 2 Bestäm arean av triangeln ABC om sidan $AC = 140$ m, $BC = 211$ m och $\angle C = 63^\circ$.
- 3 En triangelns sidor är 7,0 cm, 9,0 cm och 13,0 cm. Bestäm triangelns vinklar.
- 4 I triangeln ABC är $b = 6,0$ dm, $A = 50^\circ$ och $B = 70^\circ$. Bestäm triangelns
- a) övriga sidor b) area
- 5 I triangeln ABC är $b = 8,0$ m, $c = 6,0$ m och triangelns area 17 m². Bestäm triangelns vinklar.
- 6 För att bestämma avståndet från en punkt A till en punkt B i svårtillgänglig terräng uppmättes från A sträckan AC till 120 m. Vinklarna CAB och ACB bestämdes till $30,5^\circ$ och $63,5^\circ$. Bestäm avståndet från A till B .

- 7 $ABCD$ är en parallelogram. Sidan AB har längden 14 cm och diagonalen BD längden 16 cm. Sträckan CE är vinkelrät mot diagonalen BD . Bestäm



- a) $\angle ADE$
- b) arean av $\triangle ABD$
- c) längden av sträckan CE .
- 8 I en triangel är den längsta sidan 41,5 cm. Två av triangelns vinklar är 32° och 68° . Beräkna triangelns övriga sidor.

Blandade övningar

ÖVA 1 • BEGREPP OCH PROCEDUR

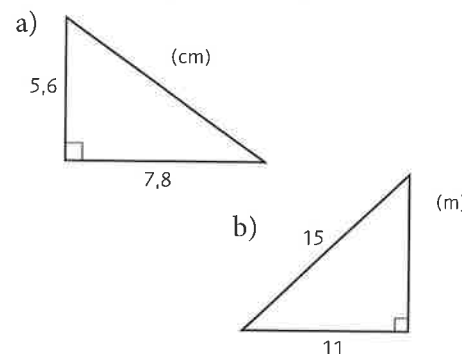
- 1 Bestäm

- a) $\cos 156^\circ$ b) $\sin 564^\circ$
c) $\tan(-400^\circ)$ d) $\cos(-70^\circ)$

- 2 Rita en rätvinklig triangel som uppfyller ekvationen $\cos v = \frac{3}{5}$.

- 3 a) Vilken vinkel v mellan 0° och 360° motsvarar vinkeln 520° ?
b) Beräkna $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$.

- 4 Bestäm triangelns spetsiga vinklar



- 5 Beräkna exakt utan räknare

- a) $\sin(2 \cdot 60^\circ)$
b) $2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$
c) $\cos 150^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$

- 6 I vilken kvadrant ligger följande punkter

- a) $(\cos 123^\circ, \sin 123^\circ)$
b) $(\cos 512^\circ, \sin 512^\circ)$
c) $(\cos(-105^\circ), \sin(-105^\circ))$

- 7 Bestäm ekvationen för en cirkel med

- a) medelpunkt i origo och radie 2,2.
b) medelpunkt i $(-2, 2)$ och radie 0,8.

- 8 Beskriv läget av följande punkter i förhållande till enhetscirkeln.

- a) $A = (0,5, 0,8)$
b) $B = (\cos(-30^\circ), \sin(-30^\circ))$
c) $C = (-1,0, 0,5)$

- 9 Bestäm medelpunkt och radie för en cirkel med ekvationen

- a) $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 144$
b) $y^2 = 81 - x^2$

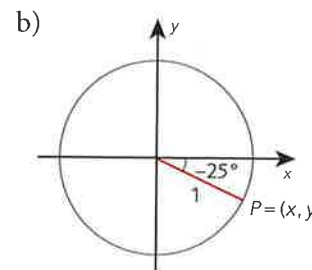
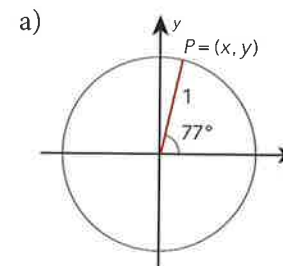
- 10 Ange de vinklar v i intervallet $0^\circ \leq v < 360^\circ$ för vilka

- a) $\sin v = \sin 45^\circ$
b) $\cos v = \cos 45^\circ$
c) $\sin v = -\sin 45^\circ$

