

Innehåll

1. Trigonometri och formler 6

Centralt innehåll 6

Inledande aktivitet: Trianglar och cirklar 7

1.1 Trigonometri och trianglar 8

Enhetscirkeln och trianglar 8

Aktivitet: Undersök – Enhetscirkeln och symmetrier 11

1.2 Trigonometriska formler 12

Enhetscirkeln och formler 12

Trigonometriska identiteter 15

Additions- och subtraktionsformler för sinus

och cosinus 19

Aktivitet: Undersök – Exakta trigonometriska värden 23

Formler för dubbla vinkeln 24

1.3 Bevis och bevismetoder 26

Direkta bevis 26

Indirekta bevis 29

Historik: Från Euklides till Gödel 32

1.4 Trigonometriska ekvationer 33

Grundekvationer 33

Ekvationer som omformas med formler 38

1.5 Tillämpningar och problemlösning 40

Aktivitet: Diskutera – Sant eller falskt? 42

Sammanfattning 1 43

Kan du det här? 1 44

Diagnos 1 45

Blandade övningar 1A 46

Blandade övningar 1B 48

2. Trigonometri och grafer 50

Centralt innehåll 50

Inledande aktivitet: Från enhetscirkel till kurva 51

2.1 Trigonometriska kurvor 52

Sinus- och cosinuskurvor 52

Grafritande räknare 56

Aktivitet: Undersök – Trigonometriska kurvor 57

Förskjuta kurvor 58

Ekvationen för en sinusformad kurva 60

Kurvan $y = \tan x$ 62

Kurvan $y = a \sin x + b \cos x$ 65

2.2 Radianbegreppet 68

Ett nytt vinkelmått 68

Cirkelsektorn och radianer 72

2.3 De trigonometriska funktionernas derivator 74

Derivatan av $\sin x$ och $\cos x$ 74

Aktivitet: Undersök – Kedjeregeln 77

Derivatan av sammansatta funktioner 78

2.4 Tillämpningar och problemlösning 80

Aktivitet: Laborera – Finn en funktion 85

Tema: Radiovågor 86

Aktivitet: Diskutera – Sant eller falskt? 88

Sammanfattning 2 89

Kan du det här? 2 90

Diagnos 2 91

Blandade övningar kapitel 2 92

Blandade övningar kapitel 1–2 95

3. Derivator och integraler 98

Centralt innehåll 98

Inledande aktivitet: Lägga derivator 99

3.1 Derivator och deriveringsregler 100

Kort om derivator 100

Aktivitet: Upptäck – Produkters derivator 103

Derivatan av en produkt 104

Historik: Leibniz och produktregeln 107

Derivatan av en kvot 108

Exponential- och logaritmfunktioner 110

Samband mellan förändringshastigheter 113

3.2 Grafer 116

Grafer och derivator 116

Olika typer av grafer 120

Aktivitet: Undersök – Vilken term dominerar? 124

Kurvor och asymptoter 125

3.3 Differentialekvationer 128

Begreppet differentialekvation 128

Differentialekvationer och matematiska modeller 130

3.4 Integraler 134

Integraler och primitiva funktioner 134

Grafiska metoder 138

Areor mellan kurvor 142

Integraler och areor 146

Integraler och storheter 150

Sannolikhetsfördelning 154

Aktivitet: Laborera – Sannolikheter 159

3.5 Tillämpningar och problemlösning 160

Historik: Riemanns summor och integralens definition 164

3.6 Rotationsvolym 165

Skivmetoden 165

Aktivitet: Diskutera – Sant eller falskt? 171

Sammanfattning 3 172

Kan du det här? 3 174

Diagnos 3 175

Blandade övningar kapitel 3 176

Blandade övningar kapitel 1–3 179

4. Komplexa tal 182

Centralt innehåll 182

Inledande aktivitet 183

4.1 Räkning med komplexa tal 184

Inledning 184

De reella talen räcker inte 185

Repetition 186

Historik: De komplexa talens historia 188

Aktivitet: Undersök – Vad blir i^n ? 189

Konjugat, absolutbelopp och de fyra räknesätten 190

4.2 Det komplexa talplanet 194

Komplexa tal som vektorer 194

Historik: Argand och det komplexa talplanet 198

Komplexa tal på polär form 199

Aktivitet: Undersök – Multiplicera med i 203

Multiplikation och division i polär form 204

Avläsa och rita i det komplexa talplanet 208

4.3 Komplexa tal i potensform 210

de Moivre's formel 210

Ekvationen $z^n = a$ 213

Eulers formel 215

Historik: Euler – en produktiv matematiker 217

4.4 Polynomekvationer 219

Andragradsekvationer 219

Polynomdivision 222

Faktorsatsen 225

Historik: Carl Friedrich Gauss 228

Polynomekvationer av högre grad 229

*Samband mellan rötter och koefficienter hos ekvationer

av högre grad 232

4.5 *Växelström 233

Aktivitet: Diskutera – Sant eller falskt? 237

Sammanfattning 4 238

Kan du det här? 4 241

Diagnos 4 242

Blandade övningar kapitel 4 243

Blandade övningar kapitel 1–4 246

Repetitionsuppgifter 250

Svar, ledtrådar och lösningar 256

Register 308

1

TRIGONOMETRI OCH FORMLER

Centralt innehåll

- * Trigonometriska uttryck.
- * Bevis och användning av trigonometriska formler.
- * Olika bevismetoder inom matematiken.
- * Algebraiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
- * Strategier för problemlösning.

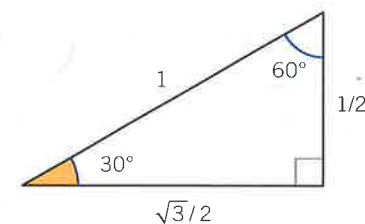
Inledande aktivitet

TRIANGLAR OCH CIRKLAR

Arbeta tillsammans två och två.

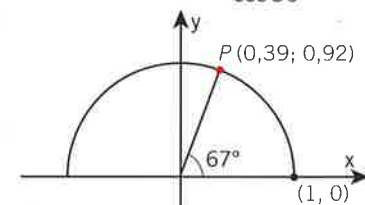
Bestäm, var och en, värdena med hjälp av figurerna. Jämför era svar och diskutera eventuella skillnader. Kontrollera sedan svaren till uppgift 1 och 2 med räknare.

1



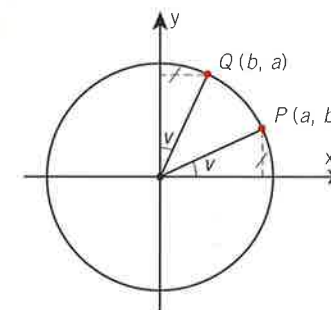
- a) $\sin 30^\circ$ c) $\tan 30^\circ$
b) $\cos 60^\circ$ d) $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$

2



- a) $\sin 67^\circ$ c) $\sin (180^\circ - 67^\circ)$
b) $\cos 67^\circ$ d) $\cos (180^\circ - 67^\circ)$

3



- a) $\cos v$
b) $\sin (90^\circ - v)$
c) $\sin (v + 360^\circ)$
d) $\cos (v - 360^\circ)$

238876744
894789475
15343274
754755
112
777
482398678567
894789475849

1.1 Trigonometri och trianglar

Enhetscirkeln och trianglar

I kurs 3c arbetade vi i trigonometriavsnittet med enhetscirkeln och olika triangelnsatser. Vi repeterar här några viktiga begrepp och samband innan vi går vidare.

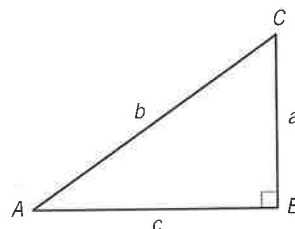
rätvinkliga trianglar

$$\sin A = \frac{a}{b} \quad \left(\frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

$$\cos A = \frac{c}{b} \quad \left(\frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

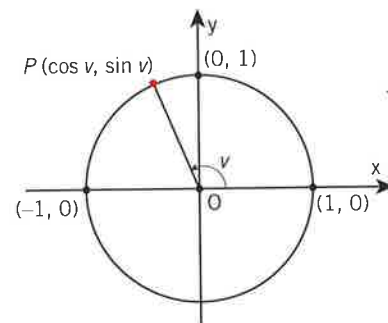
$$\tan A = \frac{a}{c} \quad \left(\frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \right)$$

$$\text{vinkel } A = \sin^{-1}(a/b) = \cos^{-1}(c/b) = \tan^{-1}(a/c)$$



enhetscirkeln

Med enhetscirkeln kan vi utöka de trigonometriska kvoterna till att gälla även trubbiga vinklar.



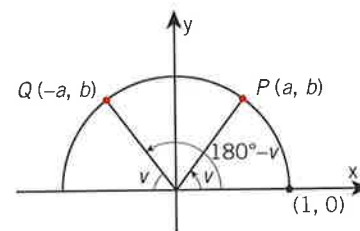
$$\sin v = y\text{-koordinaten för } P$$

$$\cos v = x\text{-koordinaten för } P$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \text{ då } \cos v \neq 0$$

I figuren till höger ser vi att
 $\sin v = b$ och $\sin(180^\circ - v) = b$
 $\cos v = a$ och $\cos(180^\circ - v) = -a$

Symmetrin i enhetscirkeln ger oss två viktiga samband för vinklar
 $\sin v = \sin(180^\circ - v)$
 $\cos v = -\cos(180^\circ - v)$

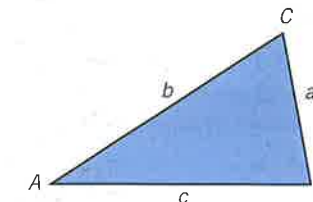


satser för godtyckliga trianglar

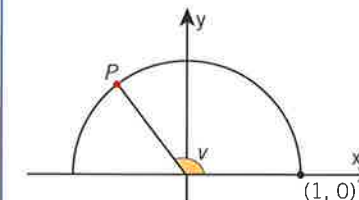
Areasatsen: $\text{arean} = \frac{ab \sin C}{2}$

Sinussatsen: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



1101



Punkten P har koordinaterna $(-0,57; 0,82)$. Bestäm

a) $\sin v$ b) $\cos v$ c) $\tan v$ d) v

a) $\sin v$ är punktens y-koordinat, 0,82 $\sin v = 0,82$

b) $\cos v$ är punktens x-koordinat, -0,57 $\cos v = -0,57$

c) $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{0,82}{-0,57} \approx -1,44$

d) $v = \cos^{-1}(-0,57) \approx 125^\circ$

eller

$\sin^{-1}(0,82) \approx 55^\circ$

och $v > 90^\circ$ ger

$v = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

$$\sin v = \sin(180^\circ - v)$$

Svar: a) $\sin v = 0,82$ c) $\tan v = -1,44$

b) $\cos v = -0,57$ d) $v = 125^\circ$

1102

En triangel har två sidor som är 5 cm och 10 cm med mellanliggande vinkel v . Triangelns area är 20 cm^2 . Beräkna vinkeln v .

Areasatsen ger:

$$20 = \frac{5 \cdot 10 \cdot \sin v}{2}$$

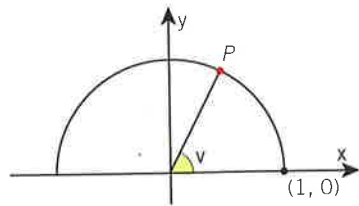
$$\sin v = 0,8$$

$$v_1 = \sin^{-1}(0,8) \approx 53^\circ$$

$$v_2 \approx 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$$

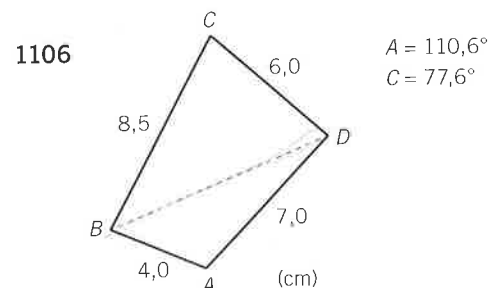
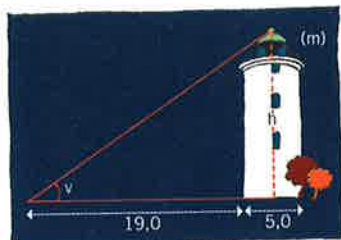
Svar: Vinkeln v är 53° eller 127° .

- 1103 Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ om punkten P har koordinaterna
- a) $(0,559; 0,829)$ b) $(0,34; 0,94)$



- 1104 För vilka vinklar i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ är
- a) $\sin x = 0,56$ c) $\sin x = -0,13$
b) $\cos x = 0,12$ d) $\cos x = -0,89$?

