



DERIVATOR OCH INTEGRALER

Centralt innehåll

- * Härledning och användning av derivationsregler för logaritm- och exponentialfunktioner samt produkt och kvot av funktioner.
- * Egenskaper hos logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
- * Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
- * Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar relevanta för karaktärsämnen.
- * Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler inklusive beräkning av storheter och sannolikhetsfördelning
- * Strategier för matematisk problemlösning.



Inledande aktivitet

LÄGGA DERIVATOR

- Dela ett A4-papper så att du får 16 papperslappar.
- Skriv siffran 0 på två av lapparna.
- Skriv siffran 1 på två av lapparna.
- Skriv siffran 2 på två av lapparna.
- På de kvarvarande tio lapparna skriver du följande matematiska uttryck (ett uttryck per lapp):

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$2e^{\frac{x}{2}}$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\cos x$	$e^{\frac{x}{2}}$
$-\cos x$	$\frac{4x+2}{2}$	$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
$\frac{x}{e^2}$		

- 1 Lägg lapparna i fyra rader så att ordningen i varje rad blir:

Funktion $f(x)$	$f(0)$	Funktionens derivata $f'(x)$	Funktionens andrerivat $f''(x)$
--------------------	--------	------------------------------------	---------------------------------------

238876744
894789475
15343274
7547
112
777
482398678567
894789475849

3.1 Derivator och deriveringsregler

Kort om derivator

Exempel På höjden x km kan lufttrycket y mbar beskrivas med funktionen $y = 1013 \cdot e^{-0,12x}$ och derivatan $y' = -121,56 \cdot e^{-0,12x}$.
I tillämpningar är derivatan ett mått på funktionens förändringshastighet.
 $y'(5) \approx -67$ betyder att lufttrycket på höjden 5 km sjunker med hastigheten 67 mbar/km.

Derivatan till en funktionen $f(x)$ kan bestämmas på flera olika sätt.

derivatans definition 1 Med derivatans definition

f'(x) = lim_{h -> 0} (f(x+h) - f(x)) / h

deriveringsregler 2 Med deriveringsregler som är härledda ur derivatans definition.

numerisk derivering 3 Med numerisk derivering får vi ett approximativt värde.
T ex med en central differenskvot:

(f(x+h) - f(x-h)) / (2h) approx f'(x)

Många räknare använder denna approximation för numerisk derivering.

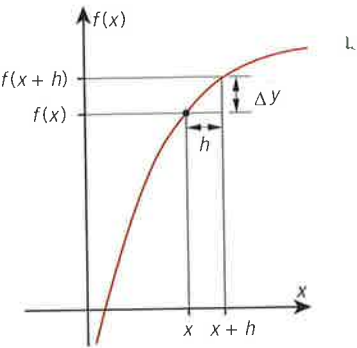
4 För små h är differenskvoten

(f(x+h) - f(x)) / h ungefär lika med f'(x).

(f(x+h) - f(x)) / h approx f'(x)

eller f(x+h) approx f(x) + h * f'(x).

Om $h = \Delta x$ kan denna approximation skrivas $f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$.



andraderivatan Derivatan av en funktions derivata skrivs $f''(x)$ och kallas *andraderivatan*.

f(x) = sin x - cos 2x funktionen
f'(x) = cos x + 2 sin 2x förstaderivatan
f''(x) = -sin x + 4 cos 2x andraderivatan

skrivsätt Om $y = f(x)$ så kan

y' skrivs dy/dx eller Df(x) (y' utläses "y prim")

y'' skrivs d^2y/dx^2 eller D^2f(x) (y'' utläses "y bis")

Med hjälp av definitionen kan följande deriveringsregler härledas:

