



TRIGONOMETRI OCH GRAFER

Centralt innehåll

- * Trigonometriska funktioners grafer och dess egenskaper.
- * Grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
- * Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska och sammansatta funktioner.
- * Strategier för matematisk problemlösning.

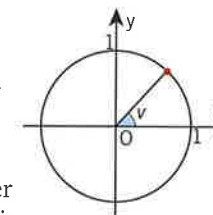


Inledande aktivitet

FRÅN ENHETSCIRKEL TILL KURVA

1 Använd enhetscirkeln och din räknare.

- a) Gör en tabell där x är vinklarna $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \dots, 360^\circ$ och y är vinklarnas sinusvärde.



- b) Rita på ett rutat papper ett koordinatsystem där en ruta i x -led motsvarar 30° och en ruta i y -led motsvarar 0,2.

Pricka in tabellens punkter och skissa grafen.

- c) Kontrollera grafen till $y = \sin x$ med grafräknare.

- d) Undersök med grafräknare hur grafen till $y = \sin x$ ser ut i intervallet $-720^\circ \leq x \leq 720^\circ$. Förklara.

2 Använd din grafräknare.

- a) Jämför graferna till $y = 2 \sin x$ och $y = 0,5 \sin x$ med $y = \sin x$. Rita en skiss och beskriv likheter och skillnader.
- b) Jämför graferna till $y = \sin 2x$ och $y = \sin 0,5x$ med $y = \sin x$. Rita en skiss och beskriv likheter och skillnader.
- c) Hur beror grafen till $y = A \sin kx$ av värdet på A och k ? Formulera en slutsats.

238876744
894789475
7547
15343274
112
55
777
482398678567
894789475849

2.1 Trigonometriska kurvor

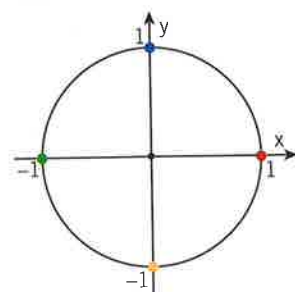
Sinus- och cosinuskurvor

Många fenomen i naturen är periodiska och upprepar sig regelbundet. Några exempel är dagens längd under ett år, ebb och flod samt olika svängningar och vågrörelser.

För att kunna beskriva dessa fenomen med matematiska modeller behöver vi periodiska funktioner.

Vi börjar med att undersöka hur $\sin x$ varierar under ett varv i enhetscirkeln.

Enhetscirkel



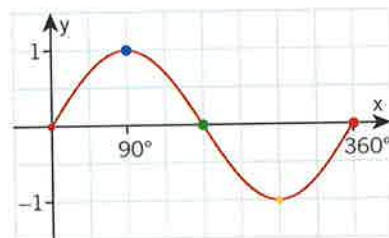
Vi avläser de markerade punkternas y-koordinater och gör en tabell och graf.

sinuskurvan

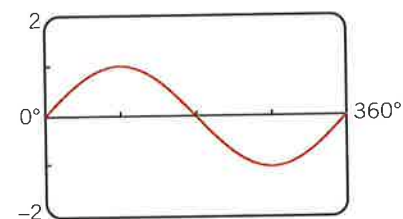
Värdetabell

x	$y = \sin x$
0°	0
90°	1
180°	0
270°	-1
360°	0

Graf med fem punkter

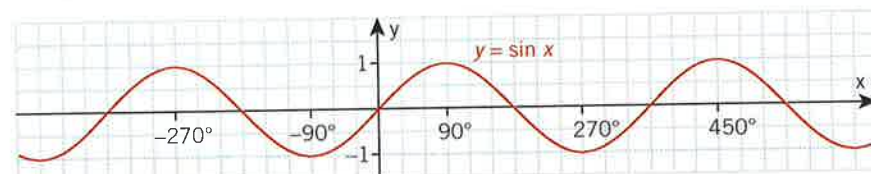


Kontroll med grafräknare



Vi har nu ritat en sinuskurva i ett intervall med längden 360° . Kurvens utseende upprepas obegränsat i båda riktningarna. Vi säger att sinusfunktionen är periodisk med *perioden* 360° .

period



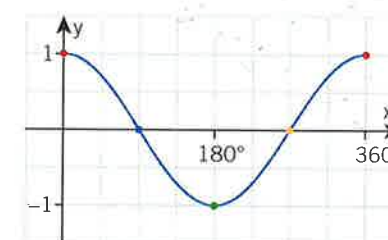
På liknande sätt får vi för cosinusfunktionen:

cosinuskurvan

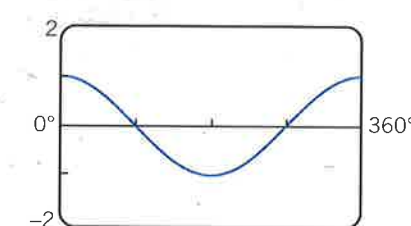
Värdetabell

x	$y = \cos x$
0°	1
90°	0
180°	-1
270°	0
360°	1

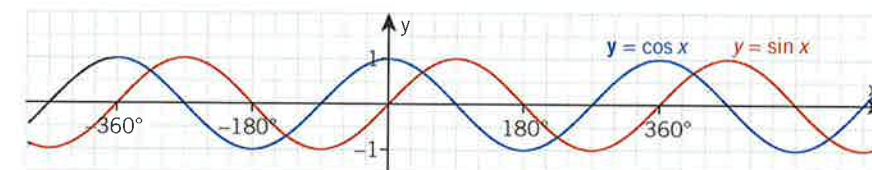
Graf med fem punkter



Grafitande räknare



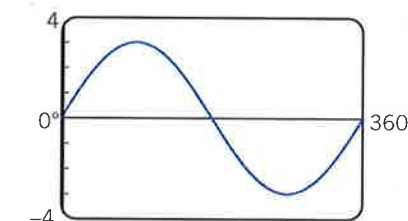
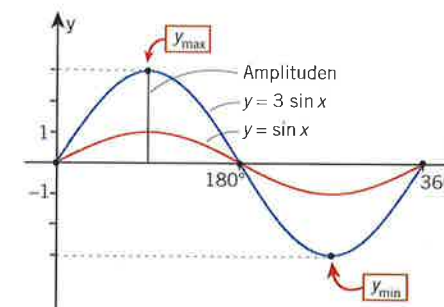
Om vi ritar både sinuskurvan och cosinuskurvan i samma koordinatsystem, ser vi att de är förskjutna i x -led i förhållande till varandra. Cosinuskurvan får vi genom att förskjuta sinuskurvan 90° åt vänster.



Exempel 1 Hur skiljer sig kurvan $y = 3 \sin x$ från kurvan $y = \sin x$?

Svaret är enkelt: y -koordinaterna till kurvan $y = 3 \sin x$ får vi genom att multiplicera alla y -koordinater till kurvan $y = \sin x$ med 3.

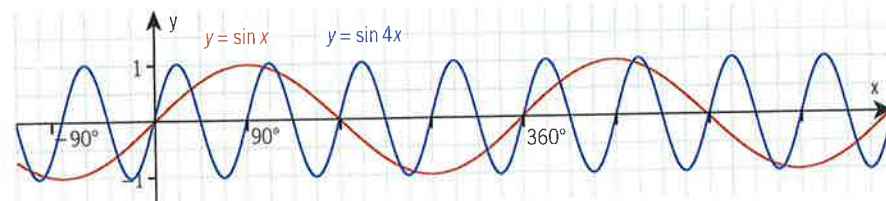
x	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$3 \sin x$	0	3	0	-3	0



amplitud En sinuskurvas *amplitud* är $\frac{\text{största värde} - \text{minsta värde}}{2}$

$y = 3 \sin x$ har amplituden 3, maximivärdet 3 och minimivärdet -3.

Exempel 2 Hur skiljer sig kurvan $y = \sin 4x$ från kurvan $y = \sin x$?
 Utseendet på kurvan $y = \sin x$ upprepas efter 360° .
 Utseendet på kurvan $y = \sin 4x$ upprepas då $4x = 360^\circ$, alltså efter 90° .
 Vi ritar graferna.



Vi ser i figuren att funktionen $y = \sin 4x$ har perioden 90° .

Perioden kan beräknas $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

På motsvarande sätt har $y = \cos \frac{x}{2}$ perioden $\frac{360^\circ}{1/2} = 720^\circ$

Amplitud och period påverkas inte av att en kurva förskjuts.

$y = A \sin kx$ har amplituden A och perioden $\frac{360^\circ}{k}$

$y = A \cos kx$ har amplituden A och perioden $\frac{360^\circ}{k}$

Sammanfattning

2101

Funktionen $y = 1,5 \sin 2x$ är given.

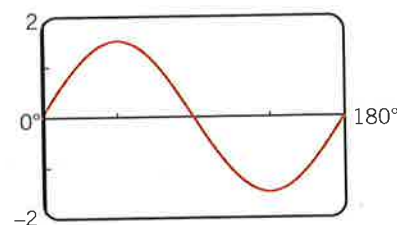
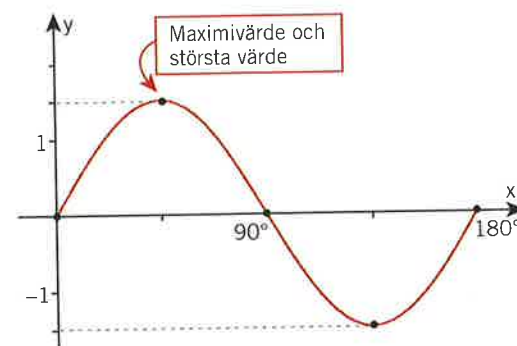
- Ange amplitud, största värde och minsta värde.
- Bestäm perioden.
- Skissa kurvan för hand och kontrollera med räknare.

Vi jämför med $y = A \sin kx$

a) Amplituden $A = 1,5$, största värdet $= 1,5$ och minsta värdet $= -1,5$.

b) $k = 2$ perioden $= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

c) Dela intervallet 0° till 180° i fyra lika delar. Markera fem punkter så att kurvan kan skissas. Kontrollera med räknaren, inställd på grader (deg).



2102 Du vet att $y = \sin x$ har perioden 360° .

a Förklara hur du då får perioden för

- $y = \sin 10x$
- $y = \sin 0,1x$

2103 Har $y = \sin 3x$ och $y = \cos 3x$ samma period?

2104 Bestäm perioden för

- $y = \sin 4x$
- $y = \sin 0,75x$
- $y = \cos 2x$
- $y = \cos \frac{x}{3}$

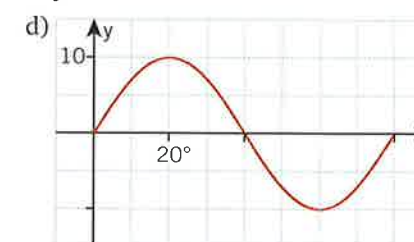
2105 a) Skissa för hand kurvan $y = 2 \sin x$.

b) Ange det största och minsta värde som $2 \sin x$ kan anta.

c) Ange kurvans amplitud.

2106 Bestäm kurvans amplitud och period.

- $y = 4 \cos x$
- $y = 100 \sin 2,5x$
- $y = -50 \cos 5x$



2107 Ge ett exempel på en funktion med perioden 200° och amplituden $2,5$.

2108 a) Skissa för hand två perioder av kurvan $y = 2 \sin 4x$

b) Kontrollera din skiss med grafräknare.

2109 Rita graferna till $y = \sin x$ och $y = \cos x$ i samma koordinatsystem.

- Vilka likheter respektive skillnader finns mellan graferna?
- För vilka x -värden i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ gäller att $\cos x < \sin x$?

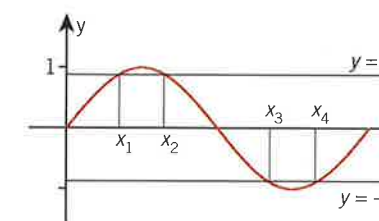
2110 a) Skissa kurvan till $y = -\sin x$

b) Ange det största och minsta värde som funktionen $y = -2 \sin x$ kan anta.

2111 Har ekvationen $4 \sin x = \sin x$ någon lösning? Motivera.

2112 För vilka värden på A saknar ekvationen $A \sin 5x = 1,2$ lösningar?

2113 Grafen visar hur kurvan $y = \sin x$ skär linjerna $y = \pm k$ i fyra punkter i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
 Bestäm summan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

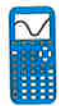


2114 Utgå från att $f(x) = \sin x$ och att $f(a) = 0,3$ och beräkna summan $f(a) + f(a + 360^\circ) + f(a + 720^\circ) + \dots + f(a + 3600^\circ)$.

2115 Beräkna utan att använda räknare summan

$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ$$

Grafitande räknare



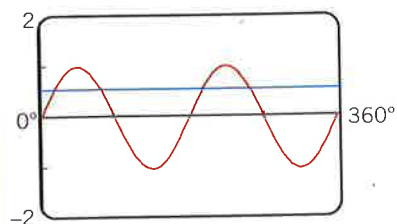
Du ska kunna lösa ekvationer och olikheter exakt med algebraiska metoder. Men som ett komplement är grafitande räknare ett utmärkt verktyg för att undersöka funktioner och på ett överskådligt sätt lösa ekvationer och olikheter grafiskt.

2116

Visa grafiskt att ekvationen $\sin 2x = 0,5$ har fyra lösningar i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Rita graferna till funktionerna

$y = \sin 2x$ och $y = 0,5$.



Graferna skär varandra på fyra ställen.

Det innebär att $\sin 2x = 0,5$ har fyra lösningar i intervallet.

2117 Lös grafiskt ekvationen

a $\cos 0,5x = 0,7$
i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

2118 Hur många lösningar har ekvationen $\sin x = \cos x$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$?

2119 Hur avläser du perioden för kurvan $y = \sin 0,6x$?

2120 Undersök:
För vilka positiva värden på a har ekvationen $\sin x = a$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
a) två lösningar
b) en lösning
c) ingen lösning?

2121 Lös ekvationen

b $\cos 2x = 0,5$ i intervallet $500^\circ \leq x \leq 700^\circ$
a) grafiskt
b) algebraiskt.