- 1105 För att beräkna höjden på Hanö fyr mätte en grupp elever upp sträckan 19,0 m på marken enligt figur. Fyrens diameter mättes till 5,0 m och vinkeln v uppskattades till 37° med hjälp av en stor gradskiva och en käpp. Beräkna fyrens höjd h .



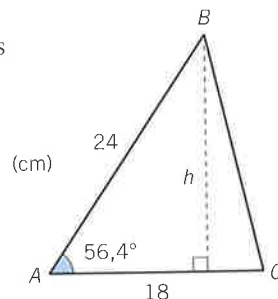
- a) Gör en enkel uppskattning av fyrhörningens area.
b) Beräkna fyrhörningens area.
c) Beräkna diagonalen BD .

- 1107 Sant eller falskt? Motivera.

"När vi bestämmer en vinkel i en triangel med sinussatsen så kan vi få två fall medan cosinussatsen alltid ger ett fall för vinkeln."

- 1108 Beräkna triangelns

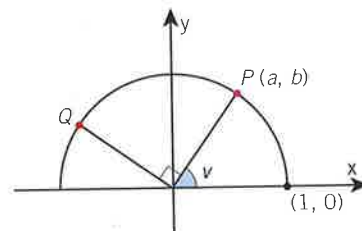
- a) höjd h
b) area
c) omkrets.



- 1109 Bestäm utan räknare de vinklar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ som är lösningar till ekvationen

- a) $\sin v = \sin 56^\circ$
b) $\cos v = -\cos 40^\circ$
c) $\sin v = -\sin 58^\circ$
Motivera dina svar.

1110



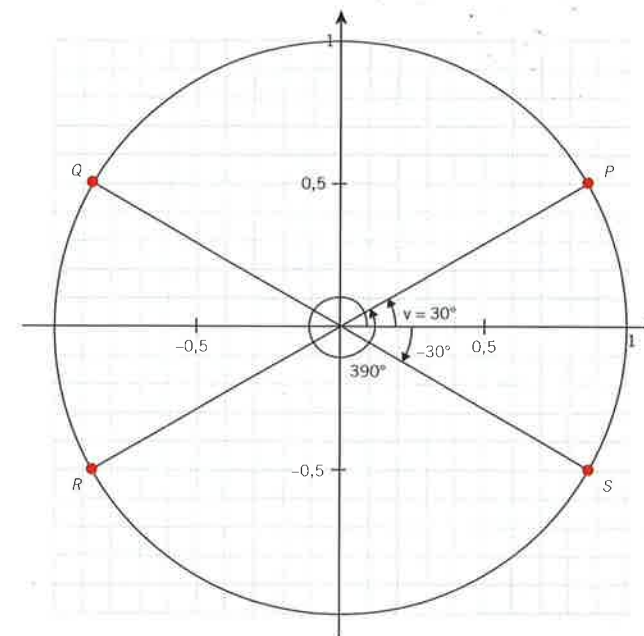
- a) Vilka koordinater har Q , om $P = (a, b)$?
b) Vilka samband kan du visa med hjälp av koordinaterna för P och Q ?

- 1111 Visa att sambandet $(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$ gäller för alla vinklar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.

Aktivitet

UNDERSÖK

Enhetscirkeln och symmetrier



Materiel: Gradskiva, linjal, räknare
Lös uppgifterna med hjälp av enhetscirkeln ovan.

- 1 I enhetscirkeln kan vi införa godtyckliga vinklar. Om $v > 360^\circ$ så är vridningen av radien större än ett varv och om $v < 0^\circ$ så har radien vridits i negativ riktning.

Bestäm värdet med din räknare och motivera resultatet med enhetscirkeln.

- a) $\sin 30^\circ$ c) $\cos 30^\circ$ e) $\sin 750^\circ$
b) $\sin 390^\circ$ d) $\cos -30^\circ$ f) $\sin -330^\circ$

- 2 a) Vilket är det största respektive minsta värdet $\sin v$ kan anta? Vilka vinklar ger dessa värden?
b) Vilket är det största respektive minsta värdet $\cos v$ kan anta? Vilka vinklar ger dessa värden?

- 3 Med hjälp av y-koordinaterna för punkterna P och Q (eller R och S) kan vi motivera sambandet $\sin v = \sin (180^\circ - v)$.

Med hjälp av vilka punkter och koordinater kan vi motivera sambandet

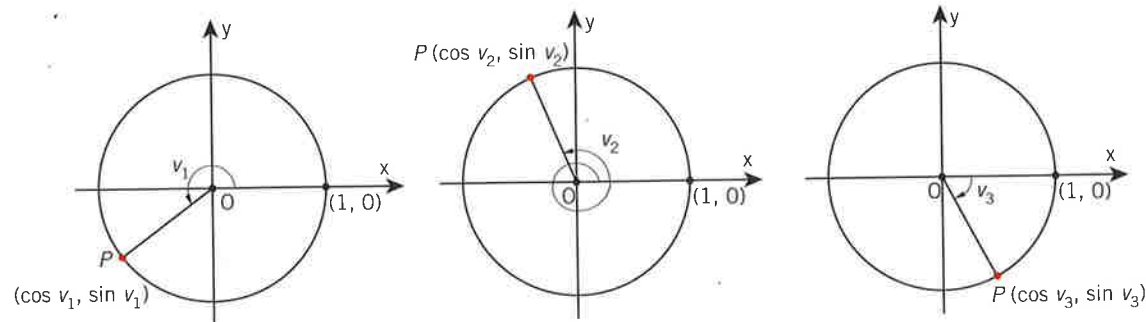
- a) $\cos v = \cos (-v)$
b) $\sin v = -\sin (180^\circ + v)$?

- 4 Studera punkterna P , Q , R och S och deras symmetrier. Hitta och beskriv så många trigonometriska samband som möjligt med hjälp av punkternas koordinater.

1.2 Trigonometriska formler

Enhetscirkeln och formler

Sambanden $y = \sin v$, $y = \cos v$ och $y = \tan v$ är exempel på trigonometriska funktioner. Med hjälp av enhetscirkeln kan vi införa trigonometriska funktioner för godtyckliga vinklar.



Vinkel i tredje kvadranten
 $180^\circ < v < 270^\circ$

Vinkel större än ett varv
 $v > 360^\circ$

Negativ vinkel
 $v < 0^\circ$

Definition

Om radien OP vridits en vinkel v i positiv eller negativ riktning gäller

$\sin v = y$ -koordinaten för P

$\cos v = x$ -koordinaten för P

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ där $\cos v \neq 0$

Om vi vrider radien OP ett helt varv i positiv eller negativ riktning så är vi tillbaka i samma läge, vilket t ex ger att

$\sin 40^\circ = \sin (40^\circ + 360^\circ) = \sin (40^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \dots$

$\cos 150^\circ = \cos (150^\circ - 360^\circ) = \cos (150^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \dots$

period Sinus- och cosinusfunktionerna är periodiska med perioden 360° .

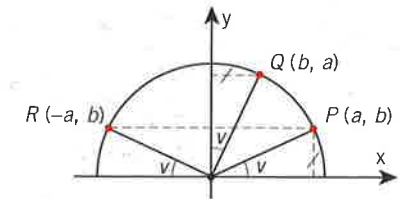
Period
 $\sin v, \cos v$

$\sin(v + n \cdot 360^\circ) = \sin v$ n heltal $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$
 $\cos(v + n \cdot 360^\circ) = \cos v$ n heltal $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$

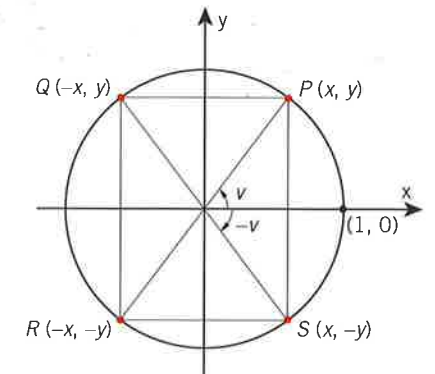
Symmetrin i enhetscirkeln ger oss några viktiga samband.

P och R ger $\sin(180^\circ - v) = \sin v$
 $\cos(180^\circ - v) = -\cos v$

P och Q ger $\sin(90^\circ - v) = \cos v$
 $\cos(90^\circ - v) = \sin v$



I figuren intill utgår vi ifrån punkten $P = (x, y)$. Symmetri ger koordinaterna för punkterna Q, R och S .



P och S ger $\sin(-v) = -\sin v$
 $\cos(-v) = \cos v$

P och R ger $\sin(v + 180^\circ) = -\sin v$
 $\cos(v + 180^\circ) = -\cos v$

y -koordinaterna har motsatta tecken
 x -koordinaterna är lika

Både y - och x -koordinaterna har motsatta tecken

Några formler

$\sin(-v) = -\sin v$
 $\cos(-v) = \cos v$

$\sin(v + 180^\circ) = -\sin v$
 $\cos(v + 180^\circ) = -\cos v$

Av formlerna får vi följande samband:

$\tan(v + 180^\circ) = \frac{\sin(v + 180^\circ)}{\cos(v + 180^\circ)} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \tan v$

Detta betyder att tangensfunktionen har perioden 180° .

Om $\cos v = 0$, dvs då $v = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, är $\tan v$ inte definierad.

Tangensfunktionen är periodisk med perioden 180° .

Period $\tan v$

$\tan(v + n \cdot 180^\circ) = \tan v$ n heltal $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$

1201

Anta att du vet att $\sin 20^\circ \approx 0,34$, $\cos 20^\circ \approx 0,94$ och $\tan 20^\circ \approx 0,36$.
Bestäm utan räknare värdet av

- a) $\cos 740^\circ$ b) $\tan(-160^\circ)$ c) $\sin(-380^\circ)$

a) Vi drar bort 2 perioder.

$$\cos 740^\circ = \cos(740^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \cos 20^\circ \approx 0,94$$

b) Vi lägger till 1 period.

$$\tan(-160^\circ) = \tan(-160^\circ + 180^\circ) = \tan 20^\circ \approx 0,36$$

c) $\sin(-380^\circ) = \sin(-380^\circ + 360^\circ) = \sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ \approx -0,34$

$$\sin(-v) = -\sin v$$

1202 Använd enhetscirkeln för att bestämma

- a) $\sin 90^\circ$ c) $\sin 270^\circ$
b) $\cos 180^\circ$ d) $\cos(-270^\circ)$

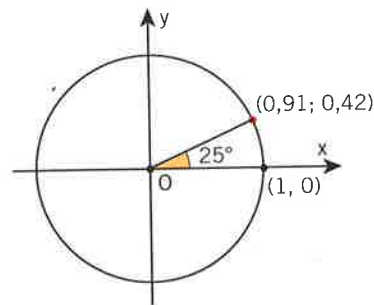
1203 Förklara varför $\sin 50^\circ = \sin 410^\circ$.

1204 Vad menas med att tangensfunktionens period är 180° ?

1205 Bestäm utan räknare värdet av

- a) $\sin 750^\circ$ om $\sin 30^\circ = 0,5$
b) $\cos(-302^\circ)$ om $\cos 58^\circ \approx 0,53$
c) $\tan 400^\circ$ om $\tan 220^\circ \approx 0,84$.

1206



Bestäm med hjälp av figuren

- a) $\sin 25^\circ$ e) $\sin 155^\circ$
b) $\sin(-25^\circ)$ f) $\cos 205^\circ$
c) $\cos 25^\circ$ g) $\sin(90^\circ - 25^\circ)$
d) $\cos(-25^\circ)$ h) $\cos 65^\circ$

1207 Undersök påståendet med hjälp av räknare.

Om det är sant, motivera varför.

- a) $\sin 30^\circ$ är lika med $\sin 210^\circ$
b) $\cos 70^\circ$ är lika med $\cos 290^\circ$
c) $\tan 270^\circ$ är ej definierat

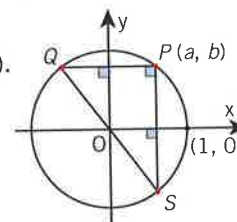
d) $\frac{\sin 550^\circ}{\cos 550^\circ}$ är lika med $\tan 10^\circ$

1208 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Beräkna exakt värdet av

- a) $\sin 60^\circ + \sin 60^\circ$
b) $\sin(-60^\circ) - \cos 30^\circ$
c) $\sin 60^\circ \cdot \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$
d) $\tan 600^\circ$

1209 I figuren har P koordinaterna (a, b) .



- a) Bestäm koordinaterna för Q och S.
b) Visa att $\tan(-v) = \tan(180^\circ - v)$.