Deriveringsregel	Exempel
$y = x^a, a$ reellt tal $y' = a \cdot x^{a-1}$, där $x > 0$	$y = 5x^3 + 4x + 7$ $y' = 15x^2 + 4$ $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^{1/2} + x^{-1}$ $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} + (-1) \cdot x^{-2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$
$y = e^{kx}$ $y' = k \cdot e^{kx}$	$y = 5e^{3x}$ $y' = 3 \cdot 5e^{3x} = 15e^{3x}$
$y = a^x$ $y' = a^x \ln a$	$y = 100 \cdot 0,9^x$ $y' = 100 \cdot 0,9^x \ln 0,9 \approx -10,5 \cdot 0,9^x$
$y = \sin x$ och $y = \cos x$ $y' = \cos x$ $y' = -\sin x$	$y = 4 \sin x + \cos x$ $y' = 4 \cos x - \sin x$
$y = f(g(x))$ $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (kedjeregeln)	$y = (2x^2 + x)^{10}$ $y' = 10 \cdot (2x^2 + x)^9 \cdot (4x + 1)$
	$y = e^{6x^3 - 2x}$ $y' = e^{6x^3 - 2x} \cdot (18x^2 - 2)$
	$y = 5 \cos 3x$ $y' = -5 \sin 3x \cdot 3 = -15 \sin 3x$
	$y = \frac{1}{\sin^3 x} = (\sin x)^{-3}$ $y' = (-3) \cdot (\sin x)^{-4} \cdot \cos x = -\frac{3 \cos x}{\sin^4 x}$

I exemplen ovan har vi också använt de generella reglerna:

y = k * f(x) ger y' = k * f'(x) där k är en konstant
y = f(x) + g(x) ger y' = f'(x) + g'(x) dvs vi kan derivera term för term

3101 Bestäm y'' + y' + y om y = e^{2x} + sin 3x

y = e^{2x} + sin 3x ger y' = 2e^{2x} + 3 cos 3x och y'' = 4e^{2x} - 9 sin 3x

y'' + y' + y = e^{2x} + sin 3x + 2e^{2x} + 3 cos 3x + 4e^{2x} - 9 sin 3x =

= 7e^{2x} - 8 sin 3x + 3 cos 3x

3102 Uppskatta f(3,2) med hjälp av approximationen f(x + Δx) ≈ f(x) + Δx · f'(x) om vi vet att f(3) = 4 och f'(3) = -0,5.

f(x + Δx) ≈ f(x) + Δx · f'(x)

f(3,2) = f(3 + 0,2) ≈ f(3) + 0,2 · f'(3) = 4 + 0,2 · (-0,5) = 3,9

3103 Bestäm y' och y'' om

a) $y = x^5 - 8x^3$ c) $y = \frac{x^{-3}}{3} + 2$

b) $y = 8x^2 + 4e^{2x}$ d) $y = \frac{3}{x^2} + \frac{2x}{3}$

3104 Förenkla $y'' + 16y$ om

a) $y = 3 \sin 4x + 5 \cos 4x$

b) $y = e^{2x} + e^{4x}$

3105 Folkmängden y tusen i en kommun kommer enligt en prognos att följa funktionen

$$y = 0,0020x^3 - 0,1132x^2 + 1,5412x + 27,0$$

där x är tiden i år räknat från 2005. Beräkna och tolka $y'(20)$.

3106 Derivera

a) $y = (x^2 + 1)^8$ c) $y = \sin(x^3)$

b) $y = e^{x^2+x}$ d) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

3107 Uppskatta med hjälp av tabellen ett ungefärligt värde på $f'(2,0)$

x	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$f(x)$	11	13	17	22	29

3108 Skriv $y = \frac{x^2 + 4x}{2}$ som en produkt på

formen $y = k \cdot f(x)$ där k är en konstant. Derivera sedan funktionen.

3109 Ge ett exempel på en funktion vars andraderivata alltid är

a) 0 b) negativ

3110 Använd approximationen

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$ för att ge ett ungefärligt värde på

a) $f(10,3)$ om $f(10) = 5,77$ och $f'(10) = 0,70$

b) $f(2,1)$ om $f(2) = 3,45$ och $f'(2) = -1,50$.

3111 Visa med deriveringsregler att

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ har derivatan } y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

3112 $f(x) = 5e^{2x}$. Bestäm ett närmevärde med tre decimaler till $f'(3)$ genom att

a) först bestämma $f'(x)$

b) utnyttja att för $h = 0,1$ är

$$f'(3) \approx \frac{f(3+h) - f(3-h)}{2h}$$

c) använda räknarens deriveringsfunktion.

3113 Derivera

a) $y = (e^{0,4x})^2$ c) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

b) $y = \frac{1}{e^{2x}}$ d) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

3114 Grafen till $y = \sqrt{2x + a}$ har för $x = 1$ en tangent med lutningen 0,5. Bestäm a .

3115 Den n :te derivatan till funktionen

$y = f(x)$ betecknas $y^{(n)}$.