2122 Olikheten $\cos x < k$ har en lösning $120^\circ < x < 240^\circ$. Vilket värde har k ?

2123 För vilka värden på b saknar ekvationen $3 \sin 4x + b = 0$ lösningar?

2124 Det finns ett enkelt samband mellan antalet lösningar till ekvationen $\sin kx = a$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ och värdet på k , där k är ett positivt heltal och $0 < a < 1$. Ta reda på detta samband.

Aktivitet

UNDERSÖK

Trigonometriska kurvor

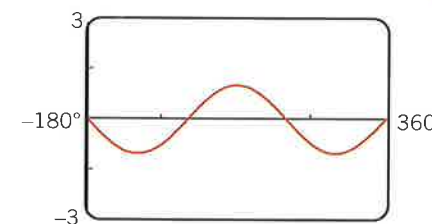


Använd fönsterinställningarna:

$X_{\min} = -180^\circ$ $X_{\max} = 360^\circ$

$Y_{\min} = -3$ $Y_{\max} = 3$

Tips: När du undersöker flera kurvor samtidigt är det lättare att se skillnad på dem om du låter kurvorna ha olika linjetyper.



Materiel: Grafräknare

1 a) Rita i samma fönster

$y = \sin x$ och $y = \sin x + 2$

Vad skiljer graferna åt?

b) Undersök för olika värden på a :

Hur är grafen till $y = \sin x + a$

förskjuten i förhållande till $y = \sin x$?

2 a) Rita i samma fönster

$y = \sin x$ och $y = \sin(x + 60^\circ)$

Gör avläsningar på graferna.

Vad skiljer graferna åt?

b) Undersök för olika positiva värden på v :

Hur är grafen till $y = \sin(x + v)$

förskjuten i förhållande till $y = \sin x$?

Motivera varför.

3 Undersök för olika positiva värden på v :

Hur är grafen till $y = \sin(x - v)$

förskjuten i förhållande till $y = \sin x$?

4 Undersök och ange en funktion på formen

$y = \sin(x \pm v)$

som har en graf identisk med grafen till

a) $y = \cos x$

b) $y = -\sin x$

5 Formulera kortfattat hur grafen till

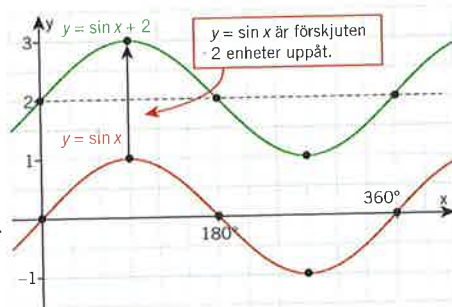
$y = A \sin(x \pm v) + b$

påverkas av värdena på A , v och b .

Förskjuta kurvor

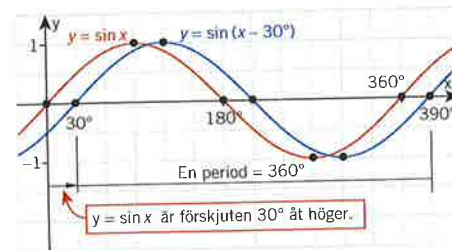
Vi ska visa hur man får kurvan till $y = \sin(x + v) + d$ genom att utgå från $y = \sin x$.

Exempel 1 Om vi utgår från $y = \sin x$ och adderar 2 till alla y -koordinater får vi funktionen $y = \sin x + 2$. Hela grafen förskjuts 2 enheter uppåt. Amplituden är fortfarande 1, men y -värdena varierar nu mellan 1 och 3.



Kontrollera graferna med din grafräknare.

Exempel 2 Om vi utgår från $y = \sin x$ och förskjuter den 30° åt höger förändras inte amplituden eller perioden. Vi får funktionen $y = \sin(x - 30^\circ)$ eftersom $(x - 30^\circ)$ går från 0° till 360° när x går från 30° till 390° .



Kontrollera graferna med din grafräknare.

Kurvan till $y = \sin(x + v) + d$ kan vi få genom att förskjuta $y = \sin x$
 $d > 0$ ger att kurvan är förskjuten d enheter uppåt.
 $d < 0$ ger att kurvan är förskjuten nedåt.
 $v > 0$ ger att kurvan är förskjuten v grader till vänster.
 $v < 0$ ger att kurvan är förskjuten till höger.
 Cosinuskurvor förskjuts på samma sätt.

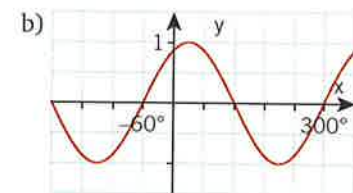
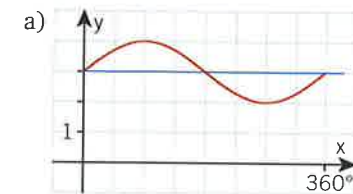
Sammanfattning

2125

- Beskriv hur grafen till $y = \sin(x + 45^\circ) - 2$ är förskjuten i förhållande till $y = \sin x$.
- Bestäm största och minsta värde för funktionen $y = 4 + 3 \sin x$
 - Grafen är förskjuten 2 enheter nedåt och 45° åt vänster i förhållande till $y = \sin x$.
 - $y = 3 \sin x$ har amplituden 3 och y -värdena varierar därför mellan -3 och 3 .
 $y = 4 + 3 \sin x$ är förskjuten 4 enheter uppåt i förhållande till $y = 3 \sin x$. y -värdena varierar därför mellan 1 och 7. Största värde = 7 och minsta värde = 1.

2126 Antag att du har ritat kurvan $y = \sin x$.
 a) $y = \sin x + 5$ c) $y = \sin(x + 55^\circ)$
 b) $y = \sin x - 2,5$ d) $y = \sin(x - 35^\circ)$?

2127 Ange sinuskurvas ekvation.



2128 Ange största och minsta värde för funktionen

- $y = 2 \sin x + 3$ c) $y = -5 - \cos x$
 b) $y = 3 - 4 \sin x$ d) $y = \cos x - 10$

2129 Ge ett eget exempel på en funktion vars största värde är 12 och minsta värde är -10 .

2130 Bestäm talet a så att $y = 5 \sin x + a$ aldrig skär x -axeln.

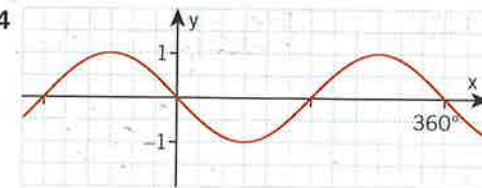
2131 Hur ska du förskjuta kurvan $y = \cos x$ för att få kurvan

- $y = \cos(x + 60^\circ) + 3,5$
 b) $y = \cos(x - 20^\circ) - 1,5$?

2132 Kurvan $y = \sin 3x$ förskjuts 36° åt höger. Vilken ekvation får den nya kurvan?

2133 Viktoria påstår att en sinuskurva alltid kan skrivas som en cosinuskurva. Har hon rätt?

2134



Hur ska du förskjuta

- $y = \sin x$ för att få grafen ovan
- $y = \cos x$ för att få grafen ovan?

2135 Bestäm A och v i $y = A \sin(x - v)$ om $y_{\max} = 3$ och $y(0) = -1,5$.
 ($A > 0$, $0^\circ < v < 90^\circ$)

2136 Hur är kurvan $y = 3 \cos(2x + 50^\circ)$ förskjuten i förhållande till $y = 3 \cos 2x$?

2137 För vilket värde på a är funktionens största värde 8, om $y = 5 - a \sin 2x$?

2138 Rita kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos(x + 270^\circ)$ i samma fönster på din grafitare.
 a) Vilken slutsats är rimlig att dra från graferna?
 b) Bevisa din slutsats.

2139 Bestäm p och q så att funktionen $y = p \sin(2x - 10^\circ) - 2q$ får minsta värdet 3 och största värdet 5.

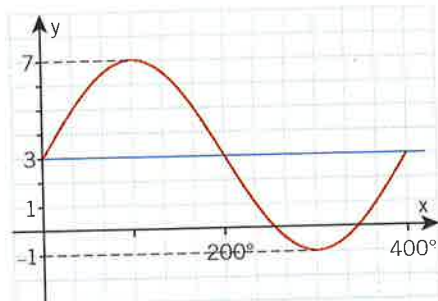
2140 Rita kurvan med din grafräknare. Ange en annan formel för funktionen. Motivera.

- $y = \cos^2 x + \sin^2 x$
 b) $y = \cos x + \sin(90^\circ - x)$
 c) $y = \cos x + \sqrt{3} \sin x$

Ekvationen för en sinusformad kurva

2141

Figuren visar grafen till en sinusfunktion. Bestäm en ekvation av typen $y = A \sin kx + d$ för denna kurva.



Perioden = 400° , dvs

$$\frac{360^\circ}{k} = 400^\circ \text{ och } k = 0,9.$$

Amplituden $A = \frac{\text{maximivärdet} - \text{minimivärdet}}{2}$

$$A = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Jämfört med $y = 4 \sin 0,9x$ gäller:

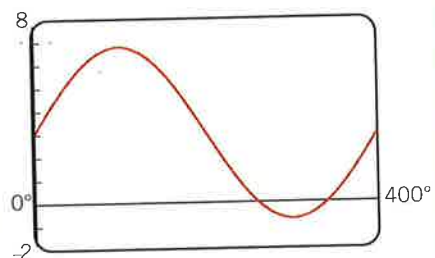
Förskjutningen i y-led är 3 enheter uppåt.

Ny "mittlinje" är $y = 3$, dvs $d = 3$.

$$y = 4 \sin 0,9x + 3$$

Till sist bör du kontrollera med grafitande räknare att denna ekvation ger rätt graf.

Svar: Kurvans ekvation är $y = 4 \sin 0,9x + 3$.



2142

Rita en skiss av kurvan $y = 5 \sin 2(x + 45^\circ) - 4$.

Kurvan har samma amplitud och period som $y = 5 \sin 2x$, dvs amplituden 5 och

$$\text{perioden } \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

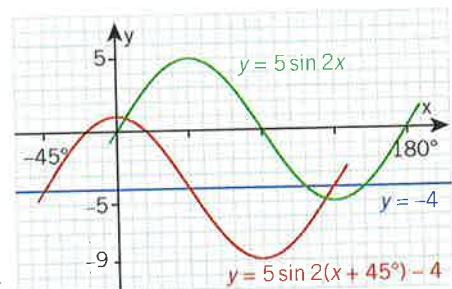
Förskjutningen i x-led är 45° till vänster.

Förskjutningen i y-led är 4 enheter nedåt.

Den nya "mittlinjen" är $y = -4$.

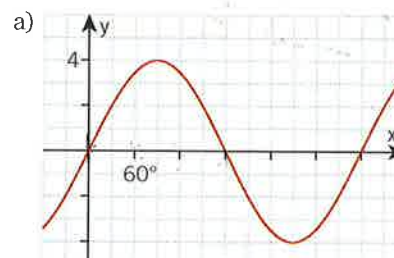
Kontrollera grafens utseende med din räknare.

OBS Om funktionen $y = 5 \sin 2(x + 45^\circ) - 4$ skrivs $y = 5 \sin (2x + 90^\circ) - 4$ kan det vara svårare att se förskjutning 45° .

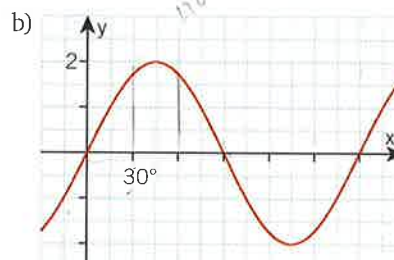


2143 Bestäm en funktion av typen $y = a \sin bx$ som ger grafen

a)



b)



2144 Skissa grafen utan hjälpmedel. Kontrollera sedan med din grafräknare.

a) $y = \sin 0,5x + 1$

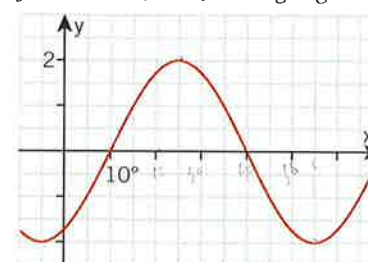
b) $y = 2 \cos 2x + 2$

2145 Hur många perioder har kurvan $y = \sin 4x$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$?

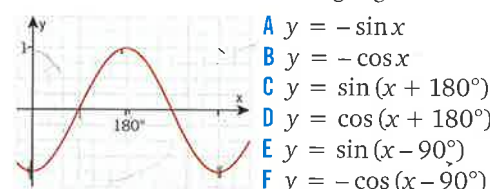
2146 Bestäm en funktion av typen

b)

$y = a \sin b(x + v)$ som ger grafen



2147 Vilka av de sex funktionerna ger grafen?



A $y = -\sin x$

B $y = -\cos x$

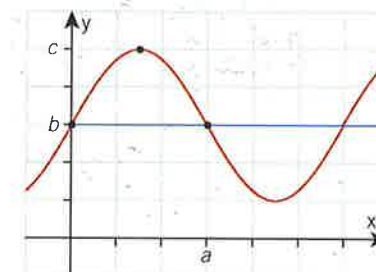
C $y = \sin (x + 180^\circ)$

D $y = \cos (x + 180^\circ)$

E $y = \sin (x - 90^\circ)$

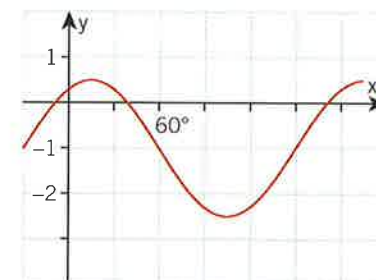
F $y = -\cos (x - 90^\circ)$

2148 Funktionen $y = 200 \sin 5x + 300$ ger grafen



Bestäm talen a , b och c .

2149 Bestäm en funktion av typen $y = a \sin b(x + v) + d$ som ger grafen



2150 Skissa grafen till $y = 1 - 0,5 \sin (3x - 90^\circ)$. Kontrollera med din grafräknare.

2151 Rita en enkel skiss till grafen av funktionen

c)

$$y = A \sin \frac{360^\circ}{B} (x - C) + D$$

där A , B , C och D är positiva. Markera i figuren var talen A , B , C och D kan avläsas.

2152 $f(x) = A \sin kx + b$

Putte påstår att graferna till $f(-x)$ och $-f(x)$ är identiska. Har han rätt eller fel? Motivera.