1210 Visa sambanden med hjälp av enhetscirkeln.

- a) $\sin v = \cos(v + 270^\circ)$
b) $\cos v = -\sin(v + 270^\circ)$

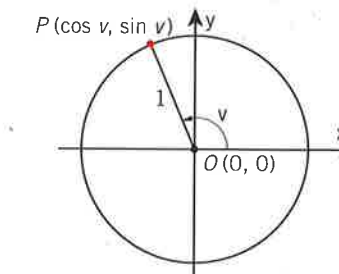
Trigonometriska identiteter

Ingång: 120810

cirkelns ekvation

En cirkel med radie r och medelpunkt i (a, b) har ekvationen

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$



Enhetscirkeln, som har medelpunkten i origo, har ekvationen

$$(OP)^2 = (\cos v - 0)^2 + (\sin v - 0)^2$$

Eftersom OP är 1 får vi att

$$1 = (\cos v)^2 + (\sin v)^2$$

Istället för $(\cos v)^2$ och $(\sin v)^2$ brukar man skriva $\cos^2 v$ och $\sin^2 v$ som uttalas "cosinuskvadrat v " och "sinuskvadrat v ".

Vi får en formel som gäller för alla vinklar v :

"Trigonometriska ettan"

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Sambandet, som brukar kallas den "trigonometriska ettan", kan också skrivas

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$$

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$

identitet

Den "trigonometriska ettan" är ett exempel på en *identitet*, dvs det är en ekvation eller formel som gäller för alla värden på variabeln.

"Trigonometriska ettan" kan användas för att

- bestämma $\cos v$ om $\sin v$ är givet
- bestämma $\sin v$ om $\cos v$ är givet
- visa nya identiteter (formler)

1211

Figuren visar en vinkel i tredje kvadranten.

Bestäm värdet av $\sin v$ om $\cos v = -\frac{24}{25}$

Trigonometriska ettan på formen

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v \text{ ger}$$

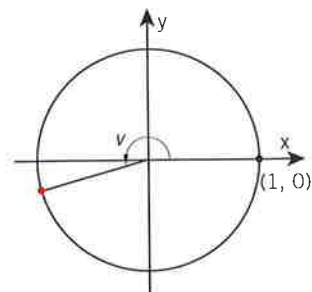
$$\sin^2 v = 1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625}$$

$$\sin v = \pm \sqrt{\frac{49}{625}} = \pm \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{625}} = \pm \frac{7}{25}$$

I tredje kvadranten är $\sin v < 0$.

Vi väljer därför det negativa värdet.

Svar: $\sin v = -\frac{7}{25}$



1212

* För denna typ av "visa att"-uppgifter används ofta avslutningstexten V.S.V. (vilket skulle visas) för att visa att uppgiften är klar. Vi har tidigare infört förkortningen V.S.B. (vilket skulle bevisas) som också kan användas eftersom vi använder bevistechniker. Observera att likhet gäller de värden på variabeln där båda leden är definierade.

Visa att $\frac{1}{\cos^2 v} = 1 + \tan^2 v$

Bevistechnik:

Förenkla det ena ledet så att det blir lika med det andra ledet.

Börja med det led som ser mest komplicerat ut.

Ersätt $\tan v$ med $\frac{\sin v}{\cos v}$

Högra ledet (HL) =

$$= 1 + \tan^2 v = 1 + \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\cos^2 v + \sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v}$$

= vänstra ledet (VL) V.S.V. (vilket skulle visas)*

Trigonometriska ettan

1213

Visa att $1 - (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

Här kan det vara lämpligt att förenkla VL och HL var för sig tills vi ser att de är lika.

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 1 - (\sin x - \cos x)^2 = 1 - (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - (1 - 2 \sin x \cos x) = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Trigonometriska ettan

$$\begin{aligned} \text{HL} &= (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

VL = HL V.S.V.

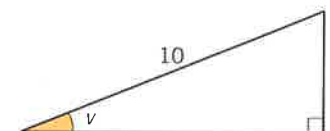
1214 Beräkna de möjliga värdena för $\sin v$ om $\cos v = 4/5$.

a

1215 Vi vet att $\sin v = 6/10$ och att $0^\circ < v < 90^\circ$.

Bestäm det exakta värdet av $\cos v$ med hjälp av

a) Pythagoras sats och figuren



b) trigonometriska ettan.

1216 Beräkna det exakta värdet av $\cos v$ om

a) $\sin v = \frac{5}{13}$

och v ligger i första kvadranten

b) $\sin v = -\frac{9}{41}$

och v ligger i fjärde kvadranten.

1217 Visa att

$$\sin x \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \cos^2 x$$

1218 Visa att

$$\cos^2 v (\tan^2 v + 1) = 1$$

1219 Kan både $\sin v$ och $\cos v$ ha positiva värden om v är en trubbig vinkel?

1220 Beräkna det exakta värdet av $\sin v$ och $\tan v$ om $\cos v = -1/3$ och $90^\circ < v < 180^\circ$.

b

1221 Förenkla uttrycken

a) $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$ c) $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x$

b) $\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ d) $1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$



1222 a) Beräkna för $x = 0^\circ$ och $x = 30^\circ$ värdet på uttrycken $\sin^2 x + \tan x$ och $1 - \cos x$.

b) Kan $\sin^2 x + \tan x$ förenklas till $1 - \cos x$? Motivera.

1223 Har de räknat rätt?

a) My fick:

$$\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

och rätt svar angavs till $\frac{1}{\sin x}$

b) Steve fick:

$$\frac{\cos x (\sin x + \tan x)}{\cos x + 1}$$

och rätt svar angavs till $\cos x$.

1224 Skriv om uttrycket så det bara innehåller $\cos x$.

a) $\cos^2 x - \sin^2 x$

b) $\cos x + \sin x \cdot \tan x$

1225 Visa att

a) $\tan^2 v = \frac{\sin^2 v}{1 - \sin^2 v}$

b) $(1 - \sin^2 A)(1 + \tan^2 A) = 1$

1226

Visa att $\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

Vi börjar med VL, som ser mest komplicerat ut:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)^2 = \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 + \sin x)^2}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \text{HL} \quad \text{V.S.V.} \end{aligned}$$

Trigonometriska ettan

Konjugatregeln

Förkorta med $(1 + \sin x)$

Tips!

Att lösa "visa att"-uppgifter kan kräva olika strategier beroende på hur uppgiften ser ut, och övning ger färdighet. Ofta är det enklast att först förenkla det led som ser krångligast ut. Ibland är det enklast att skriva om båda leden och sedan visa det "nya" sambandet. Som i all problemlösning är det viktigt att kunna stanna upp och utvärdera om man är på rätt väg.

Visa att för alla x där båda leden är definierade gäller följande samband

$$1227 \quad 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

$$1228 \quad (3 + \cos x)(3 - \cos x) = 8 + \sin^2 x$$

$$1229 \quad \frac{1 + \tan x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$1230 \quad \frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 \tan x$$

$$1231 \quad \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$1232 \quad \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$1233 \quad \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1234 \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$1235 \quad \frac{1}{1 - \sin v} + \frac{1}{1 + \sin v} = \frac{2}{\cos^2 v}$$

$$1236 \quad \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x + \cos^2 x}$$

Additions- och subtraktionsformler för sinus och cosinus

När vi i nästa kapitel ska härleda derivator för trigonometriska funktioner behöver vi formler för $\sin(u + v)$ och $\cos(u + v)$.

Exempel Kan $\sin(u + v)$ vara lika med $\sin u + \sin v$?

Sätter vi $u = 60^\circ$ och $v = 30^\circ$ ser vi direkt att vi inte har likhet:

$$\sin(u + v) = \sin(60^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\sin u + \sin v = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \approx 1,37$$

Vi behöver formler för $\sin(u \pm v)$ och $\cos(u \pm v)$.

Formlerna kallas additions- och subtraktionsformlerna och vi ger ett bevis för dem på nästa sida.

Additions- och subtraktionsformlerna

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

Med additions- och subtraktionsformlerna kan vi

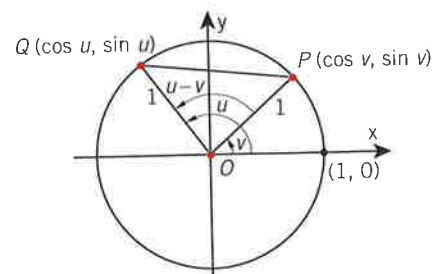
- bestämma exakta sinus- och cosinusvärden
- härleda nya samband.

Vi kan då använda formlerna tillsammans med följande exakta värden för sinus och cosinus.

v	$\sin v$	$\cos v$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

Härledning av formeln för $\cos(u - v)$

I figuren låter vi radien OP i enhetscirkeln vrida sig vinkeln v i positiv riktning och radien OQ vinkeln u , också i positiv riktning.



Vinkeln mellan OP och OQ blir då $u - v$.

- 1 Vi kan uttrycka $(PQ)^2$ på två olika sätt.

$$\text{Avståndsformeln: } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{ger}$$

$$(PQ)^2 = (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2$$

$$\text{Cosinussatsen: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{ger}$$

$$(PQ)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v)$$

- 2 Uttrycken för $(PQ)^2$ sätts lika.

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos(u - v)$$

- 3 I vänstra ledet utvecklar vi kvadraterna.

$$\begin{aligned} \cos^2 u - 2 \cos u \cdot \cos v + \cos^2 v + \sin^2 u - 2 \sin u \cdot \sin v + \sin^2 v &= \\ = 2 - 2 \cos(u - v) \end{aligned}$$

- 4 Vi utnyttjar "trigonometriska ettan".

$$1 - 2 \cos u \cdot \cos v + 1 - 2 \cdot \sin u \cdot \sin v = 2 - 2 \cos(u - v)$$

$$2 \cos(u - v) = 2 \cos u \cdot \cos v + 2 \sin u \cdot \sin v$$

- 5 Formeln kan skrivas

$$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

De övriga formlerna för $\cos(u + v)$ och $\sin(u \pm v)$ kan härledas med hjälp av subtraktionsformeln för cosinus och sambanden nedan som vi visat tidigare.

$$\begin{aligned} \sin(-v) &= -\sin v & \sin v &= \cos(90^\circ - v) \\ \cos(-v) &= \cos v & \cos v &= \sin(90^\circ - v) \end{aligned}$$

Vi lämnar härledningarna för de övriga formlerna som övningar.

1237

Visa sambandet

$$\cos(x + 270^\circ) = \sin x$$

med additionsformeln för cosinus.

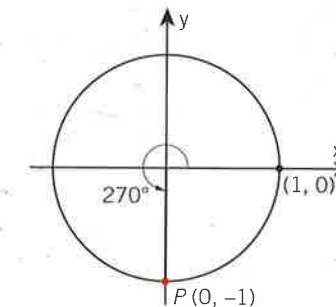
$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\cos(x + 270^\circ) = \cos x \cos 270^\circ - \sin x \sin 270^\circ$$

Enhetscirkeln ger

$$\cos 270^\circ = 0 \quad \text{och} \quad \sin 270^\circ = -1$$

$$\cos(x + 270^\circ) = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x$$



1238

Förenkla

$$\sin(x + 45^\circ) - \sin(x - 45^\circ)$$

Svara exakt.

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad \text{och}$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\sin(x + 45^\circ) - \sin(x - 45^\circ) =$$

$$= \sin x \cos 45^\circ + \cos x \sin 45^\circ - (\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ) =$$

$$= 2 \cos x \sin 45^\circ = 2 \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \cos x$$

$$\text{Tabell ger } \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (eller } \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Allmänt om formler

Inom trigonometrin finns en mängd olika samband, satser och formler som du behöver lära dig att använda och hitta. I sammanfattningen sist i kapitlet (s. 43) finns de samlade.

Några av de vanligaste formlerna kan vara bra att kunna utantill. Formlerna är alltid lättare att komma ihåg om man förstår varifrån de kommer och hur de hänger ihop. Läs därför gärna igenom motiveringar och härledningar en extra gång.

Använd också formelbladet till det nationella provet när du övar så du lär dig hitta i det.

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned}$$

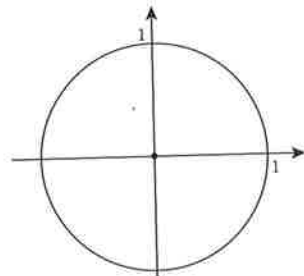
$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

1239 Vad ska det stå i stället för A och B ?

- a** a) $\sin(x + 25^\circ) = A \cdot \cos 25^\circ + B \cdot \cos x$
b) $\cos(35^\circ + y) = \cos 35^\circ \cdot A - \sin y \cdot B$

1240



- a) Motivera med hjälp av enhetscirkeln att $\sin 180^\circ = 0$.
b) Visa med additionsformeln för sinus att $\sin(90^\circ + 90^\circ) = 0$.