Finn ett uttryck för $y^{(n)}$ om

a) $y = e^{2x}$ b) $y = \frac{1}{x}$

3116 $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Ställ upp och förenkla den centrala differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

b) Vilken slutsats kan du dra utifrån resultatet i a)?

3117 Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan av

a) $y = f(x) + g(x)$ är $y' = f'(x) + g'(x)$.

b) $y = \frac{1}{x^2}$ är $y' = -\frac{2}{x^3}$

Aktivitet

UPPTÄCK

Produkters derivator



1 Sibel undersöker några derivator med en symbolhanterande räknare.

Funktionerna hon deriverar är

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

$$f(x) = x^7 \cdot e^{4x}$$

$$f(x) = \cos x \cdot e^{2x}$$

Skärmbilden nedan visar resultatet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 \sin(x)) &= x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) \\ \frac{d}{dx}(x^7 e^{4x}) &= 4 \cdot x^7 \cdot e^{4x} + 7 \cdot x^6 \cdot e^{4x} \\ \frac{d}{dx}(\cos(x) e^{2x}) &= 2 \cdot \cos(x) \cdot e^{2x} - \sin(x) \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

Alla funktionerna är produkter och kan skrivas på formen:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

Studera i skärmbilden resultatet, dvs derivatorna. Vilket mönster kan du se?

2 Sibel undersöker ytterligare några derivator. Studera skärmbildens funktioner och derivator.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x \cdot x) &= e^x + x \cdot e^x \\ \frac{d}{dx}(\cos(x) \sin(x)) &= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 \end{aligned}$$

Stämmer mönstret du såg i uppgift 1?

Formulera en regel för att derivera produkter av typen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Derivatan av en produkt

Exempel Funktionen $y = 5x^2 + 3x^4$ är en summa av två termer och vi kan derivera funktionen "term för term". $y' = 10x + 12x^3$.
Funktionen $y = e^{2x} \cdot \sin x$ är en produkt av två faktorer.
Får vi derivera en sådan funktion "faktor för faktor"?

Vi undersöker med en annan produkt där vi kan förenkla och se vad derivatan ska bli.

$y = 5x^2 \cdot 3x^4$ kan förenklas till $y = 15x^6$ som har derivatan $y' = 90x^5$.

Om vi deriverar faktorerna var för sig får vi:

Faktor	Derivata
$f(x) = 5x^2$	$f'(x) = 10x$
$g(x) = 3x^4$	$g'(x) = 12x^3$
Produkten $y = 15x^6$ har derivatan $y' = 90x^5$.	Produkten av f' och g' blir $f' \cdot g' = 120x^4$.

Stämmer inte alls! Fel koefficient och fel exponent!

Slutsats: Vi får inte derivera en produkt "faktor för faktor".

För att få rätt derivata använder vi istället sambandet mellan faktorer och derivator som vi fann i aktiviteten på föregående sida.

Funktionen $y = f(x) \cdot g(x)$ ger derivatan $y' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$y = 5x^2 \cdot 3x^4$ ger $y' = 5x^2 \cdot 12x^3 + 10x \cdot 3x^4 = 60x^5 + 30x^5 = 90x^5$

Allmänt Vi motiverar att sambandet gäller allmänt på två olika sätt.

metod 1 Bilda differenskvoten för $y = f(x) \cdot g(x)$

$$\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \approx$$

$$\approx \frac{(f(x) + h \cdot f'(x)) \cdot (g(x) + h \cdot g'(x)) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x) \cdot h \cdot g'(x) + h \cdot f'(x) \cdot g(x) + h \cdot f'(x) \cdot h \cdot g'(x)}{h} =$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) + h \cdot f'(x) \cdot g'(x)$$

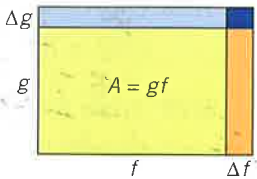
Då $h \rightarrow 0$ går differenskvoten mot $f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x) \text{ ger}$$
$$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$$
$$g(x+h) \approx g(x) + h \cdot g'(x)$$

Förenkla täljaren

Dividera med h

metod 2



Den gröna rektangelns area: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$