Kurvan $y = \tan x$

Funktionen $y = \tan x$ har perioden 180° . Vi kan visa detta med omskrivningen

$$\tan(x + 180^\circ) = \frac{\sin(x + 180^\circ)}{\cos(x + 180^\circ)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Vi börjar därför med att rita kurvan på ett intervall av längden 180° och vi väljer intervallet $-90^\circ < x < 90^\circ$.

Observera att $\tan x$ ej är definierad för de x -värden då $\cos x = 0$, t ex $x = -90^\circ$ och $x = 90^\circ$.

värdetabell

x	-90°	-89°	-80°	-45°	-20°	0°	20°	45°	80°	89°	90°
$\tan x$	ej def.	-57,3	-5,7	-1	-0,4	0	0,4	1	5,7	57,3	ej def.

graf

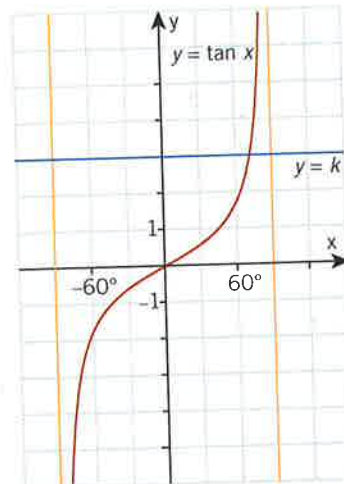
När x närmar sig 90° från vänster kommer $\tan x$ att växa obegränsat.

När x närmar sig -90° från höger kommer $\tan x$ att avta obegränsat.

asymptoter

Linjerna $x = -90^\circ$ och $x = 90^\circ$ kallas lodräta asymptoter.

Figuren visar att en ekvation av typen $\tan x = k$, där k är ett godtyckligt tal, har en och endast en lösning inom en period.

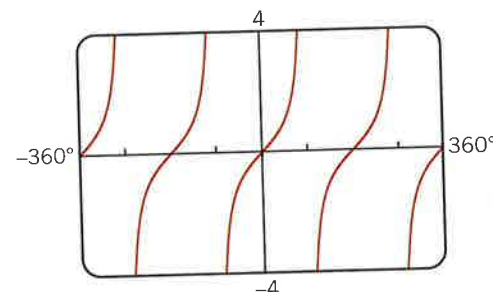


Ekvationen $\tan x = k$

Den fullständiga lösningen till $\tan x = k$ är $x = \tan^{-1} k + n \cdot 180^\circ$

Vi ritar en graf med flera perioder med grafitande räknare.

Kontrollera också hur din räknare reagerar om du försöker beräkna $\tan(-90^\circ)$ och $\tan(90^\circ)$.



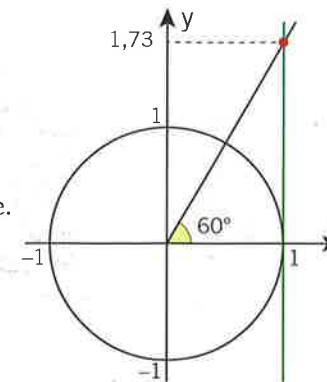
$\tan v$ och enhetscirkeln

Vi kan inte avläsa $\tan v$ direkt i enhetscirkeln.

Men om vi ritar in linjen $x = 1$ i enhetscirkeln kan vi använda denna för att avläsa tangens värdet.

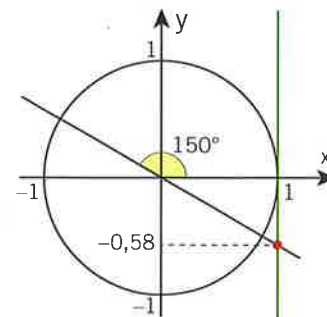
Förlängningen av radien bildar tillsammans med $x = 1$ och x -axeln en rätvinklig triangel där t ex

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{y\text{-värdet}}{1} \approx 1,73$$



Vi kan för alla vinklar avläsa $\tan v$ där radiens förlängning skär $x = 1$. Detta eftersom $\tan v = \tan(v + n \cdot 180^\circ)$ och $\tan(-v) = -\tan v$.

$$\tan 150^\circ = \tan(-30^\circ + 180^\circ) = -\tan 30^\circ \approx -0,58$$



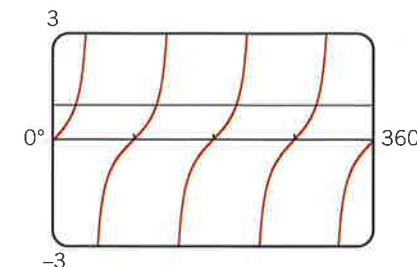
2153

a) Vilken period har $y = \tan 2x$?

b) Hur många lösningar har ekvationen $\tan 2x = 0,9$ i intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$?

a) Perioden är $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

b) Varje period har en lösning. I intervallet $0^\circ \leq v \leq 360^\circ$ ryms fyra perioder. Ekvationen har fyra lösningar.



2154

Bestäm med en decimal samtliga lösningar till ekvationen

a) $\tan 2x = 0,9$

b) $\sin x = -3,1 \cos x$

a) $\tan 2x = 0,9$

b) $\sin x = -3,1 \cos x$

Dividera med $\cos x$.

$$2x = \tan^{-1} 0,9 + n \cdot 180^\circ$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -3,1$$

$$2x = 41,987... + n \cdot 180^\circ$$

$$\tan x = -3,1$$

$$x \approx 21,0^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$x = \tan^{-1}(-3,1) + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx -72,1^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx 107,9^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Adderar vi en period till $-72,1^\circ$ blir svaret positivt.

2155 Vilken period har

- a** a) $\tan x$ c) $\tan \frac{x}{3}$?
b) $\tan 2x$ d) $\tan 0,2x$

Lös ekvationen och svara med en decimal.

2156 a) $\tan x = 0,6$ b) $\tan x = -5$

2157 a) $\tan 2x = 1,3$ b) $\tan 3x + 0,4 = 0$

2158 a) $\tan \frac{x}{2} = 0,2$ b) $2 \tan \frac{x}{3} + 5 = 0$

2159 a) $\sin x = 0,8 \cos x$ b) $2 \sin x = \cos x$

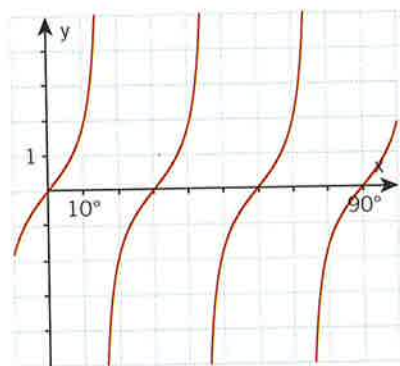
2160 Har $\tan x$ något största eller minsta värde? Motivera.

2161 Finn två olika värden på x , ett positivt och ett negativt, så att $\tan x = 1$.

2162 Antag att $\sin x = 0,6$ och $\cos x = 0,8$. Vilket värde har då $\tan x$?

2163 Beräkna $\tan 270^\circ$ med din räknare. Förklara ditt svar.

2164 Grafen visar $y = \tan kx$. Vilket värde har k ?



2165 Bestäm utan räknare $\tan a + \tan(a + 180^\circ) + \tan(a + 360^\circ)$ om du vet att $\tan a = 5$.

2166 Lös ekvationen. Svara med en decimal.

- b** a) $\sin x - 3 \cos x = 0$
b) $5 \sin x + 2 \cos x = 0$

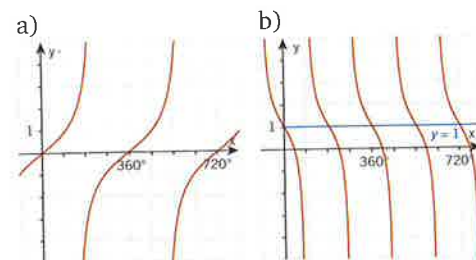
2167 Förenkla $\tan 190^\circ - \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$ utan räknare.

2168 Undersök om ekvationen $\tan 3x = 3,08$ har några lösningar mellan 200° och 300° . Ange i så fall dessa.

2169 Undersök grafiskt om $\tan x = \tan(180^\circ - x)$.

2170 För vilka vinklar v i intervallet 0 till 360° är $\tan v$ negativt? Motivera ditt svar.

2171 Bestäm ekvationen till grafen



2172 Undersök om $\tan x = -\frac{1}{\tan(x + 90^\circ)}$ för

c alla värden på x . Visa i så fall detta.

2173 Ekvationen $4 \tan 5(x + 10^\circ) = 1$ saknar lösningar i intervallet $180^\circ < x < a^\circ$. Vilket är det största möjliga värdet på a ?

2174 Lös ekvationen $4 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ genom att först använda trigonometriska ettan.

2175 Finn ett $x > 0$ så att $\tan^{-1}(2x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

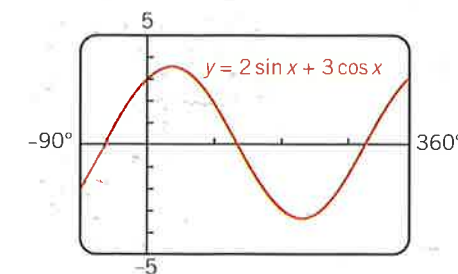
Kurvan $y = a \sin x + b \cos x$

Exempel

Astra undersöker funktionen $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ med sin grafitande räknare.

Astra tycker grafen ser ut som en sinusfunktion med amplituden ca 3,5.

Kan summan $2 \sin x + 3 \cos x$ skrivas som en sinusfunktion på formen $c \sin(x + v)$?



allmänna fallet

Vi utgår från det allmänna fallet $y = a \sin x + b \cos x$ där $a, b > 0$. Om funktionen kan skrivas som $y = c \sin(x + v)$ ger det ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = a \sin x + b \cos x \\ y = c \sin(x + v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a \sin x + b \cos x \\ y = c \cos v \cdot \sin x + c \sin v \cdot \cos x \end{cases}$$

Vi ser att ekvationerna är identiska om

$$\begin{cases} a = c \cos v \\ b = c \sin v \end{cases}$$

Vi använder detta ekvationssystem för att få fram formler för c respektive v .

Om ekvationerna kvadreras och adderas ledvis får vi

$$a^2 + b^2 = c^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v$$

$$a^2 + b^2 = c^2 (\cos^2 v + \sin^2 v)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vi utgår från ekvationssystemet igen. Om den andra ekvationen divideras ledvis med den första får vi

$$\tan v = \frac{b}{a}$$

Vi kan alltså skriva om $y = a \sin x + b \cos x$ som en sinusfunktion

$y = c \sin(x + v)$ där v beräknas med formeln $\tan v = \frac{b}{a}$

$$\text{och } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Den andra ekvationen kan vi skriva om med additionsformeln för sinus.

Trigonometriska ettan

Exempel forts

Astras funktion $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ ($a = 2$, $b = 3$) kan skrivas på om på formen $y = c \sin(x + v)$ där:

$$\tan v = \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad v = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,3^\circ$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$$

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x \approx 3,6 \sin(x + 56,3^\circ)$$

Vi kan på samma sätt även skriva om kurvor på formen $y = a \sin x - b \cos x$

$$y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + v)$$

$$y = a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x - v)$$

$$\text{Då } a > 0, b > 0, \tan v = \frac{b}{a}, 0^\circ < v < 90^\circ.$$

Sammanfattning

2176

Skriv om funktionen $y = 7 \sin x - 24 \cos x$ på formen $y = c \sin(x - v)$ och ange funktionens största värde.

$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

$$v = \tan^{-1}(24/7) \approx 73,7^\circ$$

$$y \approx 25 \sin(x - 73,7^\circ)$$

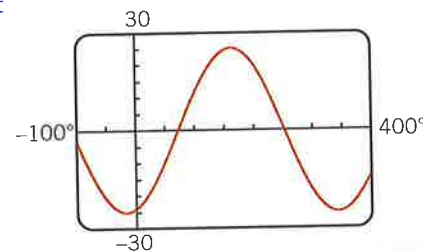
$y = 25$ är funktionens största värde.

Kontrollera på din räknare att

$$Y_1 = 7 \sin x - 24 \cos x \text{ och}$$

$$Y_2 = 25 \sin(x - 73,7^\circ)$$

ger samma graf och att det största värdet är 25.



2177 Bestäm grafiskt största värdet för y .

- a) $y = 6 \cos x - 3$
 b) $y = 15 - 4 \sin(x + 35^\circ)$
 c) $y = 33 \sin x + 56 \cos x$
 d) $y = 65 \sin x - 72 \cos x$

2178 Skriv om uttrycket på formen $y = c \sin(x + v)$. Ange c exakt och v med en decimal. Kontrollera ditt svar grafiskt.

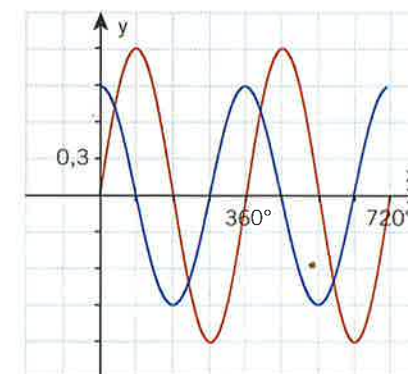
- a) $y = 6 \sin x + 8 \cos x$
 b) $y = 10 \sin x + 24 \cos x$
 c) $y = 8 \sin x - 15 \cos x$
 d) $y = 7 \sin x - 9 \cos x$

2179 Vilket är det minsta värde som funktionen $f(x) = 10 + 60 \sin x + 11 \cos x$ kan anta?

2180 Förklara kortfattat varför största värdet för $y = 5 \cos x + 3 \sin x$ inte blir $5 + 3 = 8$.

2181 Lös grafiskt ekvationen $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

2182 Skriv summan av de två graferna nedan på formen $y = c \sin(x + v)$.



2183 Går funktionen $y = 2 \sin x + \cos 2x$ att skriva på formen $y = c \sin(x + v)$?

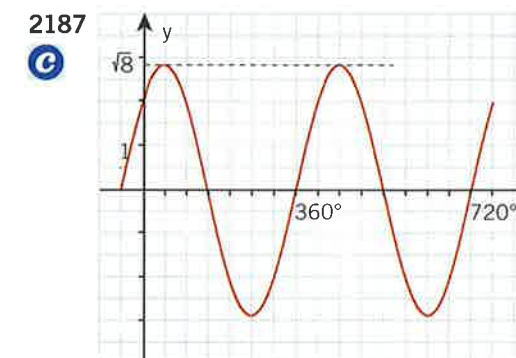
2184 Funktionen $y = a \sin x + (a + 1) \cos x$ är given.