1241 Förenkla och svara med två decimaler.

- a) $\sin x \cdot \cos 12^\circ + \sin x \cdot \cos 12^\circ$
b) $a + \cos x \cdot \sin 24^\circ - (a - \cos x \cdot \sin 24^\circ)$

1242 Förenkla med hjälp av additions- och subtraktionsformlerna. Svara med två decimaler.

- a) $\sin(x + 50^\circ) - \sin(x - 50^\circ)$
b) $\sin(43^\circ + x) + \sin(43^\circ - x)$
c) $\cos(x + 79^\circ) + \cos(x - 79^\circ)$

1243 Förenkla

- a) $\sin(u + v) + \sin(u - v)$
b) $\sin(u + v) - \sin(u - v)$
c) $\cos(u + v) + \cos(u - v)$
d) $\cos(u + v) - \cos(u - v)$

1244 Visa att

b $\cos(60^\circ + x) + \cos(60^\circ - x) = \cos x$

1245 Visa med hjälp av subtraktionssatserna

- a) $\cos(270^\circ - v) = -\sin v$
b) $\sin(360^\circ - x) = -\sin x$

1246 Använd formeln för $\cos(u - v)$ för att visa

$\cos(-v) = \cos v$.

1247 Bestäm det exakta värdet av $\cos 315^\circ$ med hjälp av omskrivningen

$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ)$.

1248 Bestäm det exakta värdet av

- a) $\sin 135^\circ$
b) $\sin 75^\circ$

1249 Beräkna $\cos(x - x)$ med hjälp av subtraktionsformeln. Förklara ditt resultat.

1250 Bestäm det exakta värdet av

$\sin(A + B)$ om

$\sin A = \frac{3}{5}$, $90^\circ < A < 180^\circ$ och

$\sin B = -\frac{5}{13}$, $180^\circ < B < 270^\circ$

1251 Härled formeln för $\cos(u + v)$ genom att

c byta v mot $-v$ i formeln för $\cos(u - v)$.

1252 Visa att

$$\frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h}$$

kan skrivas

$$\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

1253 a) Härled formeln för $\sin(u + v)$ genom att i $\cos(u - v)$ ersätta u med $90^\circ - u$.

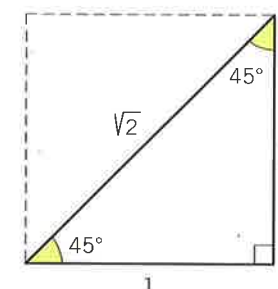
b) Hur får du sedan formeln för $\sin(u - v)$?

Aktivitet

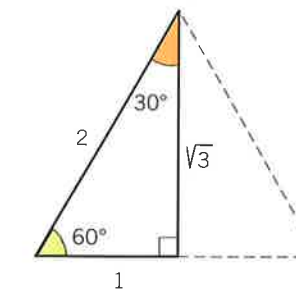
UNDERSÖK

Exakta trigonometriska värden

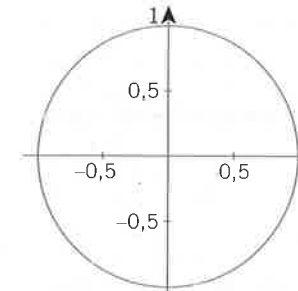
Halv kvadrat



Halv liksidig triangel



Enhetscirkeln



Formler

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - v) &= -\cos v & \sin(v + 180^\circ) &= -\sin v \\ \sin(180^\circ - v) &= \sin v & \cos(v + 180^\circ) &= -\cos v \\ \sin(-v) &= -\sin v & \cos v &= \sin(90^\circ - v) \\ \cos(-v) &= \cos v & \sin v &= \cos(90^\circ - v) \\ \sin(u + v) &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u - v) &= \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \\ \cos(u + v) &= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u - v) &= \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \end{aligned}$$

Arbeta i par eller grupp

Hjälpmedel: Triangelarna, enhetscirkeln och formlerna ovan.

1 Gör en tabell, lik den nedan, med v , $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$.

Låt värdet på vinkeln öka med 15° i taget från 0° till 360° .

2 Använd figurerna, enhetscirkeln och dess symmetrier samt formlerna och försök fylla i hela tabellen med exakta värden.
3 Jämför med en annan grupp. Har ni samma värden? Diskutera och motivera.

vinkel, v	0°	15°	30°	45°	$...$	315°	330°	345°	360°
$\sin v$									
$\cos v$									
$\tan v$									

Formler för dubbla vinkeln

Om vi i additionsformlerna låter de två vinklarna vara lika stora, får vi några nya formler.

$$\sin(u + u) = \sin u \cdot \cos u + \cos u \cdot \sin u$$

$$\cos(u + u) = \cos u \cdot \cos u - \sin u \cdot \sin u$$

Efter förenkling får vi

Formler för
"dubbla vinkeln"

$$\sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

"Trigonometriska ettan" $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ kan skrivas

$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u \quad \text{och} \quad \sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$

Använder vi detta kan vi skriva formeln för $\cos 2u$ på två andra sätt:

$$\cos 2u = \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) = 2 \cos^2 u - 1$$

$$\cos 2u = 1 - \sin^2 u - \sin^2 u = 1 - 2 \sin^2 u$$

1254

Bestäm det exakta värdet av $\sin 2v$ om $\cos v = -\frac{3}{5}$ och v ligger i andra kvadranten.

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$$

Vi vet $\cos v$ och kan då beräkna $\sin v$ med trigonometriska ettan.

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\sin v = \pm \frac{4}{5}$$

Vi väljer det positiva värdet eftersom $\sin v > 0$ i andra kvadranten.

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

1255 För en vinkel x gäller

a $\sin x = 0,6$ och $\cos x = 0,8$

Bestäm följande värden utan att först bestämma x .

a) $\sin 2x$ c) $\tan x$

b) $\cos 2x$ d) $\tan 2x$

1256 a) Bestäm med trigonometriska ettan möjliga värden på $\sin v$ om $\cos v = 0,5$.

b) Bestäm möjliga värden på $\sin 2v$ om $\cos v = 0,5$.

1257 Vi vet att $\sin v = -\frac{1}{3}$ och v ligger i fjärde kvadranten.

a) Bestäm $\cos v$.

b) Bestäm $\sin 2v$.

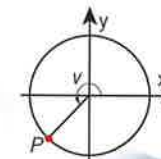
1258 Bestäm $\cos 2x$ om

a) $\cos x = 0,5$ b) $\sin x = \frac{2}{3}$

1259 Fördubblas värdet på sinus om vinkeln fördubblas? Motivera.

1260 Punkten P på enhetscirkeln har

b x -koordinaten $-\frac{20}{29}$



Bestäm exakt

a) $\cos 2v$ b) $\sin 2v$

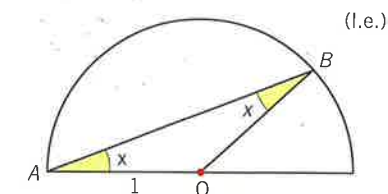
1261 Beskriv sambandet mellan additionsformlerna och formeln för dubbla vinkeln.

1262 Visa att $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

genom att använda

a) formler

b) figuren nedan.



1263 Visa att $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

1264 Uttryck $\sin 3x$ i $\sin x$, dvs skriv om $\sin 3x$ så det bara innehåller $\sin x$.

1265 Visa att

$$\sin 4x + 2 \sin 2x = 8 \sin x \cos^3 x$$

1266 Visa att

a) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

b) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

c) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

1.3 Bevis och bevismetoder

Direkta bevis

bevis Ett *bevis* är ett logiskt resonemang som syftar till att visa att ett påstående är sant. I det här avsnittet ska vi titta närmare på några olika bevismetoder.

logik Matematisk argumentation bygger på *logik*. Logik, som är ett annat ord för slutledningskonst, är en gren både inom filosofi och matematik. Du har tidigare mött de två **logiska** symbolerna $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$. De kan användas mellan två påståenden P och Q .

implikation $P \Rightarrow Q$ P medför Q (men inte nödvändigtvis tvärtom)
t ex $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ ($x^2 = 9$ ger även $x = -3$)
"implies"

ekvivalens $P \Leftrightarrow Q$ P är ekvivalent med Q (P medför Q och Q medför P)
t ex $x = 3 \Leftrightarrow x + 7 = 10$
"implies and is implied by"

direkt bevis Den vanligaste formen av bevis kallas *direkt bevis* och utgår från ett antagande P och kommer fram till en slutsats Q via ett logiskt resonemang i ett eller flera steg.

Exempel Vi ska bevisa att kvadraten på ett jämnt tal är delbar med 4.

Vårt antagande är påstående P : x är ett jämnt tal
Vår slutsats är påstående Q : x^2 är delbart med 4

Vi ska visa att vår slutsats är sann, d v s att $P \Rightarrow Q$

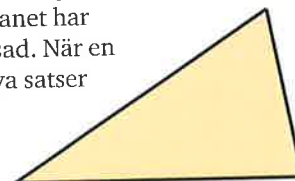
Bevis

Ett jämnt tal kan skrivas $x = 2n$ där n är ett heltal
 x^2 kan då skrivas $x^2 = (2n)^2 = 4n^2$ vilket är delbart med 4
 x är ett jämnt tal $\Rightarrow x^2$ är delbart med 4

V.S.B.

allmänt om bevis Inom matematiken har bevis en viktig roll.

En sats som är bevisad gäller så länge inte förutsättningarna ändras. Till exempel så vet vi att alla möjliga trianglar i planet har vinkelsumman 180° , eftersom den satsen är bevisad. När en sats är bevisad kan den användas för att bevisa nya satser och på så vis föra matematiken framåt. Det finns fortfarande många gamla och nya påståenden som ännu inte är bevisade och matematikernas uppgift är bl a att finna bevis för dessa.



1301

Ska det vara en implikationspil ($\Rightarrow$) eller en ekvivalenspil ($\Leftrightarrow$) i rutan mellan påståendena? Motivera ditt svar.

a) $x = 4$ ☐ $x^2 = 16$

b) $2x + 3 = 9$ ☐ $x = 3$

a) $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$

Motivering:

$x = 4$ medför att $x^2 = 16$ men omvändningen gäller inte eftersom $x^2 = 16$ medför att $x = 4$ och $x = -4$

b) $2x + 3 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

Motivering:

$2x + 3 = 9$ medför att $x = 3$ och

$x = 3$ medför att $2x + 3 = 9$

1302

Sats: Ett jämnt tal och ett udda tal har en produkt som är ett jämnt tal.

a) Undersök satsen med några exempel.

b) Bevisa satsen med ett direkt bevis.

c) Gäller satsens omvändning?

a) T ex $2 \cdot 3 = 6$ eller $6 \cdot 15 = 90$

b) Ett jämnt tal kan skrivas $2n$ där n är ett heltal
Ett udda tal kan skrivas $2k + 1$ där k är ett heltal

Produkten kan då skrivas

$2n \cdot (2k + 1) = 2 \cdot n(2k + 1)$ vilket är ett jämnt tal eftersom $n(2k + 1)$ är ett heltal.

V.S.B.

c) Satsens omvändning blir:

Om produkten av två heltal är ett jämnt tal så är faktorerna ett jämnt tal och ett udda tal.

För att visa att satsens omvändning inte gäller räcker det med att hitta ett motexempel, t ex $8 = 2 \cdot 4$.

Omvändningen gäller inte, vi har inte en ekvivalens.

1303 Ska det vara en implikationspil ($\Rightarrow$) eller en ekvivalenspil ($\Leftrightarrow$) i rutan mellan påståendena? Motivera ditt svar.

- a) $x > 0$ ☐ $x^2 > 0$
 b) n är udda ☐ $n = 2k + 1$, k heltal
 c) $y = x + 2$ ☐ $y' = 1$
 d) $\lg x = 2$ ☐ $x = 100$

1304 $P: 3x + 7 = x + 1$

$Q: x = -3$

- a) Bevisa att $P \Rightarrow Q$
 b) Bevisa att $Q \Rightarrow P$
 c) Gäller ekvivalensen $P \Leftrightarrow Q$?

1305 Bevisa att

- a) summan av ett udda tal och ett jämnt tal är udda
 b) produkten av två udda heltal är udda.

1306 Avgör om påståendet är sant och bevisa ditt svar.

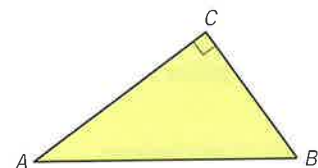
Tre på varandra följande heltal har en summa som är delbar med

- a) 3 b) 6.

1307 Sant eller falskt?

Om $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow R$ så innebär det att $P \Rightarrow R$.

1308 Visa att $\sin(A + B) = 1$



1309 Pythagoras sats lyder:

b Om en triangel är rätvinklig så är summan av kateternas kvadrater lika med hypotenusans kvadrat.