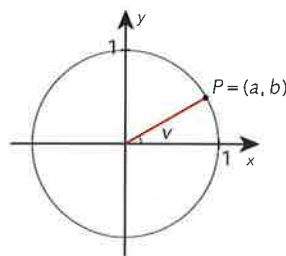
- 11 $\sin v = 0,4$. Bestäm det exakta värdet av

- a) $\sin(-v)$ b) $\sin(180^\circ - v)$
c) $\sin(v + 360^\circ)$ d) $\cos v$

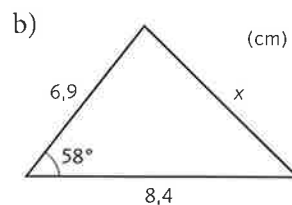
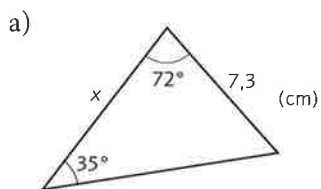
- 12 Bestäm koordinaterna för punkten P på enhetscirkeln, svara exakt.



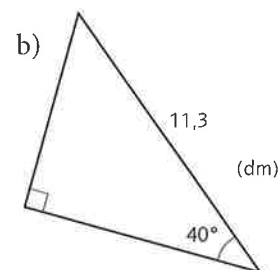
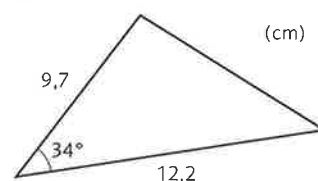
- 13 Punkten P på en enhetscirkel har koordinaterna (a, b) . Rita av figuren. Markera vinkeln $\nu + 180^\circ$ och $\nu + 270^\circ$. Uttryck med hjälp av P 's koordinater
- a) $\sin(\nu + 180^\circ)$ b) $\cos(\nu + 270^\circ)$
- (NP Ma D vt 97)



- 14 Bestäm de övriga elementen i en rätvinklig triangel då
- a) en vinkel är 24° och hypotenusan är 7,3 cm.
- b) en katet är 13,2 cm och hypotenusan är 20,3 cm.
- c) en vinkel är 15° och motstående katet är 5,7 cm.
- 15 Beräkna den med x markerade sidan.



- 16 Beräkna triangelns area.
- a)



ÖVA II • FLERA FÖRMÅGOR

- 17 En talls skugga uppmäts till 26 m då solen står 21° över horisonten. Hur hög är tallen?
- 18 Ordna följande tal i storleksordning: $a = \sin 24^\circ$, $b = \cos 100^\circ$, $c = \sin 165^\circ$. Motivera ditt svar. (NP Ma D vt 05)
- 19 I en triangel är två vinklar $18,4^\circ$ och $31,4^\circ$ samt mellanliggande sida 25,4 cm. Beräkna triangelns övriga sidor.
- 20 Sidorna i en parallelogram är 4,5 cm och 9,0 cm. En vinkel i parallelogrammen är 58° . Bestäm diagonalernas längder.
- 21 Bestäm övriga element i triangeln ABC om $\angle A = 41^\circ$, sidan $BC = 3,2$ cm och sidan $AC = 4,3$ cm.

- 22 Förenkla så långt som möjligt uttrycket
- a) $\frac{\sin(90^\circ - \nu)}{\cos(-\nu)}$
- b) $\sin(180^\circ + \nu) + \sin(180^\circ - \nu)$
- c) $\cos(180^\circ - \nu) + \cos(180^\circ + \nu)$
- d) $(1 - \cos \nu)(1 + \cos \nu)$
- 23 Beräkna längden av en av diagonalerna i en regelbunden femhörning med sidan 3,4 m.

- * 24 Några ungdomar satt på en sten S på en strand och tittade på en brygga $\ddot{O}$ på en ö ute i viken. De beslöt att utnyttja sina matematiska kunskaper för att beräkna avståndet mellan stenen och bryggan. De mätte därför upp en sträcka SP längs stranden till 100 m. Sedan uppskattade de vinklarna $SP\ddot{O}$ och $PS\ddot{O}$ till 30° respektive 135° med hjälp av en kompass. Vilket resultat bör de ha kommit fram till? (NP Ma D vt 97)



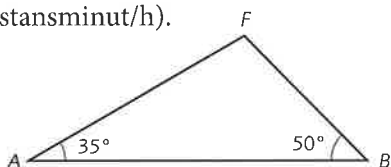
- * 25 I en triangel förhåller sig två av sidorna som 5:8. Den mellanliggande vinkeln är 35° . Bestäm triangelns övriga vinklar.