- a) Bestäm det positiva talet a så att funktionens största värde blir 29.
 b) Ange det minsta positiva x -värde för vilket y antar sitt största värde 29.

2185 Lös ekvationen algebraiskt. Svara med hela grader.

- a) $3 \sin x + 4 \cos x = 1$
 b) $10 \sin x + 24 \cos x = 27$
 c) $2 \sin x - \cos x = 2$

2186 Rita grafen till funktionen $f(2x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos^2 x - \sin^2 x$. Resultatet antyder att $f(x)$ kan skrivas på formen $y = c \sin(x + v)$. Visa detta.



Ange ekvationen till kurvan ovan på formen $y = a \sin x + b \cos x$

2188 Härled och visa i detalj hur man kan skriva om $y = a \sin x - b \cos x$ ($a > 0$, $b > 0$) till en sinusfunktion.

2189 Går det att skriva $y = a \sin x + b \cos x$ som en cosinusfunktion?

2.2 Radianbegreppet

Ett nytt vinkelmått

Exempel Indra undersöker derivatan av $\sin x$ med sin symbolhanterande räknare.

Räknaren, inställd på grader, ger att $f(x) = \sin x$ har derivatan $f'(x) \approx 0,017\,453\,29 \cos x$

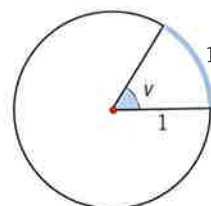
Indra undrar om derivatan av $\sin x$ verkligen måste vara så krånglig?

Svaret är nej, men för att kunna hitta enklare samband måste vi använda oss av ett annat vinkelmått än grader. Det finns flera olika vinkelmått.

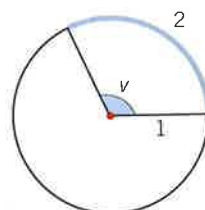
grader När vi mäter med grader är ett varv 360° . Grader användes redan av de babyloniska astronomerna och förmodligen är det antalet dagar på ett år som är bakgrunden.

nygrader, gon Ett varv kan också sägas vara 400 *nygrader*, eller 400 *gon*. Vinkelmåttet används bl a inom lantmäteri för att underlätta beräkningar. Derivatan av $\sin x$ blir inte enklare med nygrader.

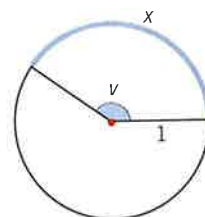
radian Ett helt annat sätt att mäta vinklar utgår från cirkelbågens längd. Om vi i enhetscirkeln markerar en båge med längden 1 längdenhet, får vi en vinkel som kallas 1 *radian*, vilket skrivs 1 rad. Figuren visar några medelpunktsvinklar i radianer.



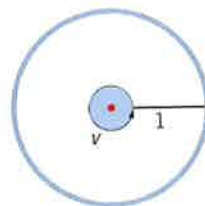
Radie = 1
Båge = 1
 $v = 1$ radian



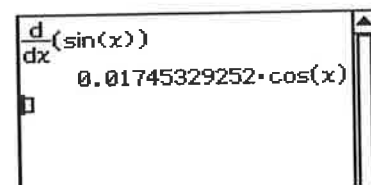
Radie = 1
Båge = 2
 $v = 2$ radianer



Radie = 1
Båge = x
 $v = x$ radianer

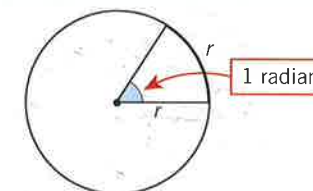


Radie = 1
Båge = 2π
 $v = 2\pi$ radianer



Definition

En vinkel är 1 radian om den i en cirkel ger en båge av radiens längd.



Mellan grader och radianer får vi följande omvandlingsformler:

Ett varv = $360^\circ = 2\pi$ rad, d v s $180^\circ = \pi$ rad

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

För radianer utelämnas ofta beteckningen helt. Skriver vi $\sin 2$ så ska detta tolkas som "sinus för 2 radianer". Menar vi "sinus för 2 grader" måste vi skriva $\sin 2^\circ$. De formler och samband som vi tidigare har visat för vinklar i grader gäller också för vinklar i radianer.



På räknare brukar "deg" stå för grader, "gra" för nygrader och "rad" för radianer. Det är viktigt att du kan kontrollera och ändra räknarens inställning.

2201

Omvandla a) $98,1^\circ$ till radianer b) 6,07 radianer till grader.

a) Sambandet $180^\circ = \pi$ ger att $1^\circ = \frac{\pi}{180}$
 $98,1^\circ = 98,1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,71$

b) Sambandet $180^\circ = \pi$ ger att $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$
 $6,07 = 6,07 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 347,8^\circ$

2202

Bestäm exakt $\sin \frac{\pi}{3}$

$180^\circ = \pi$ ger direkt att $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exakta värden finns i tabell och formelblad.

2203

Lös följande trigonometriska ekvationer.
Svara i radianer med två decimaler.

a) $\sin x = 0,93$

c) $\tan x = 1,9$

b) $\cos 2x = -0,54$

d) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,98$

a) $\sin x = 0,93$

Om räknaren är ställd på grader (degree)

så är $\sin^{-1}(0,93) = 68,434... \approx 68,4^\circ$.

Om räknaren är ställd på radianer

så är $\sin^{-1}(0,93) = 1,194... \approx 1,19$ radianer.

Vi räknar i radianer.

Perioden är $360^\circ = 2\pi$.

$180^\circ = \pi$

$$x \approx 1,19 + n \cdot 2\pi$$

eller

$$x \approx \pi - 1,19 + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 1,95 + n \cdot 2\pi$$

b) $\cos 2x = -0,54$

$$2x \approx \pm 2,14 + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx \pm 1,07 + n \cdot \pi$$

c) $\tan x = 1,9$

Perioden är $180^\circ = \pi$

$$x \approx 1,09 + n \cdot \pi$$

d) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,98$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \approx 1,370 + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \approx \pi - 1,370 + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{x}{3} \approx 0,585 + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 1,76 + n \cdot 6\pi$$

$$\frac{x}{3} \approx 0,986 + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx 2,96 + n \cdot 6\pi$$

Lösningar i radianer till grundeckvationerna:

$$\sin x = k$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$x = v + n \cdot 2\pi$$

eller

$$x = \pi - v + n \cdot 2\pi$$

$$\text{där } v = \sin^{-1} k$$

$$\cos x = k$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$x = \pm v + n \cdot 2\pi$$

$$\text{där } v = \cos^{-1} k$$

$$\tan x = k$$

$$k \text{ godtyckligt tal}$$

$$x = v + n \cdot \pi$$

$$\text{där } v = \tan^{-1} k$$

Sammanfattning

2204 Förklara hur du omvandlar från

a)

grader till radianer

b) radianer till grader.

2205 Omvandla till radianer.

Svara med två decimaler.

a) $34,3^\circ$

b) $193,4^\circ$

c) 698°

2206 Omvandla radiantalet till grader.

Svara med en decimal.

a) $0,282$

b) $5,74$

c) -10

2207 Motivera varför

a) $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

b) $4\pi \text{ rad} = 720^\circ$

2208 Visa att

a) $300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$

b) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$

2209 Beräkna med räknare

a) $\sin 2^\circ$

b) $\sin 2$

2210 Varför ger räknaren ett större värde för

$\sin(1)$ om den är inställd på radianer än om den är inställd på grader?

2211 Beräkna $\sin \frac{\pi}{2} + \cos 5\pi$ utan räknare.

Kontrollera ditt svar med räknare.

2212 Lös ekvationen fullständigt. Svara i radianer med två decimaler.

a) $\sin x = 0,4$

c) $\sin x = -0,2$

b) $\cos x = 0,9$

d) $\tan x = 5$

2213 Lös ekvationen fullständigt utan räknare. Använd enhetscirkeln.

Svara i radianer

a) $\sin x = 1$

c) $\cos x = -1$

b) $\sin x = 0$

d) $\cos x = 0$

2214 Lös ekvationen fullständigt utan räknare. Svara exakt.

b)

a) $\sin 2x = 0,5$

c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\tan 2x = 1$

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

2215 Beräkna utan räknare.

a) $\tan(-6\pi) + \cos \frac{9\pi}{4}$

b) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

2216 Finns det någon vinkel som har samma värde i radianer och grader?

2217 Lös ekvationen i det angivna intervallet. Kontrollera ditt resultat grafiskt.

a) $20 - 3 \cos \frac{\pi}{12} t = 22, \quad 0 \leq t \leq 24$

b) $12 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{5}\right) + 20 = 30, \quad 0 \leq t \leq 8$

2218 Är det någon skillnad om du skriver

a) $\sin^2 x$ eller $(\sin x)^2$

b) $\tan^{-1} x$ eller $(\tan x)^{-1}$?

2219 Lös ekvationen

a) $\sin 2x - \sin x = 0$

b) $\frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$

2220 Två punkter P och Q på enhetscirkeln

har x-koordinaterna 0,4 och 0,5.

Hur lång är cirkelbågen mellan P och Q?

2221 Låt $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$

a) Vad betyder $f(x)$ och vad bör det bli?

b) Testa ditt svar i a) genom att beräkna $f(x)$ för $x = 1, 2, 3, 4$.

c) Försök förklara resultatet i b).

Cirkelsektorn och radianer

Med radianer som vinkelmått får vi nya enkla samband för cirkelsektorns båge och area.

Exempel Cirkelbågens längd är (vinkelns andel av hela varvet) $\times$ (hela cirkelns omkrets)

Om medelpunktsvinkeln är 60°

så är bågens längd $= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times$ hela cirkelns omkrets.

Om medelpunktsvinkeln är 2 radianer

så är bågens längd $= \frac{2}{2\pi} \times$ hela cirkelns omkrets.

På motsvarande sätt kan vi härleda nya formler för cirkelsektorn:

Cirkelbågens längd b

Vinkeln v mäts i grader.

$$b = \frac{v}{360} \cdot 2\pi r$$

Vinkeln v mäts i radianer.

$$b = \frac{v}{2\pi} \cdot 2\pi r = v \cdot r$$

Cirkelsektorns area A

Vinkeln v mäts i grader.

$$A = \frac{v}{360} \cdot \pi r^2$$

Vinkeln v mäts i radianer.

$$A = \frac{v}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{v \cdot r^2}{2}$$

$$A = \frac{v}{360} \cdot 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$A = \frac{v \cdot r \cdot r}{2} = \frac{b \cdot r}{2}$$

Cirkelsektorns
båge och area

2222

En cirkelsektor med radien 2,5 m har medelpunktsvinkeln 0,75 radianer.

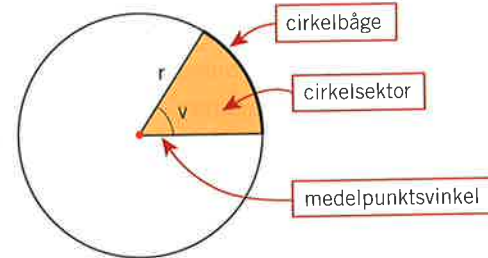
a) Bestäm cirkelbågens längd.

b) Bestäm cirkelsektorns area.

a) Bågen $b = v \cdot r = 0,75 \cdot 2,5 \text{ m} \approx 1,9 \text{ m}$

b) Areal $A = \frac{v \cdot r^2}{2} = \frac{0,75 \cdot 2,5^2}{2} \text{ m}^2 \approx 2,3 \text{ m}^2$

Du kan också använda formeln $A = \frac{b \cdot r}{2}$

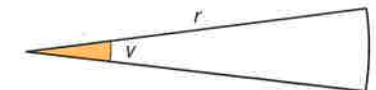


2223 Beräkna längden av cirkelbågen samt cirkelsektorns area om radien är 6,5 m och medelpunktsvinkeln är

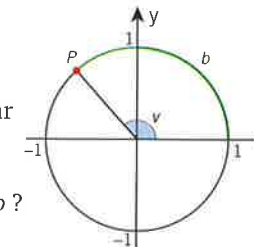
- a) 0,45 rad c) 2,87 rad
b) 82° d) 173°

2224 Bestäm vinkeln v i grader om

- a) $r = 120 \text{ m}$ och $b = 3,2 \text{ m}$
b) $r = 0,47 \text{ m}$ och $b = 0,56 \text{ m}$



2225 I en enhetscirkel har punkten P vinkeln $v = 2,3$ radianer. Hur lång är bågen b ?



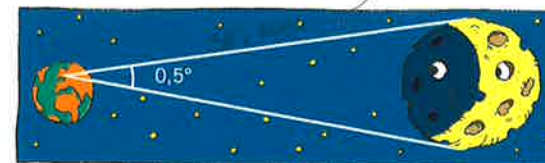
2226 En rund 6-bitars tårta har diametern 20 cm. Vilken omkrets har en bit?



2227 Sekundvisaren på en klocka är 1,3 cm. Hur långt rör sig visarspetsen på 20 s?

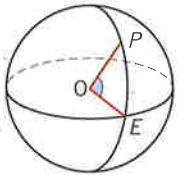
b

2228 Från jorden ser vi månen under en vinkel av $0,5^\circ$. Uppskatta månens diameter om avståndet till månen är 384 000 km.



2229 Förklara hur du med hjälp av definitionen av 1 radian kan ange ett uttryck för cirkelbågens längd om radien är $a \text{ cm}$ och medelpunktsvinkeln är 2 radianer.

2230 Latituden för en punkt P definieras som vinkeln POE, där OE är radien, 6370 km, i ekvatorcirkeln och bågen PE är en del av meridianen genom P. Sveriges sydligaste punkt Smygehuk har latitud $55,3^\circ$.



- a) Hur långt från ekvatorn ligger Sveriges sydligaste punkt?
b) Sverige är cirka 157 mil långt. Vilken latitud har Sveriges nordligaste punkt?