Om x ändras med Δx så ändras f med Δf och g med Δg .
Arean ändras då med (se figur):

$$\Delta A = f(x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x) + \Delta f \cdot \Delta g$$

Differenskvoten blir då:

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x}$$

Låter vi Δx gå mot noll får vi derivatan:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$

$$= f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad \text{dvs}$$

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Produktregeln

Om $y = f(x) \cdot g(x)$ så är

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

y' = den första faktorn $\times$ den andra faktorns derivata

+ den första faktorns derivata $\times$ den andra faktorn

3118

Derivera $y = e^{2x} \cdot \sin x$

$$\begin{matrix} f(x) & g'(x) & f'(x) & g(x) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$y' = e^{2x} \cdot \cos x + e^{2x} \cdot 2 \cdot \sin x$$

$$y' = e^{2x} (\cos x + 2 \sin x)$$

3119 Derivera

a) $y = x \cdot \sin x$ b) $y = x^2 \cdot \cos 3x$

3120 Derivera $y = (1 + 2x)(3 + x^2)$

- a) med produktregeln
b) genom att först multiplicera parenteserna.

3121 Derivera $f(x) = 2 \cdot \cos x$ genom att

- a) använda att $k \cdot f(x)$ har derivatan $k \cdot f'(x)$
b) använda produktregeln.
c) Vilken metod är enklast?

3122 Derivera $y = \sin^2 x$ med

- a) kedjeregeln
b) produktregeln ($y = \sin x \cdot \sin x$).

3123 Derivera $y = e^{2x} \cdot e^{3x}$ med

- a) produktregeln
b) kedjeregeln (förenkla först).

3124 Petter påstår att det inte spelar någon roll vilken faktor vi deriverar först, dvs produktregeln kan skrivas

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \text{ eller}$$

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Har Petter rätt? Motivera.

3125 Derivera och förenkla

- a) $y = x \sin x + \cos x$
b) $y = 2x \cos x - 2 \sin x$

3126 Lös ekvationen $f'(x) = 0$ om

a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

3127 Anta att vi vet följande:

$$f(3) = 31, f'(3) = 27$$

$$g(3) = 6, g'(3) = 1.$$

Bestäm $h'(3)$ om

a) $h(x) = f(x) + g(x)$

b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

3128 Låt $f(x) = \sqrt{x} \cdot g(x)$, där $g(4) = 2$ och $g'(4) = 3$. Bestäm $f'(4)$.

3129 Arean $A \text{ m}^2$ av ett rektangulärt område varierar med tiden $t \text{ s}$ enligt funktionen

$$A = (2 + 2 \cos t)(3 + 2 \sin 2t)$$

- a) Bestäm $A'(t)$.
b) Beräkna och tolka $A'(5)$.

3130 Derivatan av en produkt är $(1 + x)e^x$. Vilken är produkten?

3131 Derivera

a) $y = \frac{x^3 \cdot \cos^3 x}{3}$ b) $y = 2x \cdot \sin x \cdot e^{2x}$

3132 a) Förenkla $\frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$

- b) Använd resultatet i a) och kedjeregeln för att härleda derivatan av $y = f \cdot g$

3133 Härled derivatan till $f \cdot g \cdot h$ genom att derivera $f \cdot (g \cdot h)$

3134 Ett rätblock med sidorna $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ har volymen $V(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$.

- a) Vad blir ΔV om x ändras med Δx ?

- b) Bestäm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$



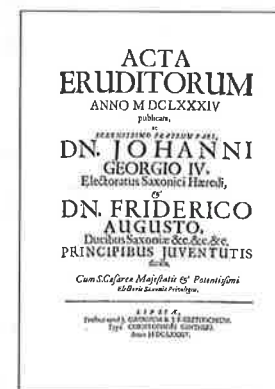
Historik

Leibniz och produktregeln

Tyckte du produktregeln verkade svår att komma på? Misströsta inte, till och med Leibniz, en av alla tiders största matematiker, hade stora svårigheter med den. Kanske vi oftare borde försöka följa den många gånger långa och krokiga väg som lett fram till en viktig sats och inte bara se till slutresultatet.

Gottfried Wilhelm Leibniz föddes i Leipzig 1646, två år före trettioåriga krigets slut. Efter studier i juridik, filosofi och matematik kom han så småningom till Hannover som bibliotekarie. Arbetet gav honom möjlighet att resa och att utveckla sitt intresse för matematik.