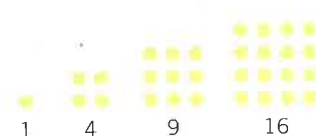
Låt A vara den räta vinkeln och bevisa med hjälp av cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

- a) Pythagoras sats
 b) omvändningen till Pythagoras sats.

1310 Triangeltalen är 1, 3, 6, 10, 15, ...



Kvadrattalen är 1, 4, 9, 16, 25, ...



- a) Skriv ett uttryck för det n :te triangeltalet och ett för det n :te kvadrattalet.
 b) Undersök summan av två på varandra följande triangeltal. Formulera en slutsats.
 c) Bevisa din slutsats.

1311 Bevisa att två på varandra följande jämna tal har en produkt som är delbar med 8.

1312 Nedan följer ett "bevis" för att $4 = 3$. Kan du hitta felet?

Anta att $a + b = c$.

Detta ger:

$$4a - 3a + 4b - 3b = 4c - 3c$$

$$4a + 4b - 4c = 3a + 3b - 3c$$

$$4(a + b - c) = 3(a + b - c)$$

$$4 = 3$$

1313 Bevisa att $n^3 - n$ är delbart med 3 för alla positiva heltal ≥ 0 .

Indirekta bevis

Många gånger kan ett direkt bevis vara svårt att genomföra. Därför kan vi också behöva andra bevismetoder.

indirekt bevis I ett *indirekt bevis* utgår man från att det som ska bevisas är falskt och visar med hjälp av ett logiskt resonemang att antagandet då också måste vara falskt.

I indirekta bevis är det ofta praktiskt att använda "motsatsen till ett påstående P " vilket betecknas $\neg P$ och utläses "icke P ". Att P är falskt motsvaras då av att $\neg P$ är sant.

Man kan med grundläggande logiska regler visa att

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$$



Exempel Anta att följande är sant:

P : "Det regnar" $\Rightarrow$ Q : "Jag är inne."

Regeln ovan ger oss då att detta motsvarar:

$\neg Q$: "Jag är ute" $\Rightarrow$ $\neg P$: "Det regnar inte."

Istället för att direkt bevisa att P medför Q kan vi visa att $\neg Q$ medför $\neg P$.

1314

Bevisa med hjälp av ett indirekt bevis satsen:

"Om n^2 är ett jämnt tal, så är n ett jämnt tal."

Antagandet är P : n^2 är jämnt.

Slutsatsen är Q : n är jämnt.

Vi bevisar $P \Rightarrow Q$ genom att visa att $\neg Q \Rightarrow \neg P$, dvs vi ska visa att $\neg Q$: n är ett udda tal medför $\neg P$: n^2 är udda.

n udda ger: $n = 2k + 1$ (k heltal)

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1$$

vilket är udda då m är ett heltal.

V.S.B.

motsägelsebevis

Exempel

När man ska bevisa en ekvivalens eller ett påstående används ibland en annan typ av bevis som liknar det indirekta beviset och kallas *motsägelsebevis*. Man utgår då från att påståendet eller satsen är falsk och visar att detta leder till en motsägelse.

Sats: Antalet primtal är oändligt många.

Bevisidé: Utgå ifrån att satsen är falsk och visa att det ger en motsägelse.

Bevis: Anta att antalet primtal är ändligt många: $p_1, p_2, \dots, p_n$

Bilda talet $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.

Dividerar vi N med p_1 ger det

$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1}{p_1} = p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + \frac{1}{p_1} \text{ vilket inte är ett heltal!}$$

På samma sätt kan vi se att inget av våra primtal är delare till N . Om talet N inte är delbart med något primtal så måste N vara ett primtal eller så finns det ett primtal som inte är med bland de uppräknade. Detta ger en motsägelse mot att $p_1, p_2, \dots, p_n$ är alla primtal. Vårt antagande är felaktigt, antalet primtal är oändligt många.

V.S.B.

1315

a, b och c är tre reella tal så att $abc = -10$.

Visa med ett motsägelsebevis att minst ett av talen a, b eller c måste vara negativt.

Motsatsen till att minst ett av talen är negativt är att inget av talen är negativt.

Om vi antar att alla talen är positiva ger det $abc \geq 0$ vilket motsäger att $abc = -10$.

Vi får motsägelse varför vårt antagande att alla talen är positiva är felaktigt. Minst ett av talen är negativt.

V.S.B.

Sammanfattning

Direkt bevis: Visa direkt att antagandet ger slutsatsen.
 $P \Rightarrow Q$

Indirekt bevis: Visa att om slutsatsen är falsk så är också antagandet falskt.
 $\neg Q \Rightarrow \neg P \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$

Motsägelsebevis: Antag att påståendet/satsen är falsk och visa att det leder till en motsägelse.

1316 Vad är motsatsen, $\neg P$, till påståendet

- a)** $P: n$ är jämnt
b) $P: x + y \geq 4$
c) $P: x = 2$
d) $P: \text{minst ett barn är en flicka}$
e) $P: \text{alla kor kan flyga?}$

1317 Antag att

$P: \text{Det är sommar} \Rightarrow Q: \text{Vi spelar fotboll.}$



Formulera $\neg Q \Rightarrow \neg P$ med ord.

1318 $P: 0,5x + 2 \leq 6 \Rightarrow Q: x \leq 8$

- a) Formulera med matematiska symboler $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
b) Bevisa indirekt $P \Rightarrow Q$ genom att bevisa att $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

1319 "Om produkten av två positiva reella tal är större än 100 medför det att minst en av faktorerna är större än 10."

Satsen ovan är skriven på formen $P \Rightarrow Q$.

- a) Formulera med ord satsen $\neg Q \Rightarrow \neg P$
b) Formulera med matematiska symboler $\neg Q$ och $\neg P$
c) Bevisa med ett indirekt bevis att $P \Rightarrow Q$.

1320 Bevisa med ett indirekt bevis att om $3n + 2$ är udda så är n udda.

1321 Bevisa med ett motsägelsebevis att om

- a) 22 godisbitar fördelas i 7 påsar så är det minst en påse som innehåller 4 godisbitar eller fler.
a) $ab < 0$ så är a eller b negativ.

1322 Beskriv skillnaden mellan ett direkt och ett indirekt bevis.

1323 Visa med motsägelsebevis att om x är lösning till ekvationen $x^3 + 3x^2 + 7x + 2 = 0$ så är $x < 0$.

1324 Pythagoras sats lyder:

Om en triangel är rätvinklig så är summan av kateternas kvadrater lika med hypotenusans kvadrat.

Låt A vara den räta vinkeln och använd cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

för att bevisa Pythagoras sats med ett indirekt bevis.

1325 Bevisa att om $a^2 - 2a + 7$ är ett jämnt tal så är a ett udda tal.

1326 $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, dvs kan inte skrivas som ett rationellt tal $\frac{a}{b}$.
(a, b heltal, $b \neq 0$)
Beviset är ett klassiskt motsägelsebevis.

Anta att $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ där $\frac{a}{b}$ är heltal och förkortat så långt det går.

Kvadrering av uttrycket ger: $2 = \frac{a^2}{b^2}$, vilket ger $2b^2 = a^2$ dvs a^2 och a är delbara med 2.

Sätter vi $a = 2k$ ger det $2b^2 = 4k^2$ vilket kan skrivas $b^2 = 2k^2$, dvs också b måste vara delbart med 2.

Vi får en motsägelse mot vårt antagande, $\sqrt{2}$ måste vara irrationellt.

- a) Förklara varför både a^2 och a är delbart med 2 om $2b^2 = a^2$ (a, b heltal).
b) Varför får vi en motsägelse?

1327 a och b är heltal. Bevisa att $a^2 - 4b \neq 2$.

Historik

Från Euklides till Gödel

Grekerne införde beviset i matematiken

Thales från Miletos (ca 600 f Kr) är en av de första matematikerna i historien som vi vet namnet på. Han inte bara noterade matematiska fakta, som att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora, han bevisade det också. Thales metoder utvecklades av Euklides på 300-talet f Kr.

Euklides berömda bok, Elementa, sammanfattade sin tids matematiska vetande. Med några självklara grundsatser (axiom) som utgångspunkt, ger Euklides bevis för ett stort antal satser, bl a Pythagoras sats och att antalet primtal är oändligt.

Euklides axiom gällande parallella linjer har genom historien varit omdiskuterat och väckt nyfikenhet. Genom att byta ut parallellaxiomet skapade man på 1800-talet nya geometriska system med andra regler. Ett av dessa visade sig lite oväntat bilda ramen för Einsteins relativitetsteori i början av 1900-talet.

Logikens gränser

Euklides metod, med några få axiom och en handfull logiska regler som alla satser kan härledas från, är tilltalande enkel. Metoden har i årtusenden varit en modell för matematiker inom olika områden.

Kan *all* matematik härledas från en samling axiom? Svaret kom som en chock när den 25-årige österrikiske matematikern Kurt Gödel 1931 visade att svaret är nej. Han visade att varje axiomsystem är ofullständigt, dvs innehåller påståenden vars sanningshalt inte går att avgöra inom systemet. För det krävs en mänsklig hjärna som kan gå utanför systemet och välja nya utgångspunkter.



Den första svenska översättningen av Elementa gavs ut 1744.



Kurt Gödel (1906–1978) var en av 1900-talets stora matematiker.

1 Om vi ändrar på förutsättningarna så förändras också satserna. Gör följande tankeexperiment: Gå från en punkt på ekvatorn rakt norrut till nordpolen. På nordpolen vrider du dig 90° och

går rakt ner till ekvatorn och sedan rakt tillbaka till den punkt du startade.

- Vilken figur beskriver din vandring?
- Vilken vinkelsumma har din figur?

1.4 Trigonometriska ekvationer

Grundekvationer

Med hjälp av enhetscirkeln har vi tidigare visat att de trigonometriska funktionerna kan ha samma värde för flera olika vinklar. Det måste vi ta hänsyn till när vi löser trigonometriska ekvationer.

Exempel 1 Vi undersöker ekvationen $\sin x = 0,721$

I enhetscirkeln finner vi i intervallet $0^\circ \leq x < 360^\circ$ två lösningar, x_1 och x_2 .

Med hjälp av räknare får vi x_1 .
 $x_1 = \sin^{-1}(0,721) \approx 46,1^\circ$

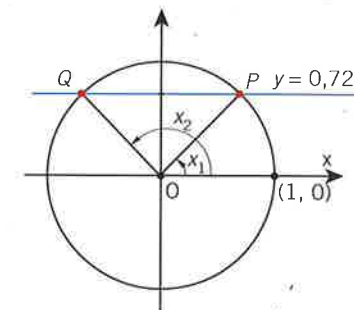
Sambandet $\sin(180^\circ - v) = \sin v$ ger oss sedan x_2 .

$$x_2 \approx 180^\circ - 46,1^\circ = 133,9^\circ$$

För båda radierna OP och OQ gäller att de hamnar i samma läge om vi vrider dem ett godtyckligt antal *hela* varv i positiv eller negativ riktning. Har vi inga begränsningar för vinklarnas storlek får ekvationen därför ett obegränsat antal lösningar.

Samtliga lösningar till ekvationen $\sin x = 0,721$ kan skrivas:

$$x \approx 46,1^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } x \approx 133,9^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ } n \text{ är ett heltal.}$$



Exempel 2 Vi undersöker ekvationen $\cos x = 0,659$

Räknaren ger $x_1 = \cos^{-1}(0,659) \approx 48,8^\circ$

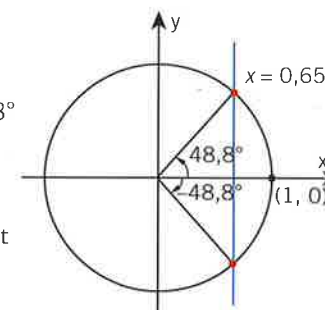
Sambandet $\cos(-v) = \cos v$ ger $x_2 \approx -48,8^\circ$

De två lösningarna är markerade i enhetscirkeln intill.

Lägger vi till eller drar ifrån ett godtyckligt antal hela varv får vi alla lösningar:

$$x \approx 48,8^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } x \approx -48,8^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Kortare skrivsätt: $x \approx \pm 48,8^\circ + n \cdot 360^\circ$



Grundekvation
för sinus

Allmänt gäller:

$$\sin x = k, -1 \leq k \leq 1$$

Låt v vara en lösning.

Då kan samtliga lösningar skrivas

$$x = v + n \cdot 360^\circ$$

eller

$$x = 180^\circ - v + n \cdot 360^\circ, n \text{ heltal}$$

Exempel

$$\sin x = 0,721$$

Räknaren ger en lösning $v \approx 46,1^\circ$.