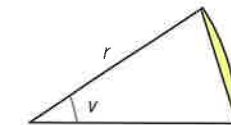
2231 En drivrem är spänd över två runda hjul med radierna 15 cm och 16 cm.



- a) Hur många radianer vrider sig det större hjulet när det mindre vridit sig ett varv?
b) Drivremmen har hastigheten 5,0 m/s. Bestäm vinkelhastigheten i radianer per minut för de båda hjulen.

2232 Ange ett uttryck för cirkelsegmentets area (det färgade området).

c



2233 Två cirklar med radien 1,0 m är placerade så att deras medelpunkter är 1,0 m ifrån varandra. Hur stor area täcker de tillsammans?

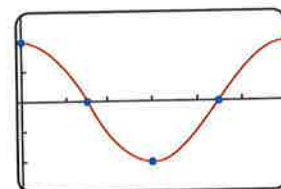
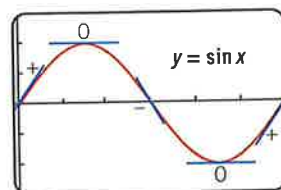
2.3 De trigonometriska funktionernas derivator

Derivatan av $\sin x$ och $\cos x$

Vi ska nu bestämma derivatan av $f(x) = \sin x$ då vinkeln x anges i radianer.

Om vi skissar hur grafens lutning varierar så verkar det troligt att derivatan är en cosinusfunktion, se figur intill.

Vi använder derivatans definition för $f(x) = \sin x$.



derivatans definition $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

Vi använder additionssatsen för sinus och omformar differenskvoten

differenskvot
$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \frac{\sin x \cos h - \sin x}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Eftersom $\sin x$ och $\cos x$ inte beror av h , bestäms derivatans värde av gränsvärdena: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ och $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$

Vi undersöker gränsvärdena numeriskt med räknaren inställd på radianer.

h	$\frac{\cos h - 1}{h}$	$\frac{\sin h}{h}$
0,1	-0,04995835	0,99833417
0,001	-0,0005	0,99999983
0,00001	-0,000005	1

Av tabellen är det rimligt att dra slutsatsen att

gränsvärden $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ och $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Vi kan nu slutföra härledningen av derivatan till $\sin x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

På liknande sätt kan vi visa att $f(x) = \cos x$ har derivatan $f'(x) = -\sin x$.

Sammanfattning

Om x anges i radianer får vi enkla derivator till $\sin x$ och $\cos x$.

$$f(x) = \sin x \text{ har derivatan } f'(x) = \cos x.$$

$$f(x) = \cos x \text{ har derivatan } f'(x) = -\sin x.$$

2301

Bestäm $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ då $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$

$$f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$$

$$f'(x) = 3 \cos x - 2(-\sin x) = 3 \cos x + 2 \sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Svar: } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

2302

För vilka x -värden har grafen till $f(x) = \sin x$ en tangent med lutningen 0,5? Svara exakt.

Vi söker x -värden så att $f'(x) = 0,5$.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \text{ ger ekvationen}$$

$$\cos x = 0,5$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$\text{Svar: Lutningen är } 0,5 \text{ då } x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Bestäm $f'(x)$.

- 2303 a) $f(x) = 2 \sin x$ c) $f(x) = -5 \cos x$
a b) $f(x) = 3 \cos x$ d) $f(x) = -9 \sin x$

- 2304 a) $f(x) = 2 \cos x + 5 \sin x$
 b) $f(x) = 1 - 2 \cos x + 1,3 \sin x$
 c) $f(x) = 3x - 0,2 \sin x$
 d) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{\cos x}{3}$

- 2305 Vad krävs för att $y = \sin x$ ska ha den enkla derivatan $y' = \cos x$?

- 2306 Bestäm
 a) $f'(0)$ då $f(x) = x^2 - 2 \sin x + 3$
 b) $h'(\pi)$ då $h(t) = 0,7 \sin t - 1,1 \cos t$
 c) $s'(1,2)$ då $s(r) = 3,2 \cos r + 0,3 r^3$

- 2307 a) Vilken lutning har tangenten till $y = \sin x$ i punkten $(0, 0)$?
 b) Bestäm ekvationen för tangenten till $y = \sin x$ i punkten $(0, 0)$.

- 2308 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \cos x$ då $x = \pi/2$.

- 2309 a) För vilka vinklar i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ är derivatan till $y = \sin x$ negativ?
 b) Rita med grafräknaren derivatan till $y = \sin x$. (tex $Y = nDeriv(\sin X, X, X)$). och kontrollera ditt svar i a). Motivera!

- 2310 Lös ekvationen $f'(x) = 0$ om $f(x) = \sin x$. Tolka och kommentera ditt svar.

- 2311 Vilket är det största värdet derivatan till $f(x) = 1,5 \sin x$ kan ha? Motivera.

- 2312 Funktionen $f(x) = A \sin x + B \cos x$ är given. Ange talen A och B om $f(0) = 4$ och $f'(0) = 5$.
b

- 2313 Bestäm det exakta värdet av $f'(\frac{\pi}{4})$ om $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3}$

- 2314 Bestäm för vilka x -värden kurvan $f(x) = 0,3x + \cos x$ har en extrempunkt.

- 2315 $y = \sin x$ har i origo tangenten $y = x$. För "små" x -värden är därför $\sin x \approx x$.
 a) Undersök grafiskt och jämför $\sin x$ med x om $x = 0,11$.
 b) Gäller sambandet $\sin x \approx x$ för "små" x -värden, även för vinkelenheten grader?

- 2316 Bestäm exakt ekvationen för två tangenter till $y = \sin x$ som har lutningen 0,5.

- 2317 Med räknaren inställd på radianer fann vi att

c $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ och $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$
 (se tabellen på s. 74)

- a) Undersök och bestäm på samma sätt gränsvärdena med räknaren inställd på grader.
 b) Vad blir derivatan av $\sin x$ om x anges i grader istället för radianer?

- 2318 Härled derivatan till $f(x) = \cos x$.

- 2319 Bestäm gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$
 Kommentera ditt resultat.

- 2320 Går det att bestämma talet a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + a & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

för $x = 0$ får en

- a) sammanhängande graf
 b) tangent i punkten?

Aktivitet

Kedjeregeln

Du kan derivera olika typer av funktioner, t ex:

$$y = x^4 + 3x + 2 \quad y' = 4x^3 + 3$$

$$y = 4e^x \quad y' = 4e^x$$

$$y = 3 \sin x \quad y' = 3 \cos x$$

Nu ska du undersöka hur derivatan ser ut för så kallade sammansatta funktioner. De består av en "yttre" funktion och en "inre" funktion.

Sammansatt funktion	Yttre funktion	Inre funktion
$y = (e^x + 1)^3$	"upphöjt till 3"	$e^x + 1$
$y = (\sin x + 3)^4$	"upphöjt till 4"	$\sin x + 3$
$y = \sin(x^2 + 1)$	"sinus för"	$x^2 + 1$

De sammansatta funktionerna kan skrivas på den generella formen $y = f(g(x))$.

- 1 Tudor undersöker derivatorna till de tre funktionerna ovan med en symbolhanterande räknare. Studera skärmbildens resultat och försök hitta ett mönster. Hur beror derivatan av den yttre respektive inre funktionen? Formulera ett samband med ord.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((e^x + 1)^3) &= 3 \cdot (e^x + 1)^2 \cdot e^x \\ \frac{d}{dx}((\sin(x) + 3)^4) &= 4 \cdot (\sin(x) + 3)^3 \cdot \cos(x) \\ \frac{d}{dx}(\sin(x^2 + 1)) &= 2 \cdot x \cdot \cos(x^2 + 1) \end{aligned}$$

UNDERSÖK

- 2 Tudor undersöker ytterligare en sammansatt funktion. Stämmer derivatan med det mönster du fann i uppgift 1?

$$\frac{d}{dx}((\cos(x))^2) = -2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

- 3 Försök att formulera en generell regel för hur man ska derivera en sammansatt funktion $y = f(g(x))$. Denna regel kallas ofta kedjeregeln.



En sammansatt funktion består av en yttre och en inre funktion.

Derivatan av sammansatta funktioner

sammansatt funktion En funktion av typen $y = \sin 3x$ kan ses som *sammansatt* av två funktioner, en *yttre* funktion $y = \sin u$ och en *inre* funktion $u = 3x$. Vi börjar med att ge exempel på några sammansatta funktioner.

yttre och inre funktion

Sammansatt funktion	Yttre funktion	Inre funktion
$y = \cos 2x$	$y = \cos u$	$u = 2x$
$y = (2x)^3$	$y = u^3$	$u = 2x$
$y = (2x + 1)^4$	$y = u^4$	$u = 2x + 1$
$y = \sin^2 x = (\sin x)^2$	$y = u^2$	$u = \sin x$
$y = f(g(x))$	$y = f(u)$	$u = g(x)$

I dessa exempel kan vi bestämma $f'(u)$ och $g'(x)$.

Vi vill nu undersöka om derivatan av den sammansatta funktionen $y = f(g(x))$ kan uttryckas med hjälp av $f'(u)$ och $g'(x)$.

Exempel Vilken derivata har den sammansatta funktionen $y = (1 + x^3)^2$? I detta fall kan vi utveckla parenteserna och sedan derivera $y = (1 + x^3)^2 = 1 + 2x^3 + x^6$ $y' = 6x^2 + 6x^5$

Kan vi få detta resultat med hjälp av den yttre och inre funktionens derivata?

Den yttre funktionen $y = f(u) = u^2$ har derivatan $f'(u) = 2u = 2(1 + x^3)$. Den inre funktionen $u = g(x) = 1 + x^3$ har derivatan $g'(x) = 3x^2$.

Produkten av $f'(u)$ och $g'(x)$ ger derivatan av den sammansatta funktionen:

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) = 2(1 + x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2(1 + x^3) = 6x^2 + 6x^5$$

allmänt Detta resultat kan också troliggöras med ett allmänt resonemang:

$$g'(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ ger att } g(x+h) \approx g(x) + g'(x) \cdot h$$

$$y' \approx \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \approx \frac{f(g(x) + g'(x) \cdot h) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \frac{f(u+k) - f(u)}{h} \approx \frac{f(u) + f'(u) \cdot k - f(u)}{h} =$$

$$= \frac{f'(u) \cdot k}{h} = \frac{f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot h}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Vi sätter $g(x) = u$ och $g'(x) \cdot h = k$

Deriveringsregeln vi funnit kallas *kedjeregeln*. Den kan skrivas:

Kedjeregeln

Om $y = f(u)$ och $u = g(x)$ så gäller för $y = f(g(x))$ att $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

2321

Derivera

a) $y = \sin 5x$ c) $y = (1 + \sin x)^3$

b) $y = 3 \cos(2\pi x + 3)$ d) $y = \sin^5 2x$

a) $y = \sin 5x$

$$y' = \cos 5x \cdot 5 = 5 \cos 5x$$

b) $y = 3 \cos(2\pi x + 3)$

$$y' = -3 \sin(2\pi x + 3) \cdot 2\pi = -6\pi \sin(2\pi x + 3)$$

c) $y = (1 + \sin x)^3$

$$y' = 3(1 + \sin x)^2 \cdot \cos x$$

d) $y = \sin^5 2x = (\sin 2x)^5$

$$y' = 5 \sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 10 \sin^4 2x \cdot \cos 2x$$

Yttre: $y = \sin u$ Inre: $u = 5x$
 $y' = \text{"yttre derivata"} \times \text{"inre derivata"}$

Yttre: $y = 3 \sin u$ Inre: $u = 2\pi x + 3$

Yttre: $y = u^3$ Inre: $u = 1 + \sin x$

Yttre: $y = u^5$ Inre: $u = \sin 2x$
OBS: $\sin 2x$ är också en sammansatt funktion.

2322 Ange först yttre och inre funktion

a och derivera sedan

a) $y = \sin 2x$ c) $y = (x^3 + 4)^5$

b) $y = 2 \cos(0,5x - 1)$ d) $y = \cos^2 x$

Derivera

2323 a) $y = \sin 9x$ b) $y = \cos 0,3x$

2324 a) $y = 15 \sin \frac{x}{3}$ b) $y = 3 \cos 2\pi x$

2325 a) $y = 2 \sin(5x + 1)$

b) $y = 4 \cos(\frac{\pi}{2}x - 3)$

2326 a) $y = \sin^2 x$ b) $y = \cos^3 x$

2327 Bestäm k så att kurvan $y = \sin kx$ har lutningen 2 i origo.

2328 Ange med hjälp av kedjeregeln en enkel deriveringsregel för funktioner av typen $y = \cos kx$ där k är en konstant.

2329 Vilka av nedanstående funktioner är inte sammansatta och går inte att derivera med kedjeregeln?

A $y = \sin x \cdot \cos x$ C $y = \ln x^2$

B $y = \cos(\cos x)$ D $y = \frac{x}{\sin x}$

Derivera med avseende på x .

2330 a) $y = (1 + \cos x)^4$ b) $y = \sin(1 + x^3)$

2331 a) $y = \sin^4(2x - 1)$ b) $y = \sin(\cos x)$

2332 a) $y = (1 + \sin ax)^n$
b) $y = A \sin(bx + c) + d$

2333 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = 3 \sin 2x - \cos 2x$ då $x = \frac{3\pi}{4}$

2334 Finn en funktion F som har derivatan
a) $F'(x) = \sin 2x$ b) $F'(x) = \cos 0,5x$

2335 Bestäm $\frac{dy}{dx}$ om $y = \sin x^\circ = \sin \frac{\pi x}{180}$
Tolka ditt resultat.

2336 I den sammansatta funktionen

c $F(x) = f(g(x))$
är $g(x) = \cos x$ och $f'(-1) = 2$.
Bestäm $F'(\pi)$.

2337 Visa att kurvan $y = \sin^2 kx + b$ har största lutningen k .

2.4 Tillämpningar och problemlösning

Vi kan för alla reella tal t finna värden på $\sin t$ och $\cos t$.
När vi ska beskriva periodiska förlopp med trigonometriska funktioner representerar talet t ofta tiden. För att få en enkel derivata använder vi radianer om inget annat anges.