- * 26 A , B och C är vinklar i en triangel. Visa följande samband:

- $\sin(A + B) = \sin C$
- $\cos(A + B) = -\cos C$
- $\tan(A + B) = -\tan C$
- $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$

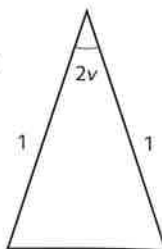
- * 27 En cirkel går genom punkterna $(1, -8)$, $(-3, -6)$ och $(5, 2)$. Bestäm en ekvation för cirkeln.

- ** 28 Klockan 18 befinner sig ett fartyg i position A på avståndet 6,0 distansminuter från fyren F . 90 minuter senare befinner sig fartyget i position B . Bestäm fartygets hastighet i knop. (1 knop = 1 distansminut/h).

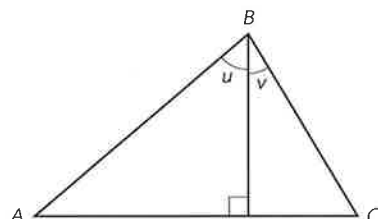


- ** 29 Bestäm ekvationen för den tangent till cirkeln $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ som går genom punkten $(1, -2)$.

- ** 30 Visa med hjälp av triangeln formeln $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$.



- ** 31 Visa med hjälp av triangeln ABC formeln $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.



OMFATTANDE PROBLEM

- 32 En cirkel har medelpunkten i (x_0, y_0) och radie r .

- Skriv upp ekvationen för cirkeln.
- Visa att ekvationen kan omvandlas till $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ och förklara vad värdena hos koefficienterna a , b och c har för betydelse för cirkelns position och storlek.
- Du ska nu undersöka om ekvationen $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ alltid representerar en cirkel.
 - Du kan börja med att välja $a = 0$ och $b = 0$ och undersöka grafen för olika värden på c .
 - Välj några andra värden på a och b och undersök grafen för olika värden på c .
 - Formulera en slutsats.



Kapitelprov

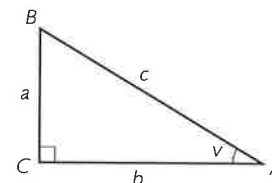
SAMMANFATTNING

Rätvinklig triangel:

$$\cos v = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$$

$$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c}$$

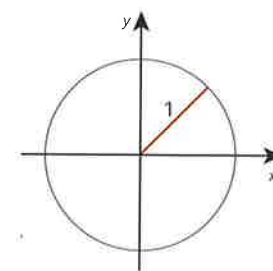
$$\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{a}{b}$$



Enhetscirkelns ekvation: $x^2 + y^2 = 1$

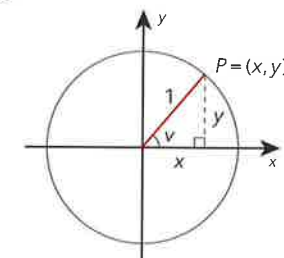
Ekvationen för en cirkel med medelpunkten i (a, b) och radie r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



För en punkt $P = (x, y)$ på enhetscirkeln gäller:

$$\cos v = \frac{x}{1} = x \quad \sin v = \frac{y}{1} = y \quad \tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}$$



Trigonometriska samband:

$\sin(90^\circ - v) = \cos v$	$\cos(90^\circ - v) = \sin v$
$\sin(180^\circ - v) = \sin v$	$\cos(180^\circ - v) = -\cos v$
$\sin(-v) = -\sin v$	$\cos(-v) = \cos v$
$\sin(v + 180^\circ) = -\sin v$	$\cos(v + 180^\circ) = -\cos v$
$\sin(v + n \cdot 360^\circ) = \sin v$	$\cos(v + n \cdot 360^\circ) = \cos v$
$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$	$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$

$$\text{Areasatsen: } T = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$\text{Sinussatsen: } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\text{Cosinussatsen: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Exakta trigonometriska värden:

v	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0