Samtliga lösningar är

$$x \approx 46,1^\circ + n \cdot 360^\circ$$

eller

$$x \approx 133,9^\circ + n \cdot 360^\circ, n \text{ heltal}$$

Grundekvation
för cosinus

Allmänt gäller:

$$\cos x = k, -1 \leq k \leq 1$$

Låt v vara en lösning.

Då kan samtliga lösningar skrivas

$$x = \pm v + n \cdot 360^\circ$$

n heltal

Exempel

$$\cos x = 0,659$$

Räknaren ger en lösning $v \approx 48,8^\circ$.

Samtliga lösningar är

$$x \approx \pm 48,8^\circ + n \cdot 360^\circ$$

n heltal

Ekvationen $\tan x = k$ behandlas i nästa kapitel.



När vi löser trigonometriska ekvationer är det naturligt att använda räknare och t ex $\sin^{-1} k$ för att hitta en vinkel.

De flesta räknare har också olika **solve**-funktioner, och kraftfulla symbolhanterande räknare kan t o m lösa trigonometriska ekvationer fullständigt.

Använd gärna sådana funktioner för att kontrollera svaret eller komma vidare om du kör fast, men träna på lösningsmetoderna och försök förstå dem, så att du kan lösa ekvationerna utan hjälpmedel.

```
solve(sin(x)=-1)
{x=360*constn(1)-90}
```

1401

Ange med en decimal samtliga lösningar till följande ekvationer

a) $\sin x = 0,293$

b) $\sin x = -0,331$

a) $\sin x = 0,293$

Vi får två fall.

Fall 1: Räknaren ger $x = \sin^{-1}(0,293) = 17,037...^\circ \approx 17,0^\circ$
 $x \approx 17,0^\circ + n \cdot 360^\circ$

Fall 2: $x \approx 180^\circ - 17,0^\circ + n \cdot 360^\circ$
 $x \approx 163,0^\circ + n \cdot 360^\circ$

Svar: $x \approx 17,0^\circ + n \cdot 360^\circ$ eller $x \approx 163,0^\circ + n \cdot 360^\circ$

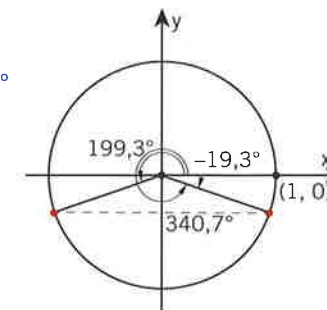
b) $\sin x = -0,331$

Fall 1: $x = \sin^{-1}(-0,331) \approx -19,3^\circ$
 $x \approx -19,3^\circ + n \cdot 360^\circ$

Fall 2: $x \approx 180^\circ - (-19,3^\circ) + n \cdot 360^\circ$
 $x \approx 199,3^\circ + n \cdot 360^\circ$

Svar: $x \approx -19,3^\circ + n \cdot 360^\circ$ eller $x \approx 199,3^\circ + n \cdot 360^\circ$

Om vi i det första fallet vill svara med en positiv vinkel så kan vi lägga till en period.
 $x \approx -19,3^\circ + 360^\circ = 340,7^\circ$



1402

Ange med en decimal samtliga lösningar till följande ekvationer

a) $\cos x = 0,369$

b) $\cos x = -0,369$

a) $\cos x = 0,369$

b) $\cos x = -0,369$

$$x = \cos^{-1}(0,369) \approx 68,3^\circ$$

$$x = \cos^{-1}(-0,369) \approx 111,7^\circ$$

Vi får två fall.

$$x = \pm 68,3^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = \pm 111,7^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Svar: a) $x = \pm 68,3^\circ + n \cdot 360^\circ$ b) $x = \pm 111,7^\circ + n \cdot 360^\circ$

1403

Undersök om ekvationen $\sin x = 0,42$ har några lösningar i intervallet $720^\circ < x < 900^\circ$. Arbeta med hela grader.

$\sin x = 0,42$ ger

$$x \approx 25^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } x \approx 155^\circ + n \cdot 360^\circ$$

För att hitta eventuella lösningar i intervallet $720^\circ < x < 900^\circ$ kan vi välja olika värden på n bland heltalen: $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Här prövar vi med $n = 1, 2, 3, \dots$

$$x \approx 25^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ger då vinklarna } 385^\circ, 745^\circ, 1105^\circ, \dots$$

$$x \approx 155^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ger då vinklarna } 515^\circ, 875^\circ, 1235^\circ, \dots$$

Svar: Inom intervallet $720^\circ < x < 900^\circ$ finns lösningarna 745° och 875° .

1404

Lös ekvationerna och svara med en decimal.

a) $\sin \frac{x}{2} = -0,520$ b) $\cos(3x - 41,2^\circ) = 0,316$

a) $\sin \frac{x}{2} = -0,520$

Fall 1

$$\frac{x}{2} \approx -31,33^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx -62,66^\circ + n \cdot 720^\circ$$

Fall 2

$$\frac{x}{2} \approx 211,33^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 422,66^\circ + n \cdot 720^\circ$$

Svar: $x \approx -62,7^\circ + n \cdot 720^\circ$ eller $x \approx 422,7^\circ + n \cdot 720^\circ$

b) $\cos(3x - 41,2^\circ) = 0,316$ ger

$$3x - 41,2^\circ \approx \pm 71,58^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Fall 1

$$3x - 41,2^\circ \approx 71,58^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$3x \approx 112,78^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 37,6^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Fall 2

$$3x - 41,2^\circ \approx -71,58^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$3x \approx -30,38^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx -10,1^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Svar: $x \approx 37,6^\circ + n \cdot 120^\circ$ eller $x \approx -10,1^\circ + n \cdot 120^\circ$

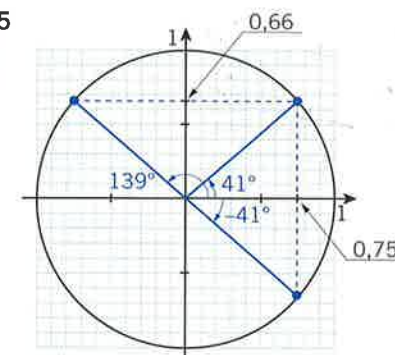
Använd räknarens samtliga decimaler eller minst en extra jämfört med noggrannheten i svaret.

Båda leden (även perioden) multipliceras med 2.

Båda leden (även perioden) divideras med 3.

1405

a



Använd figuren och ange två olika vinklar som ger att

a) $\sin x = 0,66$ b) $\cos x = 0,75$

Ange samtliga lösningar till ekvationen

c) $\sin x = 0,66$ d) $\cos x = 0,75$

Ange med en decimal samtliga lösningar till ekvationen.

1406 a) $\sin x = 0,789$ b) $\sin x = -0,342$

1407 a) $\cos x = 0,439$ b) $\cos x = -0,780$

1408 a) $\cos x = 0,351$ c) $2 \sin x = -0,44$
b) $\sin x = 0,351$ d) $0,5 \cos x = -0,32$

1409 a) $\cos 3x = 0,40$ b) $\sin 2x = -0,60$

1410 a) $\cos \frac{x}{3} = -0,28$ b) $\sin \frac{x}{2} = -1$

1411 Motivera med hjälp av enhetscirkeln varför ekvationerna $\sin x = 1,4$ och $\sin x = -2$ saknar lösningar.

1412 Jonna löser ekvationen $\cos 2x = 0,5$ och glömmar två saker. Vilka?

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 0,5 \\ 2x &= 60^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x &= 30^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

1413 Ekvationen $\cos x = 1$ har lösningen $x = 0^\circ + n \cdot 360^\circ$. Ange alla lösningar i intervallet $0^\circ \leq x \leq 1\,000^\circ$.

1414 Lös ekvationen fullständigt.

b

Svara med en decimal.

a) $\sin(x - 51,0^\circ) = 0,700$

b) $\cos(x + 51,0^\circ) = 0,700$

c) $\sin(5x - 71,3^\circ) = -0,370$

d) $\cos(0,5x + 33,3^\circ) = 0,740$

Undersök om ekvationen har någon lösning i det angivna intervallet. Arbeta med hela grader.

1415 a) $\cos x = 0,80$ $270^\circ < x < 360^\circ$

b) $\sin x = -0,70$ $0^\circ < x < 270^\circ$

1416 a) $\sin x = 0,85$ $600^\circ < x < 720^\circ$

b) $1 + \cos x = 0,28$ $-600^\circ < x < -480^\circ$

1417 Ange en ekvation som har

a) en lösning $x \approx 760^\circ$

b) samtliga lösningar $x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$.

1418 Har $\sin 4x = 0,5$ fyra gånger så många lösningar som $\sin x = 0,5$ i intervallet $0^\circ \leq x < 360^\circ$? Motivera.

1419 Bestäm ekvationens lösning i det angivna intervallet. Svara i hela grader.

c

a) $\sin 2x = 0,61$ $450^\circ \leq x \leq 900^\circ$

b) $\cos(4x + 11^\circ) = 0,42$ $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$

c) $14 - 2 \cos 2x = 12,38$ $360^\circ \leq x \leq 720^\circ$

1420 Undersök för vilka vinklar x som

a) $\sin 2x = \sin 70^\circ$

b) $\sin x = \sin 3x$

c) $\cos 2x = \cos(x - 30^\circ)$

Ekvationer som omformas med formler

1421

Lös ekvationerna med nollproduktmetoden, dvs genom faktorisering.

a) $4x^2 - x = 0$ b) $5 \cos^2 x - \cos x = 0$

Faktorisera!

a) $4x^2 - x = 0$ b) $5 \cos^2 x - \cos x = 0$
 $x(4x - 1) = 0$ $\cos x(5 \cos x - 1) = 0$

Nollproduktmetoden: Om $a \cdot b = 0$, så är $a = 0$ eller $b = 0$.

$x = 0$ eller $4x - 1 = 0$
 $x = 1/4$

$\cos x = 0$ eller $5 \cos x - 1 = 0$
 $\cos x = 1/5$

$x = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ som kan skrivas
 $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$
 eller
 $x \approx \pm 78,5^\circ + n \cdot 360^\circ$

Svar: a) $x = 0$ eller $x = 1/4$ b) $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$ eller
 $x \approx \pm 78,5^\circ + n \cdot 360^\circ$

1422

Lös ekvationen $2 \sin 2x = \sin x$.

$2 \sin 2x = \sin x$

Använd formeln $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ i VL.

$2 \cdot 2 \sin x \cos x = \sin x$

$4 \sin x \cos x - \sin x = 0$

Faktorisera VL.

$\sin x(4 \cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ eller $4 \cos x - 1 = 0$

$x = 0^\circ + n \cdot 360^\circ$

$\cos x = \frac{1}{4}$

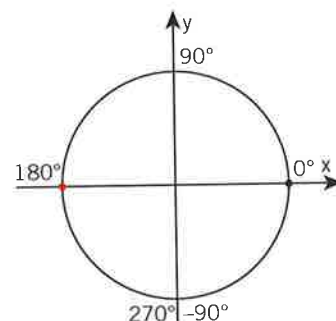
eller

$x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$

$x \approx \pm 75,5^\circ + n \cdot 360^\circ$

Lösningarna till $\sin x = 0$ kan sammanfattas med
 $x = n \cdot 180^\circ$ (se figur)

Svar: $x = n \cdot 180^\circ$ eller $x \approx \pm 75,5^\circ + n \cdot 360^\circ$.



1423

Lös ekvationen $\cos^2 x = 3 \sin x - 3$.

$\cos^2 x = 3 \sin x - 3$

Använd formeln $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ i VL.

$1 - \sin^2 x = 3 \sin x - 3$

$\sin^2 x + 3 \sin x - 4 = 0$

Sätt $\sin x = t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$t = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$

$t = 1$ eller $t = -4$

$\sin x = 1$

$\sin x = -4$

$x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$

Saknar lösning, då $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Svar: $x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$.

1424 För vilka x är

a)

$\sin x = 0$

b) $\cos x = 0$

c) $\sin x \cdot \cos x = 0$?

Lös ekvationen, svara med en decimal.

1425 a) $2 \sin x (\sin x - 0,3) = 0$

b) $1,5 \cos x (0,5 - \cos x) = 0$

c) $4 \cos x (2 \sin x - 5) = 0$

1426 a) $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$

b) $\cos^2 x = 5 \cos x$

1427 Skriv om vänsterledet i ekvationen

$2 \sin x \cdot \cos x = 2$

och förklara varför ekvationen saknar lösningar.

1428 Lös ekvationen

a)

$\sin 2x = 2 \sin x$

b) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

Välj lösningsmetod och lös ekvationen.