2401

En modell för hur vattentemperaturen y °C på den grekiska ön Naxos varierar under året beskrivs med funktionen $y = 5 \sin(0,0172t - 2,22) + 19$

där t är tiden i dygn räknat från årsskiftet.

- Bestäm funktionens period och amplitud.
- Vilken är den lägsta och den högsta vattentemperaturen under året?
- När kan man tidigast åka till Naxos om man vill att vattentemperaturen ska vara minst 20 °C?
- Beräkna $y'(121)$ genom att algebraiskt derivata y . Kontrollera med räknarens deriveringsfunktion.
- Tolka värdet av $y'(121)$.

a) Funktionen $y = \sin kx$ har perioden $\frac{2\pi}{k}$ om x är i radianer.

$$\text{Perioden} = \frac{2\pi}{0,0172} \text{ dygn} = 365,301... \approx 365 \text{ dygn.}$$

$$\text{Amplituden} = 5 \text{ °C.}$$

Svar: Perioden är 365 dygn och amplituden är 5 °C.

b) Det största värdet för $\sin(0,0172t - 2,22)$ är 1 och det minsta är -1.

$$\text{Högsta vattentemperaturen} = (5 \cdot 1 + 19) \text{ °C} = 24 \text{ °C.}$$

$$\text{Lägsta vattentemperaturen} = (5 \cdot (-1) + 19) \text{ °C} = 14 \text{ °C.}$$

Problemlösningstrategi

1. Förstå problemet

2. Gör upp en plan

3. Genomför planen



4. Värdera resultatet

c) Frågan "När är $y = 20$?" ger ekvationen

$$5 \sin(0,0172t - 2,22) + 19 = 20$$

där t ligger i intervallet 0 till 365.

Vi kan välja att lösa ekvationen algebraiskt eller grafiskt.

Algebraiskt

Vi skriver om ekvationen till $\sin(0,0172t - 2,22) = 0,2$

vilket ger

$$0,0172t - 2,22 = 0,201$$

$$t \approx 141$$

Det svarar mot den 21 maj.

eller

$$0,0172t - 2,22 = \pi - 0,201$$

$$t \approx 300$$

Det svarar mot den 27 oktober.

Den tidigaste tidpunkten är omkring 20 maj, vilket verkar rimligt.

Svar: Man kan tidigast åka till Naxos ca 20 maj.

$$d) y = 5 \sin(0,0172t - 2,22) + 19$$

$$y' = 5 \cos(0,0172t - 2,22) \cdot 0,0172$$

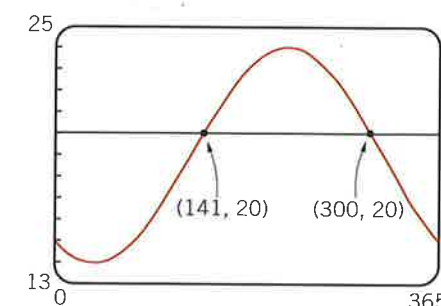
$$y'(121) = 5 \cdot 0,0172 \cdot \cos(0,0172 \cdot 121 - 2,22) = 0,085... \approx 0,1$$

Med räknarfunktionen nDeriv eller dy/dx får vi t ex

$$\text{nDeriv}(5 \sin(0,0172t - 2,22) + 19, X, 121) = 0,085... \approx 0,1$$

e) Att $y'(121) = 0,1$ betyder att vid $t = 121$, d v s ca 1 maj, stiger vattentemperaturen med hastigheten 0,1 °C/dygn.

Grafiskt



**Algebraiskt
eller grafiskt?**

Ofta kan vi välja mellan att lösa en uppgift grafiskt eller algebraiskt. En algebraisk metod kan ge exakta svar, medan en grafisk ibland kan vara snabbare. Vissa uppgifter går bara att lösa algebraiskt, men ibland är det svårt eller t o m omöjligt att finna algebraiska metoder. Därför är det viktigt att behärska både algebraiska och grafiska metoder för att, t ex vid problemlösning, kunna välja den lämpligaste metoden.

2402 I en växelströmskrets varierar strömmen

a y A enligt funktionen

$$y = 0,70 \sin 100\pi t$$

där t är tiden i sekunder.

- Bestäm strömmens största värde.
- Ange växelströmmens period.

2403 Vid en mätning varierar en persons blodtryck y mmHg enligt funktionen

$$y = 100 + 20 \sin 5,2t$$

där t är tiden i sekunder.

- Bestäm högsta och lägsta blodtryck.
- Bestäm amplitud och period.
- Beräkna och tolka $y(3)$ och $y'(3)$.

2404 Varför bör vi använda radianer när vi använder trigonometriska funktioner i matematiska modeller?

2405 Ställ upp en funktion som har ett största värde 5 och ett minsta värde -3 .

2406 Temperaturen y °C utanför ett hus varierar under ett dygn enligt funktionen

$$y = 4,5 - 8,5 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

där t är tiden i timmar räknat från midnatt.

- Vad är temperaturen klockan 10.00?
- Bestäm grafiskt när under dygnet som temperaturen är lägst respektive högst.
- Beräkna $y'(16)$ algebraiskt. Kontrollera med räknarens numeriska derivering.
- Vad betyder $y'(16)$ i detta fall?

2407 Vilket är det största möjliga värdet på derivatan till funktionen

$$y = 4 - 2 \cos 0,571x? \text{ Motivera.}$$

2408 Sant eller falskt? Motivera!

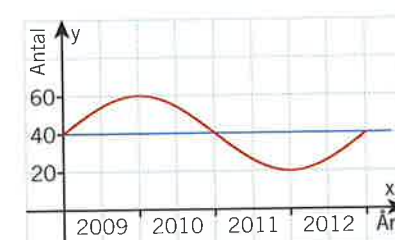
”Om värdet på k i funktionen $y = A \sin kx$ är större än π , har funktionen en period som är mindre än 2.”

2409

b



En biolog har under lång tid studerat antalet lodjur inom ett område. Hennes resultat visas i diagrammet.



- Ställ upp en funktion som modell för hur antalet lodjur har varierat.
- Hur många lodjur finns det i slutet av år 2015 om antalet fortsätter att variera enligt modellen?

2410 Enligt en prognos kommer ett företag att sälja y enheter per månad enligt ekvationen

$$y = 4000 + 2000 \cos(\pi t/6)$$

där t är tiden i månader efter årsskiftet.

Skissa grafen för ett år för hand, utan att använda räknaren.

2411



När vi andas in och ut varierar luftströmmens hastighet med tiden. Vid en mätning på en person i vila gavs lufthastigheten $v(t)$ liter/s efter t sekunder av

$$v(t) = 0,85 \sin(\pi t/3).$$

- Vad var den totala tiden för en inandning och en utandning?
- Bestäm och tolka vad $v'(t)$ beskriver i detta fall.
- Bestäm det största värdet för $v'(t)$.
- Hur förändras funktionen $v(t)$ om personen istället joggar?

2412 Lös ekvationen $x^2 = \sin x$.

2413 Bestäm $y'(\pi)$ om $y = e^{\sin x}$.

2414 Bestäm $y'(x)$ om $y(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Förklara ditt resultat.

2415 Dagens längd y h i Stockholm varierar approximativt enligt sinusfunktionen

$$y = \frac{49}{4} + \frac{25}{4} \sin \frac{2\pi(x-82)}{365}$$

där x är tiden i dygn och $x = 1$ svarar mot 1 januari.

- Hur lång är den längsta dagen?
- Hur lång är den kortaste dagen?
- Bestäm algebraiskt när dag och natt är lika långa, kontrollera grafiskt.
- Bestäm och tolka vad $y'(x)$ beskriver.

2416 Enligt en modell kan dagens längd y h i Göteborg beräknas med funktionen

$$y = 5,51 \sin(0,017165x - 1,394) + 12,25$$

där x är tiden i dygn räknat från årsskiftet.

- Bestäm funktionens period.
- Beräkna när dagens längd ökar som snabbast och hur fort den då ökar.





2417 Vattendjupet y m vid en kaj ändras på grund av tidvattnet enligt ekvationen

$$y = 5,0 + 2,0 \cos \frac{\pi(t-2)}{6}$$

där t är tiden i timmar räknat från midnatt.

- När kan ett lastfartyg som kräver 6,0 meters djup lägga till vid kajen?
- Bestäm när vattendjupet stiger respektive sjunker som snabbast samt hur fort djupet då ändras.

2418 I en växelströmskrets är t tiden i s, spänningen är $u = \hat{u} \sin(314t - 0,52)$, $\hat{u} = 65$ V, och strömmen är $i = \hat{i} \sin 314t$, $\hat{i} = 0,72$ A. Ange strömmen vid den första tidpunkt ($t > 0$) då spänningen är 0 V.

2419 Undersök och bestäm ett samband för skärningspunkterna mellan $y = \sin x + x$ och $y = x$.

2420 Vilken period har funktionen $y = 5 \sin x \cdot \cos x$? Motivera!



Figuren visar dygnsmedeltemperaturen för en ort i södra Sverige.

- Bestäm en funktion $y = A \sin(bx + c) + d$ som ger denna graf.

- Beräkna och tolka $y(8)$.
- Beräkna och tolka $y'(8)$.

2422 Ställ upp en trigonometrisk funktion som uppfyller $y'' + 9y = 0$.

Aktivitet

Finn en funktion

Materiel: Fjäder, stativ, vikter, linjal, tidtagarur, grafräknare

- Häng en vikt i fjädern så den hänger stilla utan att svänga upp och ned. Detta är viktens jämviktsläge där läget i y -led är 0.
 - Sätt vikten i lätt svängning upp och ned. Mät tiden för 10 svängningar från viktens nedersta läge. Mät avståndet mellan viktens nedersta och översta läget.
 - Bestäm med hjälp av dina mätvärden svängningens periodtid och amplitud.
 - Ställ upp en funktion på formen $y = A \sin kt$ som visar hur viktens läge i y -led varierar med tiden t s där $k = \frac{2\pi}{T}$. Kontrollera din funktion med grafräknare.
- Sätt vikten i en ny mindre svängning och bestäm svängningens periodtid, amplitud och funktion på formen $y = A \sin kt$.
 - Jämför ditt resultat med tidigare svängning. Vilka likheter och skillnader ser du? Kontrollera gärna din slutsats med ytterligare undersökningar.
- Hur förändras svängningens periodtid om du upprepar försöket med en lite tyngre eller lättare vikt? Gör först en hypotes och undersök sedan med mätningar.

LABORERA



4 Denna typ av svängning kallas *harmonisk svängning*. Teoretiskt kan man visa att svängningens periodtid är oberoende av svängningens amplitud och kan beräknas med formeln $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ där m är viktens massa i kg och k är en fjäderkonstant.

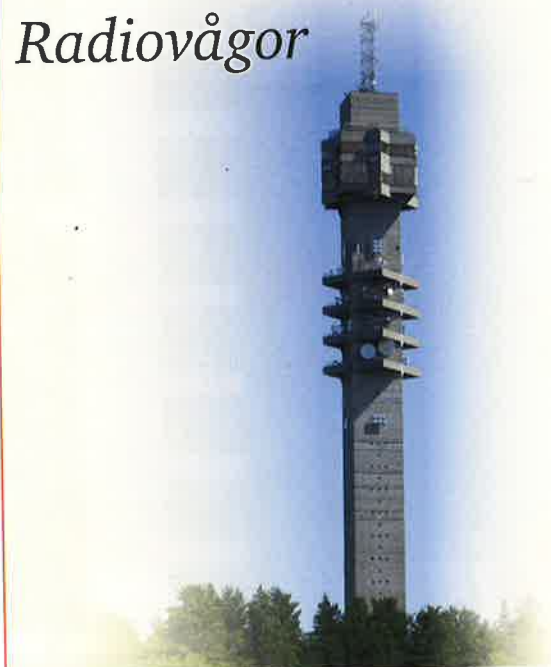
Bestäm med hjälp av dina mätvärden fjäderkonstanten k .

5 Gör en klocka.

- Beräkna teoretiskt den vikt som ger svängningstiden 1 s.
- Kontrollera med mätningar om din klocka går rätt.

Tema

Radiovågor



Mast med antenner för radio, tv, tele och data.

All modern kommunikationsteknik som radio, tv, mobiltelefoni etc bygger på våra kunskaper om elektromagnetiska vågor. På 1860-talet lyckades fysikern James Clerk Maxwell formulera de ekvationer som beskriver vågornas utbredning.

En elektromagnetisk våg, som t ex radiovågor, utbreder sig med ljusets hastighet, ca $3 \cdot 10^8$ m/s. Radiovågor har hög frekvens. Med frekvens menar vi antal perioder per sekund, vilket mäts i enheten Hertz, Hz. Sambandet mellan en vågs frekvens, f , och dess periodtid, T , s, är

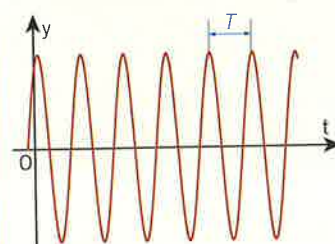
$$f = \frac{1}{T} \text{ eller } T = \frac{1}{f}$$

Varje radiostation sänder ut en sinusformad bärvåg med hög frekvens. På olika sätt kan vi sedan modulera bärvågen så att den bär med sig informationen om ljudet den ska överföra.

Vi kan t ex variera bärvågens amplitud, AM (amplitudmodulering) eller frekvensen, FM (frekvensmodulering).

En antenn kan sedan fånga upp radiovågorna till en mottagare, som sorterar bort bärvågen och överför variationerna till högtalaren. Där blir de ljud igen som vi kan uppfatta.

Den första radiosändningen över Atlanten genomfördes 1901 av italienaren Marconi. I Sverige startade utsändningarna av radio 1923 och TV 1956.



A = amplitud

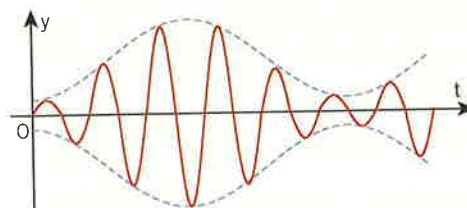
$$a = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

T = periodtid, s

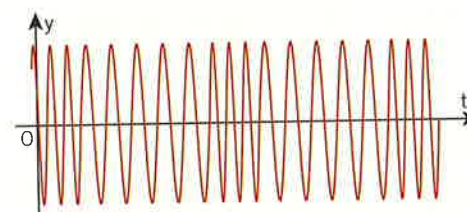
f = frekvens, Hz

Bärvåg: $y = A \sin at$

Exempel på moduleringar om ljudet som ska överföras har signalen $y = m \sin bt$.