1429 $3 \cos^2 x = 2 \sin x + 2$

1430 $5 \sin 4x = 3 \sin 2x$

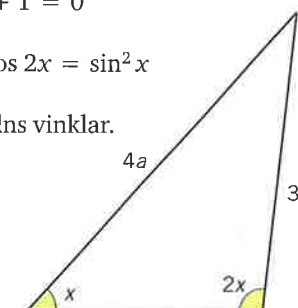
1431 $5 \cos 2x + 3 \sin x - 4 = 0$

1432 $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$

1433 $1 + 2 \cos x + \cos 2x = \sin^2 x$

1434 Bestäm triangelns vinklar.

c



1435 I triangeln ABC är

$AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm och $AC = 4$ cm.

a) Beräkna vinklarna A och B med fyra decimaler.

b) Resultatet i a) antyder ett samband mellan vinklarna A och B. Formulera och bevisa detta.

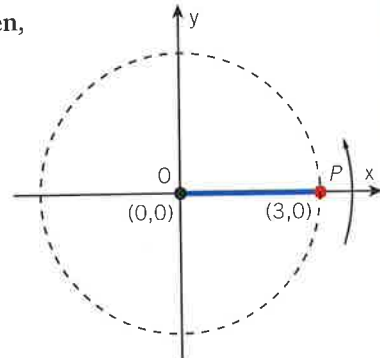
1.5 Tillämpningar och problemlösning

När vi möter nya tillämpningar och problem är det extra viktigt med en god problemlösningstrategi. Vi påminner med ett exempel om en strategi med fyra steg som du tidigare mött.

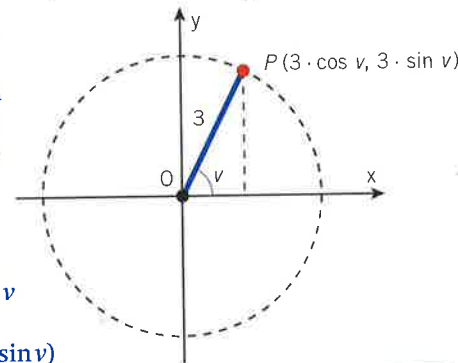
1501

En vinkels storlek kan bero av tiden, t ex vid rotation. Radien OP med längden 3 l.e. vrider sig moturs med hastigheten 20° per sekund, se figur.

- Ställ upp en formel för hur y -koordinaten för punkten P varierar med tiden t sekunder.
- Hur lång tid under ett varv är y -koordinaten för punkten $P \geq 2$?



- När radien OP vrider sig kommer y -koordinaten för punkten P att variera mellan -3 och 3 . Vi ritar en figur för att lättare se hur vinkeln och y -koordinaten beror av tiden.



För en godtycklig vinkel v är koordinaterna för punkten P : $(3 \cdot \cos v, 3 \cdot \sin v)$

Efter t sekunder är vinkeln $v = 20t$

v ökar med $20^\circ/s$

y -koordinaten för punkten P är då: $y = 3 \cdot \sin 20t$

Formeln ger att y varierar mellan -3 och 3 då $\sin 20t$ varierar mellan -1 och 1 .

- $y = 2$ ger ekvationen

$$2 = 3 \cdot \sin 20t$$

$$\sin 20t = 2/3 \text{ ger}$$

$$(20t)^\circ \approx 42^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{eller} \quad (20t)^\circ \approx 138^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$t \approx 2,1 + n \cdot 18 \quad \text{eller} \quad t \approx 6,9 + n \cdot 18$$

Tolkning: Under det första varvet är $y = 2$ vid $t = 2,1$ s och $t = 6,9$ s, dvs $y \geq 2$ under $4,8$ s. Detta upprepas varje varv, dvs var 18 :e sekund.

Svar: a) $y = 3 \sin 20t$ b) $4,8$ s.

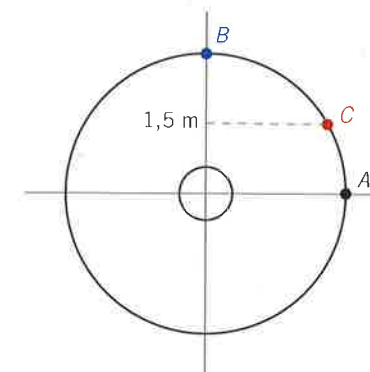
- Förstå problemet
- Gör upp en plan

3. Genomför planen

4. Värdera

- 1502 Ett vattenhjul med radie 3 m snurrar 10 varv per minut.

- Hur många grader/s vrider sig hjulet? Hur lång tid tar det för hjulet att vrida sig så att punkten A förflyttas till
- B
- C ?



- 1503 För vilka vinklar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ är

- $\cos v < -0,5$
- $0 \leq \sin v < 0,5$?

- 1504 Ekvationen $12 = 14 \sin(k + x) + 5$ har en lösning $x = 2^\circ$. Vilket värde har k ?

- 1505 Peter påstår att $n(1 - n)^2 \geq 0$ för alla heltal $n \geq 1$. Har han rätt?

- 1506 Ett pariserhjul med radien 30 meter snurrar ett varv på 3 minuter.

En person kliver på hjulet i dess nedersta läge vid marken.

Hjulet snurrar sedan i 5 minuter innan det stannar. Hur högt över marken är personen då?

- 1507 Bestäm största och minsta värde för uttrycket

a) $23 + 2 \sin x$

b) $\frac{100}{2,25 - 1,75 \cos 2x}$

- 1508 Finns det någon vinkel v som har samma tangensvärde som sinusvärde?

- 1509 Finn alla värden på a för vilka ekvationen $\cos x = \frac{2a - 3}{5}$ har någon lösning.

- 1510 Beräkna summan utan hjälpmedel.

c) $\sin^2(10^\circ) + \sin^2(20^\circ) + \sin^2(30^\circ) + \dots + \sin^2(90^\circ)$

- 1511 Visa att om A är en vinkel med $0^\circ < A < 90^\circ$ så är

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos A}\right) > 5$$

(Skolornas Matematiktävling)

- 1512 Definition:

En vinkel A är "snäll" om både $\sin A$ och $\cos A$ är ett rationellt tal, dvs kan skrivas som ett bråk.

Bevisa eller motbevisa påståendet:

- "Om A är snäll, så är supplementvinkeln snäll."

- "Om A är snäll, så är $A/2$ snäll."

Aktivitet

* DISKUTERA



Sant eller falskt?

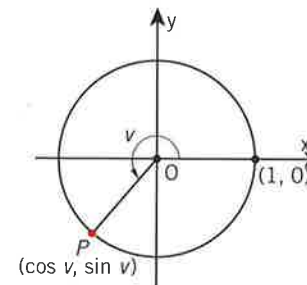
Diskutera i par eller grupp. Sant eller falskt?
Motivera svaret.

- 1 Ekvationen $\cos v = 0,4$ har två lösningar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$.
- 2 Vinklarna 28° , 152° och 388° har alla samma sinusvärde.
- 3 Om $\cos x = 0$ så är $\sin x = 1$.
- 4 Om $\cos v$ har värdet a så har $\cos(-v)$ också värdet a .
- 5 För alla vinklar i andra kvadranten är $\sin v > \cos v$.
- 6 $\tan(-v)$ kan skrivas $-\tan v$.
- 7 $\sin(u+v) + \sin(u-v)$ kan utvecklas och förenklas till $\sin 2u$.
- 8 För alla värden på $n < 2$ så är $(n+1)^2 < 9$.
- 9 I ett indirekt bevis utnyttjar vi att $P \Rightarrow Q$ är logiskt ekvivalent med $\neg P \Rightarrow \neg Q$.
- 10 Lösningarna till ekvationen $\sin 2x = 0,5$ är också lösningar till ekvationen $\sin x = 0,5$.
- 11 Ekvationen $a \sin 4x - 1 = 2$ saknar lösning då $a < 3$.
- 12 Om $\cos x = \frac{1}{4}$ så är $\cos 2x = \frac{7}{8}$.
- 13 $\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x$ kan förenklas till $\frac{1}{\sin x}$.
- 14 Ekvationen $\cos^3 x = \cos x$ har lösningen $x = n \cdot 90^\circ$.

Sammanfattning 1

Enhetscirkeln

Om radien OP har vridits en vinkel v i positiv (moturs) eller negativ riktning (medurs), så gäller



$\sin v = y$ -koordinaten för P

$\cos v = x$ -koordinaten för P

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, v \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ$$

De trigonometriska funktionerna är *periodiska*.

$$\sin(v + n \cdot 360^\circ) = \sin v, n \text{ heltal, perioden } 360^\circ$$

$$\cos(v + n \cdot 360^\circ) = \cos v, n \text{ heltal, perioden } 360^\circ$$

$$\tan(v + n \cdot 180^\circ) = \tan v, n \text{ heltal, perioden } 180^\circ$$

▲ Trigonometriska formler

$$\sin(180^\circ - v) = \sin v$$

$$\cos(180^\circ - v) = -\cos v$$

$$\sin(-v) = -\sin v$$

$$\cos(-v) = \cos v$$

$$\sin(90^\circ - v) = \cos v$$

$$\cos(90^\circ - v) = \sin v$$

Trigonometriska ettan

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

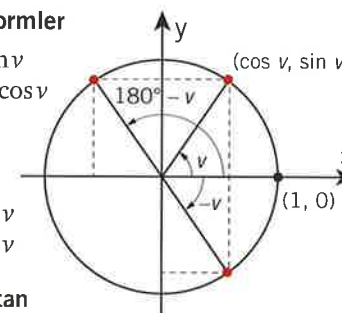
Additions- och subtraktionsformlerna

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$



Formler för dubbla vinkeln

$$\sin 2u = 2 \sin u \cdot \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u$$

Bevis och bevismetoder

Direkt bevis:

Visa direkt att antagandet ger slutsatsen.

Indirekt bevis:

Visa att om slutsatsen är falsk så är också antagandet falskt.

Motsägelsebevis:

Antag att påståendet/satsen är falsk och visa att det leder till en motsägelse.

Trigonometriska ekvationer

Grundekvationerna

$$\sin x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$$

En lösning ges av $v = \sin^{-1}(k)$

Samtliga lösningar ges av

$$x = v + n \cdot 360^\circ$$

eller

$$x = 180^\circ - v + n \cdot 360^\circ$$

$$\cos x = k \quad (-1 \leq k \leq 1)$$

En lösning ges av $v = \cos^{-1}(k)$

Samtliga lösningar ges av

$$x = \pm v + n \cdot 360^\circ$$

Tillämpningar och problemlösning

Allmän problemlösningsstrategi

- 1 Förstå problemet
- 2 Gör upp en plan
- 3 Genomför planen
- 4 Värdera resultatet

Kan du det här? 1

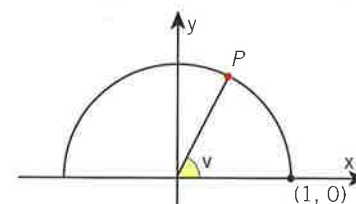
Moment	Begrepp som du ska kunna använda och beskriva	Du ska ha strategier för att kunna
Trigonometri och trianglar	Enhetscirkeln $\sin v$, $\cos v$, $\tan v$ $\sin^{-1} v$, $\cos^{-1} v$, $\tan^{-1} v$	- använda enhetscirkeln för vinklar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$ - bestämma trigonometriska funktioners värden, exakt och med räknare - bestämma vinklar.
Trigonometriska formler	Period ($\sin v$, $\cos v$, $\tan v$) Trigonometriska identiteter Trigonometriska ettan Additions- och subtraktionsformler Formler för dubbla vinkeln	- använda enhetscirkeln för positiva och negativa vinklar - visa samband med hjälp av enhetscirkeln - beräkna trigonometriska värden och vinklar med hjälp av formler - använda formler för att visa likheter.
Bevis och bevismetoder	Direkt bevis Indirekt bevis Motsägelsebevis	genomföra bevis med olika metoder.
Trigonometriska ekvationer	Trigonometriska ekvationer	- lösa trigonometriska ekvationer och bestämma fullständiga lösningar - finna lösningar i ett givet intervall - lösa ekvationer som kan omformas med formler.
Tillämpningar och problemlösning		lösa olika matematiska problem och tillämpningar.

Diagnos 1

Trigonometri och trianglar

- 1 a) Ange två olika vinklar som har samma sinusvärde.
b) Har vinklarna i a) samma tangensvärde?

2 Punkten P har koordinaterna $(a, 2a)$.



- a) Bestäm vinkeln v .
b) Bestäm a .