AM-våg: $y = A \cdot m \sin bt \cdot \sin at$
Amplituden moduleras.



FM-våg: $y = A \sin(at + m \sin bt)$.
Frekvensen moduleras.

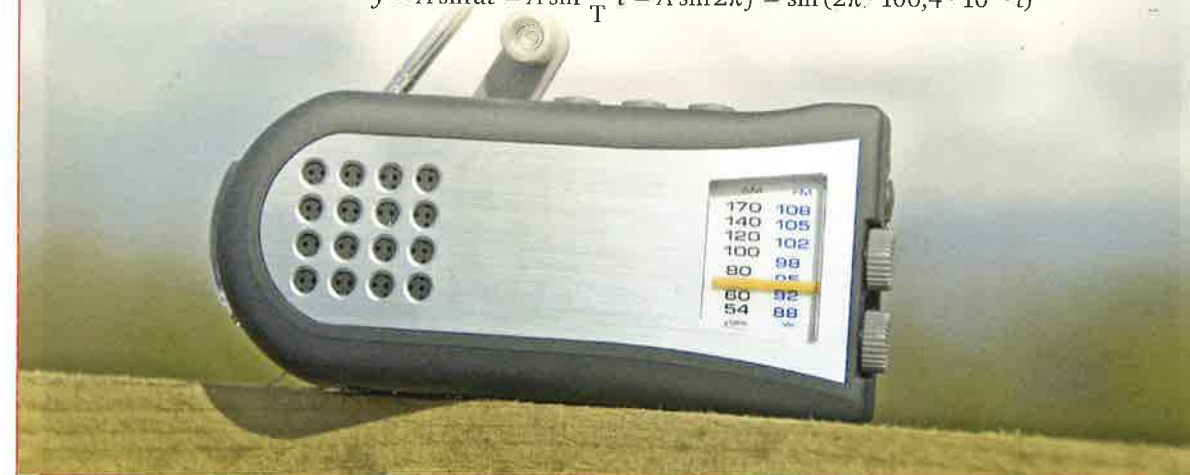
Exempel En radiostation sänder på en bärvåg med frekvensen 106,4 MHz.

Varje sekund svänger då vågen $106,4 \cdot 10^6$ perioder vilket ger

$$\text{Periodtid, } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{106,4 \cdot 10^6} \approx 9,40 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Om bärvågens amplitud är 1 ger det att bärvågen kan skrivas

$$y = A \sin at = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin 2\pi f = \sin(2\pi \cdot 106,4 \cdot 10^6 \cdot t)$$



1 En radiokanal sänder på bärvågen 99,7 MHz.

a) Hur många perioder svänger bärvågen varje sekund?

b) Beräkna bärvågens period.

c) Hur lång tid tar det för radiosignalen att färdas 100 mil?

2 Ett ungt mänskligt öra uppfattar ljud mellan 20 – 20 000 Hz.

Vilka periodtider har de ljudvågor örat kan uppfatta?

3 En mobiltelefon tar emot signaler med periodtiden $1 \text{ ns} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

Vilken frekvens har denna signal?

4 En våglängd är den längd en våg färdas under en period, dvs (vågens hastighet) $\cdot$ (vågens periodtid). Vilken våglängd har en bärvåg med frekvensen 100 MHz?

5 Ange en bärvåg på formen $y = A \sin at$ som har frekvensen 100 MHz och amplituden 5.

6 En bärvåg $y = 3 \sin 4t$ ska överföra signalen $y = 2 \sin t$.

Använd din grafräknare och bestäm största och minsta värde för

a) AM-vågen: $y = 3 \cdot 2 \sin t \cdot \sin 4t$

b) FM-vågen: $y = 3 \sin(4t + 2 \sin t)$

7 Undersök med din räknare för några olika värden på a funktionen

$$y = 2 \cdot \sin ax \cdot \sin 6x.$$

Kan vi få en "ren" sinuskurva?

8 Undersök med din räknare för några olika värden på a funktionen

$$y = 2 \sin(6x + \sin ax).$$

Vad händer när $a > 6$?

Aktivitet

DISKUTERA

Sant eller falskt?



Diskutera i par eller grupp. Arbeta utan räknare. Sant eller falskt? Motivera svaret.

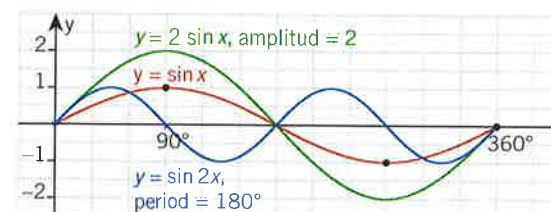
- 1 Perioden för $y = \sin 2x$ är 720°
- 2 Differensen mellan största och minsta värdet för en sinusfunktion kallas amplitud.
- 3 $\frac{\pi}{9}$ rad är en större vinkel än 18° .
- 4 $\sin 4$ är mindre än noll.
- 5 Funktionen $y = 2 \cos 3x - 2$ har minimivärdet 0.
- 6 Det finns två x -värden i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ för vilka $\tan x$ inte är definierad.
- 7 I en cirkelsektor med radien 3 cm och medelpunktsvinkeln 3 rad är bågens längd 6 cm.
- 8 Ekvationen $\cos v = 0,5$ saknar lösningar i intervallet $\pi \leq x \leq 2\pi$
- 9 Ekvationen $\tan x = a$ har alltid en lösning, oavsett värdet på a .
- 10 Det finns tangenter till kurvan $y = 1,5 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ som har lutningen 2.
- 11 Kurvan $y = \cos(x - 60^\circ)$ och kurvan $y = \cos \frac{x}{2}$ skär varandra tre gånger i intervallet $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
- 12 Om $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$ så är $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 13 Ekvationen $\sin^2 x = \cos^2 x$ har lösningen $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

Sammanfattning 2

Trigonometriska kurvor

Sinus- och cosinuskurvor

$y = A \sin kx$ Period: $360^\circ/k$ Amplitud: A

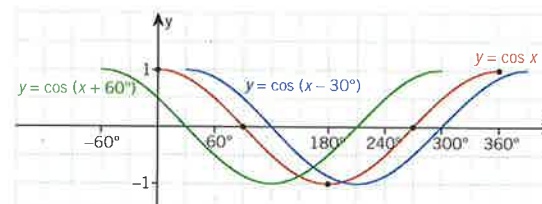


$y = \sin(x + v) + d$ är från $\sin x$ förskjuten

• uppåt om $d > 0$, nedåt om $d < 0$

• åt höger om $v < 0$ och åt vänster om $v > 0$.

Cosinuskurvor förskjuts på samma sätt.

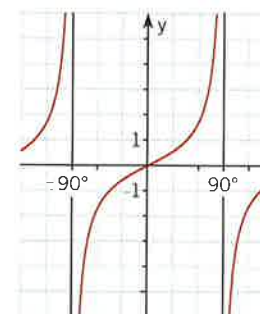


Kurvan $y = \tan x$

$y = \tan x = \sin x / \cos x$

Period = 180°

Kurvan närmar sig linjerna $x = -90^\circ$ och $x = 90^\circ$ där den ej är definierad.



Kurvan $y = a \sin x + b \cos x$

$y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + v)$

$y = a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x - v)$

där $a > 0$, $b > 0$, $\tan v = b/a$, $0^\circ < v < 90^\circ$

Radianbegreppet

Ett varv = $360^\circ = 2\pi$ rad, dvs $180^\circ = \pi$ rad

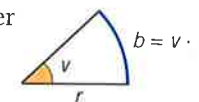
$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad $\approx 0,001745$ rad

$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$

För en cirkelbåge ger v i radianer

Bågen $b = v \cdot r$

Arean $A = \frac{v \cdot r^2}{2} = \frac{b \cdot r}{2}$



Grundekvationerna i radianer

$\sin x = k$ ($-1 \leq k \leq 1$)

$x = v + n \cdot 2\pi$ eller

$x = (\pi - v) + n \cdot 2\pi$ där $v = \sin^{-1} k$

$\cos x = k$ ($-1 \leq k \leq 1$)

$x = \pm v + n \cdot 2\pi$ där $v = \cos^{-1} k$

$\tan x = k$ (k godtyckligt tal)

$x = v + n \cdot \pi$ där $v = \tan^{-1} k$

De trigonometriska funktionernas derivator

x i radianer ger att

$y = \sin x$ har derivatan $y' = \cos x$

$y = \cos x$ har derivatan $y' = -\sin x$

Kedjeregeln

En sammansatt funktion $y = f(g(x))$ har

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

yttre derivatan · inre derivatan

Exempel:

$y = \sin 5x$

$y' = \cos 5x \cdot 5 = 5 \cos 5x$

$y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

$y' = 2 \sin x \cdot \cos x$

Tillämpningar och problemlösning

I de flesta tillämpningar använder vi radianer för att få en enklare derivata.

Allmän problemlösningstrategi

1. Förstå problemet
2. Gör upp en plan
3. Genomför planen
4. Värdera resultatet

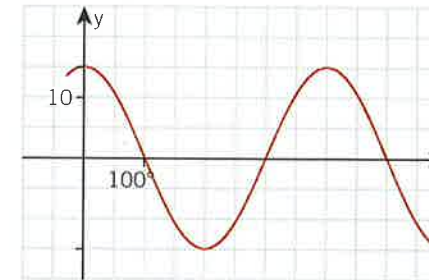
Kan du det här? 2

Moment	Begrepp som du ska kunna använda och beskriva	Du ska ha strategier för att kunna
Trigonometriska kurvor	Sinuskurva Cosinuskurva Period Amplitud Kurvan $y = \tan x$ Kurvan $y = a \sin x + b \cos x$	- bestämma kurvors period och amplitud - skissa och bestämma sinus- och cosinuskurvor med olika förskjutningar - lösa trigonometriska ekvationer och olikheter grafiskt - lösa ekvationer av typen $\tan ax = k$ - bestämma amplitud och förskjutning för $y = a \sin x + b \cos x$
Radianbegreppet	Radian	- omvandla mellan grader och radianer - beräkna värden och lösa ekvationer med radianer - beräkna cirkelsektors båge och area.
De trigonometriska funktionernas derivator	Derivatan till $\sin x$ och $\cos x$ Sammansatt funktion Kedjeregeln	bestämma derivator för $\sin x$, $\cos x$ och sammansatta funktioner.
Tillämpningar och problemlösning		lösa olika matematiska problem och tillämpningar.

Diagnos 2

Trigonometriska kurvor

1 Bestäm period och amplitud för kurvan.



2 Låt $y = 4 \sin \frac{x}{3}$

a) Ange period och amplitud.

b) Skissa kurvan i stora drag.

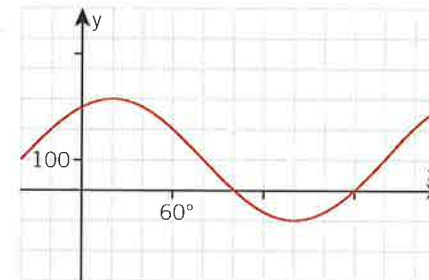
c) Undersök grafiskt för vilka x i intervallet

$$0 < x < 720^\circ \text{ som } 4 \sin \frac{x}{3} > 2$$

3 Sant eller falskt? Motivera.

"Funktionerna $y = 2 \sin x$ och $y = 1,5 \cos 2x$ har lika många lösningar till ekvationen $y = 1$ i intervallet $0 < x < \pi$."

4 Bestäm de positiva talen A , b , c och d så att funktionen $y = A \sin b(x + c) + d$ ger grafen



5 Ekvationen $\tan ax = 1$ har lösningen $x = 22,5^\circ + n \cdot 90^\circ$. Bestäm a .

Radianbegreppet

6 Omvandla

a) 210° till radianer b) 4 radianer till grader.

7 Lös ekvationen fullständigt. Svara i radianer med två decimaler.

a) $\cos x = 0,8$ c) $\tan(x - 0,25) = 1$

b) $\sin 2x = 0,77$ d) $\sin(8x - 1,1) = 0,1$

8 Visa hur formeln för en cirkelsektors båge förändras om medelpunktsvinkeln ges i radianer istället för grader.

De trigonometriska funktionernas derivator

9 Derivera

a) $y = 5 \cos x - 3 \sin x$ b) $y = 3x^2 - 4 \cos x$

10 Vilken lutning har tangenten till kurvan $y = 3 \cos x - 2 \sin x$ i den punkt där $x = \pi/2$?

11 Derivera

a) $f(t) = 5 \sin 2t$ b) $y = 3 \cos(x^2 + 1)$

12 För vilka x i intervallet $0 < x < \pi$ har $y = \cos 2x$ en negativ derivata?

Tillämpningar och problemlösning

13 En jordbävning till havs skapar en stor våg. Vattendjupet d m i en hamn som nås av vågen ges av

$$d(t) = 11 - 12 \sin \frac{2\pi t}{15} \quad 0 \leq t \leq T$$

där t är tiden i min och T perioden.

a) Bestäm vågens period.

b) Mellan vilka tidpunkter är hamnen torrlagd?

14 Nils påstår att för $y = 2 - 0,5 \sin 3x$ är funktionens största värde större än derivatans största värde. Har han rätt?

Om du behöver repetera kan du fortsätta med *Repetitionsuppgifter* på sidan 251.

Blandade övningar kapitel 2

Del I Utan räknare

1 Ange period och amplitud för

a) $y = 3 \sin 2x$ b) $y = 1 + 4 \cos 0,5x$

2 Derivera

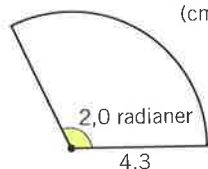
a) $y = 2 \sin 5x - 3 \cos x$

b) $y = (x^2 + 1)^3$

3 Omvandla $\frac{7\pi}{3}$ till grader.

4 Bestäm längden av cirkelsektorns båge.

(cm)



5 Ange samtliga lösningar, i radianer, till ekvationen $\sin \frac{x}{3} = 0,5$.

6 Bestäm det positiva talet C så att funktionen $f(x) = C \sin 5x + 8$

a) får maximivärdet 12

b) uppfyller villkoret $f(\pi/6) = 20$.

7 Vilken eller vilka av nedanstående ekvationer har två lösningar i intervallet $0 \leq x \leq \pi$?

A $\cos x = -0,3$

B $\sin x = 0,8$

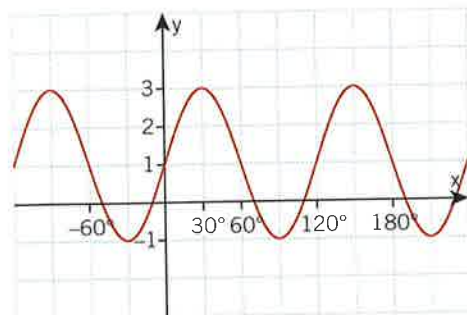
(NP)

8 Figuren visar grafen till funktionen

$$y = A \sin kx + b$$

Ange konstanterna A , k och b .

(NP)



9 Skriv i storleksordning med den minsta först.

b) Motivera ditt svar.

$$\sin 25^\circ \quad \cos \frac{\pi}{5} \quad \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \tan \frac{\pi}{3}$$

10 Derivatan till funktionen

$$f(x) = \sin 2x - x$$

har ett nollställe i intervallet $\pi/2 < x < \pi$

Ange detta nollställe. Svara i radianer.

11 Bestäm lutningen för tangenten till kurvan

$$y = \sin^2 x$$

i den punkt där $x = \pi/6$.

12 Vilket är det största värdet som funktionen

$$y = 6 \sin x + 8 \cos x$$

kan anta?

13 Ge en funktion på formen $y = A \sin kx$ för vilken $y'(\pi) = 2$.

14 Lös ekvationen $\sin 2x = \sin(x + \pi/3)$

i intervallet $0 < x < 2\pi$

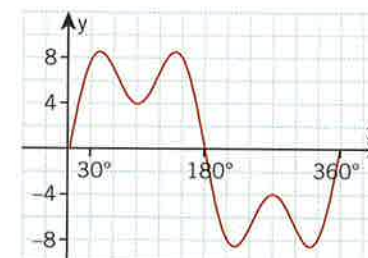


15 En ton låter olika på olika instrument. Förklaringen till detta är att klangen består av en grundton och flera övertoner och att övertonerna är olika starka på olika instrument.

Om $y = a \sin x$ motsvarar grundtonen så beskriver $y = b \sin 2x$ den 1:a övertonen och $y = c \sin 3x$ den 2:a övertonen o s v.

Figuren visar grafen till $y = a \sin x + c \sin 3x$. Funktionen beskriver en grundton och dess andra överton.

Bestäm konstanterna a och c .



Del II Med räknare

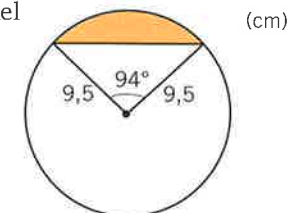
16 Bestäm i hela grader de lösningar till ekvationen $\tan 3x = 0,810$ som ligger i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

17 Sant eller falskt? "En kurvas amplitud är lika med dess största värde." Motivera ditt svar.

18 Figuren visar en cirkel med radien 9,5 cm.

a) Beräkna triangelns area.

b) Beräkna det färgade cirkelsegmentets area.



19 Finn ett värde på k så att $\sin k^\circ > \sin k$.

20 Antalet renar inom ett område uppskattas till

$$y = 3900 + 1200 \cos 0,04t$$

t månader efter årsskiftet 2010/11.

a) Hur lång tid efter årsskiftet 2010/11 slutar antalet renar att minska?

b) Vilken förändringshastighet ger modellen för 1 mars 2012?

21 Bestäm en funktion på formen

b) $y = A \sin kx + B$ som uppfyller villkoren:

• $A > 0$

• Värdemängden är $-4 \leq y \leq 2$

• De lokala maximipunkterna har x -koordinaterna $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ för alla heltal n . (NP)

22 Bestäm antalet lösningar till ekvationen

$$\sin 2x = \frac{x^2}{10} - 1, \text{ där } x \text{ mäts i radianer.}$$

(NP)

23 Har kurvan $y = \sin 2x + x$ någon största lutning?

- 24 För att programmera en automatisk strömbrytare har en elingenjör satt upp en matematisk modell som anger den tidpunkt M på dygnet vid vilken det börjar bli mörkt på en viss ort:

$$M = 19 - 4 \cos \frac{\pi(360 - t)}{180}$$

där M är tiden i timmar ($M = 12,5$ motsvarar kl 12.30) och t är tiden i dagar ($t = 1$ motsvarar den 1 januari). I modellen förutsätts alla månader omfatta 30 dagar.

Beräkna enligt modellen

- när det börjar bli mörkt i mitten av april
- i vilka månader de dagar ligger då det börjar bli mörkt klockan 18
- när under året tidpunkten för mörkrets inbrott ändras snabbast.

(NP)

- 25 Förklara varför ekvationen

$$\frac{2 \sin(2x - \pi/4) + 3}{\cos^2 x + 1} = 0$$

saknar lösningar.

- 26 Vattenvolymen i en insjö, $V(t)$ m³, där t är tiden i år, kan uppskattas med formeln

$$V(t) = 300\,000 - \frac{72\,000}{\pi} \cos \pi t - 45\,000 t$$

$$0 < t < 1$$

Variationerna i V beror dels av nederbörden, dels av vattenuttaget till ett kraftverk.

För vilka värden på t i det angivna intervallet ökar insjöns vattenvolym?



Utredande uppgifter @ b c

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

- 27 Du ska undersöka antalet nollställen till funktionen

$$y = a \sin x + b \sin 2x \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

- Undersök grafiskt antal nollställen till funktionen
 $y = 3 \sin x + \sin 2x \quad (0^\circ \leq x \leq 360^\circ)$
Visa med en enkel skiss.

- Lös ekvationen $3 \sin x + \sin 2x = 0$ algebraiskt ($0 \leq x \leq 360^\circ$).

- Undersök grafiskt antalet nollställen till funktionen
 $y = 4 \sin x + 7 \sin 2x \quad (0 \leq x \leq 360^\circ)$
Visa med en enkel skiss.

- Lös ekvationen $4 \sin x + 7 \sin 2x = 0$ algebraiskt ($0 \leq x \leq 360^\circ$).

- Undersök hur antalet nollställen till funktionen $y = a \sin x + b \sin 2x$ varierar med valet av konstanterna a och b ($0 \leq x \leq 360^\circ$).

- 28 Lina tittar i en gammal almanacka och ser att i Göteborg 2009 var solen ovanför horisonten enligt följande:

1/1: 08.58 – 15.34	1/9: 06.15 – 20.08
1/3: 07.08 – 17.42	1/12: 08.33 – 15.29
1/6: 04.24 – 21.56	

- Uppskatta med hjälp av värdena ovan när dagen var som längst.
- Använd din räknare/dator och anpassa en funktion till värdena. Beräkna, med hjälp av din funktion, vilken dag som var längst år 2009.

Blandade övningar kapitel 1-2

Del I



Utan räknare

- 1 Omvandla 720° till radianer.

@

- 2 Bestäm $\cos 7\pi$.

- 3 Derivera $y = \frac{\sin 2x}{2}$

- 4 Vilket är det största värde som funktionen $y = 5 \sin x - 7$ kan anta?

- 5 Ekvationen $\sin x = 0,94$ har enligt räknaren en lösning $x \approx 70^\circ$.

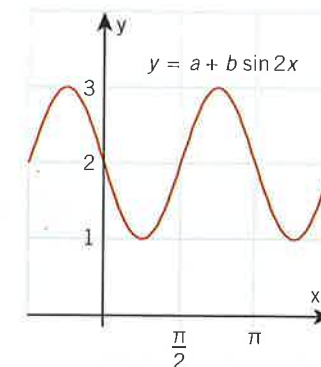
Ange ekvationens lösningar i intervallet $90^\circ < x < 450^\circ$

- 6 Bevisa med ett indirekt bevis att $x \leq 8$ ger att $16 - 2x \geq x - 8$

- 7 Bestäm $\cos 2x$ då $\sin x = 0,6$.

- 8 Figuren visar grafen till funktionen $y = a + b \sin 2x$

Bestäm konstanterna a och b .

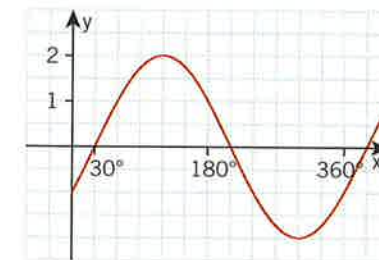


- 9 Ange samtliga lösningar till

b) ekvationen $\frac{2 \cos 3x - 1}{4} = 0$

- 10 Förenkla $\sin(x + 90^\circ) + \cos(x + 90^\circ)$

- 11 a) Bestäm en funktion som ger grafen



- b) Finns det fler? Motivera.

- 12 Bestäm var tangenten till kurvan $y = \cos x - 0,5x$ i punkten $(\pi; -1 - \frac{\pi}{2})$ skär x-axeln.

- 13 Ange en egen funktion som uppfyller att $f(\pi/4) = 2$ och $f'(\pi/4) = 0$.

- 14 a) Visa att ekvationen $\frac{2 \sin 2x}{1 - \sin^2 x} = 4$ kan omformas till $\tan x = 1$.

- b) Lös ekvationen $\tan x = 1$ fullständigt.

- 15 Lös ekvationen $\sin^2 x = \cos^2 x$

- 16 Funktionen $f(x) = 2 \sin^2 x - \sin 2x$ är given.

c) Visa att $f(x) = 1 - \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

- 17 Bevisa att om n är ett heltal och $n^3 + 5$ är udda så är n ett jämnt tal.

(NP)

Del II Med räknare

18 Bestäm de lösningar till ekvationen
a) $\cos 2x = 0,45$ som ligger i intervallet
 $0 \leq x \leq \pi$.

19 I triangeln ABC är vinkeln $A = 8,8^\circ$,
sidan $AB = 75$ cm och sidan $AC = 68$ cm.
Hur lång är sidan BC ?

20 Vilka x ger att $\sin x = \cos x$? Motivera.

21 Temperaturen i en sjö uppmättes under ett
molnigt sommardygn.

Temperaturen visade sig följa funktionen
 $y(t) = 15 + 2 \sin 0,26t$ där t är antalet
timmar efter kl 12.00.

a) Bestäm $y'(t)$

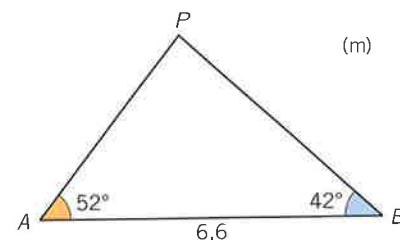
b) Beräkna $y'(10)$

c) Tolka vad $y'(10)$ betyder för vattnets
temperatur.

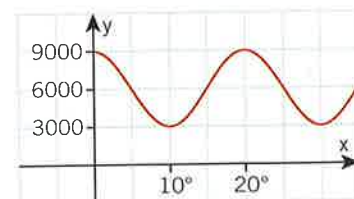
(NP)

22 Förenkla $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ och
b) skriv sedan produkten $2 \cos 75^\circ \cdot \cos 20^\circ$
som en summa.

23 Triangeln ABP är given enligt figur. Beräkna
avståndet från punkten P till sidan AB .



24 Bestäm en cosinusfunktion som ger grafen.



25 Undersök grafiskt och visa med en enkel skiss
om det finns några v så att
 $2 \sin(v + 12^\circ) = \cos(v + 23^\circ)$
för $0^\circ < v < 180^\circ$

Ange i så fall detta/dessa värden.

(NP)

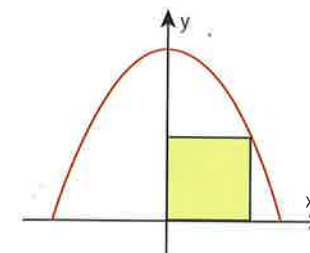
26 Rita grafen $y = \frac{\sin x}{x}$ och motivera att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



27 Figuren visar en kvadrat och grafen till en
funktion.

Välj en trigonometrisk funktion vars graf lik-
nar den i figuren och bestäm kvadratens area
för den funktion du valt.



(NP)

28 I en del andra länder används funktionerna

c) secant: $\sec x = 1/\cos x$

cosecant: $\csc x = 1/\sin x$

cotangens: $\cot x = 1/\tan x$

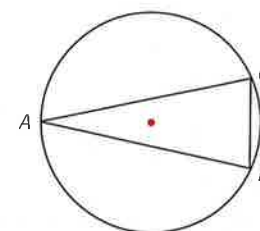
Bevisa att $\sec^2 x + \csc^2 x = \csc^2 x \cdot \sec^2 x$

29 Bestäm med hjälp av derivata det minsta
värdet till funktionen

$$f(x) = \frac{2 \sin 3x}{3} - x \text{ i intervallet } 1 \leq x \leq 2.$$

Svara exakt.

30 I en cirkel med radien r är en triangel ABC
inskriven. Sidan AB är större än cirkelns radi
och den är lika lång som sidan AC .
Bågen BC är lika med cirkelns radi.
Beräkna förhållandet mellan sträckan BC
och sträckan AC utan att införa några
närmevärden. Svara såväl exakt som
med tre decimaler.



Utredande uppgifter a b c

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter
följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- vilka slutsatser du har kommit fram till
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genom-
fört dina beräkningar.

31 Du ska nu undersöka funktionen

$$y = A \sin x + B$$

a) Visa att funktionens största värde är
dubbelt så stort som funktionens minsta
värde då $A = 1,5$ och $B = 4,5$.

b) Låt $B = 1,8$ och bestäm A så att

$$y_{\max} = 2 \cdot y_{\min}$$

c) Visa att $y_{\max} = 2 \cdot y_{\min}$ alltid gäller då
 $B = 3A$.

32 Triangeln ABC är rätvinklig.

a) Välj ett värde på en av de spetsiga
vinklarna och beräkna summan
 $\sin A + \sin B + \sin C$.

b) Undersök hur summan
 $\sin A + \sin B + \sin C$ varierar.