Trigonometriska formler

3 Bestäm med hjälp av enhetscirkeln

- a) $\cos 900^\circ$ b) $\sin(-270^\circ)$

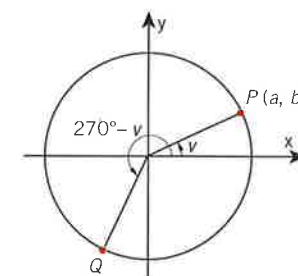
4 I vilka kvadranter i enhetscirkeln kan två vinklar ha samma

- a) cosinusvärde b) tangensvärde?

5 Bestäm $\sin v$ om $\cos v = 0,40$.

6 I figuren har punkten P koordinaterna (a, b) .

- a) Vilka koordinater har punkten Q ?
b) Visa att $\sin v = -\cos(270^\circ - v)$.



Om du behöver repetera kan du fortsätta med *Repetitionsuppgifter* på sidan 250.

7 Varje uttryck i kolumn A kan förenklas till ett uttryck i kolumn B. Vilka uttryck hör ihop?

Nr	A	B
1	$1 - \sin^2 x$	$1 + 2 \sin x \cos x$
2	$\cos^2 x (\tan^2 x + 1)$	$\frac{1}{\cos x}$
3	$1 + \tan^2 x$	1
4	$\frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
5	$(\cos x + \sin x)^2$	0
6	$\tan x \cdot \cos x + \sin(-x)$	$\cos^2 x$

Bevis och bevismetoder

8 Anta att
 P : Det är soligt $\Rightarrow$ Q : Vi äter glass.
Formulera med ord " $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ".

9 $2x + 3 \geq 9$
Visa med ett motsägelsebevis att $x \geq 3$.

Trigonometriska ekvationer

10 Lös ekvationen fullständigt

- a) $\cos x = 0,5$ d) $\cos 2x = 1$
b) $\sin x = -0,24$ e) $\cos(x - 30^\circ) = -0,12$
c) $\sin x = \sin 23^\circ$ f) $2 \sin 3x = 3$

11 Finns det någon vinkel v så att

$$\sin v = 0,1 \text{ och } 600^\circ < v < 700^\circ?$$

12 Lös ekvationen

- a) $\frac{\sin 2x}{\cos x} = 1$ b) $3 \cos^2 x - \cos x = 0$

Tillämpningar och problemlösning

13 Vilket är största respektive minsta värdet för $\sin v$ i intervallet $70^\circ \leq v \leq 170^\circ$?

14 För vilka värden på v är $\cos v$ växande?

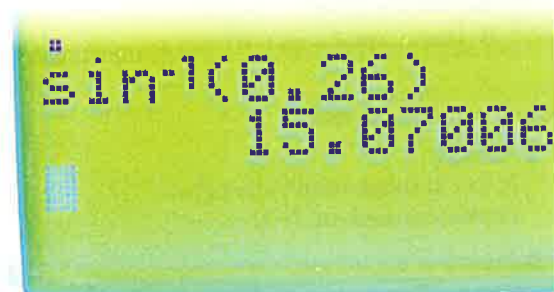
Blandade övningar 1 A

Del I Utan räknare

1 Bestäm $\sin x - \cos x$ då

a a) $x = 720^\circ$ b) $x = 540^\circ$

2 Ekvationen $\sin x = 0,26$ har enligt räknaren en lösning $x \approx 15^\circ$. Vilka lösningar har ekvationen i intervallet $0^\circ < x < 720^\circ$?



3 Lös ekvationen $1 + \cos x = 2$.

4 Vad blir $\sin(\sin^{-1} 0,12)$? Motivera.

5 Vad är $\neg P$ om P är

a) $x \geq 32$ b) $\sin x = 0,5$?

6 $P: x \geq 2$ och $Q: 2x + 3 \geq 7$

a) Skriv $\neg P$ och $\neg Q$ med symboler.

b) Bevisa med ett indirekt bevis att $P \Rightarrow Q$

7 Förenkla $\cos(x - 90^\circ) - \cos(x + 180^\circ)$.

8 Ordna följande tal i storleksordning:

b a) $\sin 24^\circ$, b) $\cos 460^\circ$ och c) $\sin 885^\circ$

Motivera ditt svar.

9 Visa hur sambandet

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

kan fås ur likheterna

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \text{ och}$$

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1. \quad (NP)$$

10 Formulera med ord $\neg Q \Rightarrow \neg P$

om $P \Rightarrow Q$ motsvaras av

"Om ingen klarade provet blir ingen godkänd".

11 Bestäm $\cos v$ då $\sin v = \frac{\sqrt{2}}{3}$ och $90^\circ < v < 180^\circ$.

12 Bestäm $\cos 2x$ om $\cos x = \frac{1}{4}$

13 Visa att

$$\cos x \cdot \sin 2x = 2 \sin x - 2 \sin^3 x$$

14 Bevisa att $\sin v + \cos v \leq \sqrt{2}$ för alla vinklar v .

c

15 Visa att

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\cos x}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Del II Med räknare

16 Lös ekvationen fullständigt. Svara med **a** en decimal.

a) $\sin x = 0,83$ b) $\cos 2x = -0,12$

17 Ange en ekvation som har en lösning

a) $x \approx 112^\circ$ b) $x \approx -98^\circ$

18 Bevisa med ett direkt bevis att differensen mellan två udda tal är ett jämnt tal.

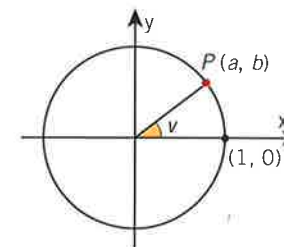
19 Vid en förenkling får Diana svaret

$$\frac{1}{\tan x} \text{ men facit säger } \frac{\cos x}{\sin x}$$

Har Diana fått fel svar? Motivera.

20 Förenkla $\cos(a + b) + \cos(a - b)$ och **b** skriv sedan produkten $2 \cos 75^\circ \cdot \cos 20^\circ$ som en summa.

21 Punkten P har koordinaterna (a, b) .



Uttryck med hjälp av koordinaterna för punkten P

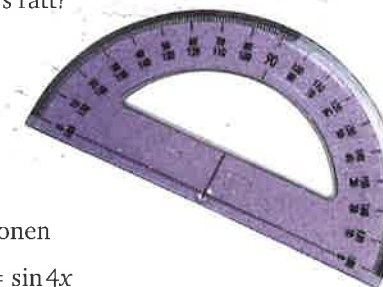
a) $\sin(v + 180^\circ)$ b) $\cos(v + 270^\circ)$

22 Har ekvationen $\cos(0,4x + 10^\circ) = 0,4$ någon lösning i intervallet $800^\circ < x < 1000^\circ$? Motivera.

23 Har $\tan v$ något största värde? Motivera.

24 Bevisa att om n^3 är ett udda heltal så är n ett **c** udda heltal.

25 Anders påstår att det inte finns någon vinkel som har den egenskapen att sinusvärdet fördubblas om vinkeln fördubblas. Har Anders rätt?



26 Lös ekvationen

a) $\sin 5x = \sin 4x$

b) $\cos^2 x = \sin x + 1$

Utredande uppgifter **a** **b** **c**

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

27 a) Beräkna $\frac{\sin 85^\circ + \sin 95^\circ}{2 \cos 5^\circ}$

b) Beräkna värdet av uttrycket

$$\frac{\sin(90^\circ - x) + \sin(90^\circ + x)}{2 \cos x}$$

då $x = 20^\circ$ och då $x = 42^\circ$.

Vad upptäcker du?

c) Undersök om uttrycket

$$\frac{\sin(90^\circ - x) + \sin(90^\circ + x)}{2 \cos x}$$

har värdet 1 för alla värden på vinkeln x .

28 Undersök antalet lösningar till ekvationen

$$a \sin 2x = 5$$

då värdet på konstanten a varierar och

$$0^\circ \leq x \leq 360^\circ.$$

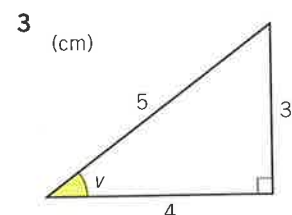
Blandade övningar 1 B

Del I Utan räknare

- 1 Ekvationen $\cos x = 0,64$ har enligt räknaren **a** en lösning $x \approx 50^\circ$.

Vilka lösningar har ekvationen i intervallet $-360^\circ < x < 360^\circ$?

- 2 Ange samtliga lösningar till ekvationen $\sin 2x = 0,5$.



Bestäm

- a) $\sin v$ c) $\sin(90^\circ - v)$
b) $\cos v$ d) $\sin 2v$

- 4 Bevisa att $x \geq 3$ ger $6(x+1) \geq 24$ med ett

- a) direkt bevis b) indirekt bevis.

- 5 Anta att du vet att $\cos 40^\circ \approx 0,77$.

Bestäm då

- a) $\cos 320^\circ$ b) $\sin 50^\circ$

- 6 Förenkla $\sin(x + 90^\circ) + \cos(x - 180^\circ)$.

- 7 Vilket av följande uttryck A–F kan förenklas till 1?

- b** A $(\sin x + \cos x)^2$
B $(\sin x - \cos x)^2$
C $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$
D $\cos x \cdot (\tan x \cdot \sin x + \cos x)$
E $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$
F $2(\sin x + \cos x)$

(NP)

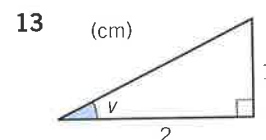
- 8 Bestäm ett närmvärde till $\sin 110^\circ$ om du vet att $\sin 20^\circ \approx 0,34$ och $\cos 20^\circ \approx 0,94$.

- 9 Bestäm värdet av $\sin v$ om v är en vinkel i tredje kvadranten och $\cos v = -\frac{2}{3}$

- 10 Visa med ett motsägelsebevis att $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ för alla reella värden på x .

- 11 Visa att $\sin x - 2 \sin^3 x = \sin x \cdot \cos 2x$

- 12 Ge exempel på en trigonometrisk ekvation som **c** har lösningen $x = n \cdot 120^\circ$.



För vinkeln v i figuren gäller att

$$\frac{\sin v + \cos v}{\sin v \cdot \cos v} = k \cdot \sqrt{5}$$

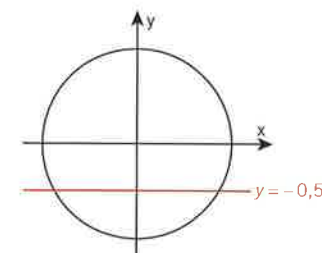
Bestäm talet k .

Del II Med räknare

- 14 Bestäm samtliga lösningar i intervallet **a** $0^\circ \leq x < 360^\circ$ till ekvationen $\cos x = 0,8$.

- 15 För vilka v i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ är

- a) $\sin v = -0,5$ b) $\sin v \leq -0,5$?



- 16 Ekvationen $\sin Ax = 0,1$ har en lösning $x = 20^\circ$. Vilket tal är A? Ge ett exempel.

- 17 Anta att $a^2 + b^2 = c^2$. Kan a , b och c alla vara udda heltal?

- 18 Lös ekvationen fullständigt.

- b** a) $\frac{\sin x}{\cos x} = 0$

- b) $2 \sin(4x - 32^\circ) = 0,8$

- 19 Beskriv ett samband mellan enhetscirkeln och trigonometriska ettan.

- 20 För vilka värden på a saknar ekvationen $2 \cos 3x = 3a$ lösningar?

- 21 Bevisa att $\cos^2 u - \sin^2 u + 3 \leq 4$

- 22 Härled en formel för $\sin 4x$, "kvadrupla vinkeln för sinus". Anta att vi vet $\sin x$ och/eller $\cos x$.

- 23 Lös ekvationen $\frac{\sin^2 x}{2} = \cos x$

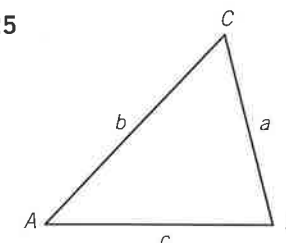
- 24 Bevisa att om 4 är en delare till $(a-1)$ så är 4 en delare också till $a^2 + 3$.

Utredande uppgifter **a b c**

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

25



- a) En triangel har sidorna 6,0 cm, 7,0 cm och 8,0 cm. Bestäm triangelns minsta vinkel med cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

- b) På en internsajt med matematikinnehåll finner Susanna formeln $a^2 = (b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$

Visa att formeln ger samma resultat som i a).

- c) Bevisa formeln i uppgift b)

- 26 Undersök lösningar till ekvationen $\sin 2x = a$. Vad är största möjliga differens, i grader, mellan två intilliggande lösningar?

- 27 Bilda en "enhetscirkel" med radien 2.

- a) Vilka koordinater har en punkt på denna cirkel för en godtycklig vinkel v ?

- b) Härled trigonometriska ettan med hjälp av en godtycklig vinkel v och koordinaterna för tillhörande punkt P.