Flera matematiker, bl a Fermat, hade tidigare löst problemet med att bestämma funktioners extremvärden och kurvors tangenter för speciella funktioner. Men det var Leibniz som tog det avgörande steget: På



Sida ur Acta Eruditorum

1670-talet utvecklade han den allmänna metoden med derivator och införde de beteckningar som vi använder än idag. I tidskriften "Acta Eruditorum" publicerade han 1684 sina resultat i en artikel som började: *En ny metod för maxima och minima, såväl som för tangenter...*

Genom Leibniz insatser förvandlades plötsligt extremvärdesproblemen till förhållandevis enkla rutinuppgifter!

I Leibniz' anteckningar från hösten 1675 kan vi följa hur han kämpade med produktregeln. Han började med ett exempel där han snabbt konstaterar "att om $u = cx + d$ och $v = x^2 + bx$ så är derivatan av $u \cdot v$ lika med produkten $u' \cdot v'$ ". Så småningom inser han felet och 10 dagar senare har han upptäckt den riktiga formen av produktregeln,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + v'u$$

som han kommenterar så här: "Detta är en allmängiltig sats, värd att lägga märke till." En antydning till bevis finner vi inte förrän något år senare. På den tiden var det, till skillnad från idag, vanligt att man publicerade satser utan bevis.

1 Leibniz första idé var att produkten $u \cdot v$ hade derivatan $u' \cdot v'$.

Visa att Leibniz första idé var fel genom att multiplicera ihop produkten och derivera. Jämför med vad Leibniz idé ger för svar.

a) $f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 \cdot 1$

b) $f(x) = u(x) \cdot v(x) = x^2 \cdot x^3$

c) $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (1+x)(1+x^2)$

2 Leibniz eget exempel var produkten $u \cdot v = (cx + d) \cdot (x^2 + bx)$.

- a) Visa att vi får samma svar om vi deriverar $u \cdot v$ med produktregeln eller om vi först multiplicerar ihop parenteserna.

- b) Jämför resultatet i a) med $u' \cdot v'$.

3 Det finns funktioner $u(x)$ och $v(x)$ där Leibniz första idé faktiskt stämmer. Kan du komma på vilka?

Derivatan av en kvot

Exempel 1 Hur deriverar vi $y = \frac{\sin x}{x}$, dvs kvoten av $\sin x$ och x ?

Vi har en regel för derivering av en produkt men inte av en kvot.

Vi utnyttjar detta och skriver om $y = \frac{\sin x}{x}$ som en produkt. Vi får:

$$y = \sin x \cdot \frac{1}{x} = \sin x \cdot x^{-1} \text{ som kan deriveras med produktregeln.}$$

$$y' = \cos x \cdot x^{-1} + \sin x \cdot (-1) x^{-2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$$

På samma sätt härleder vi en allmän formel för derivatan av en kvot.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ där } g(x) \neq 0$$

$y = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$ som deriveras med produkt- och kedjeregeln.

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot (-1)(g(x))^{-2} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Kvotregeln

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0) \text{ ger } y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

eller

$y' = \text{täljarens derivata} \times \text{nämnaren} - \text{täljaren} \times \text{nämnarens derivata,}$
allt dividerat med nämnaren i kvadrat.

Exempel 2 Med kvotregeln får vi derivatan av $y = \tan x$.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ (trigonometriska ettan i täljaren) eller}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Derivatan av $y = \tan x$

$$\text{Funktionen } y = \tan x \text{ har derivatan } y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

3135

Derivera a) $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$ b) $y = \frac{x^2 + 2x - 5}{x}$

a) Med $f(x) = 3x$ och $g(x) = x^2 + 4$ ger kvotregeln:

$$y' = \frac{\overbrace{3}^{f'} \cdot \overbrace{(x^2 + 4)}^g - \overbrace{3x}^f \cdot \overbrace{2x}^{g'}}{(x^2 + 4)^2} = \frac{12 - 3x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

b) **Metod 1: Vi skriver om uttrycket innan vi deriverar**

$$y = \frac{x^2 + 2x - 5}{x} = x + 2 - \frac{5}{x} \quad \boxed{\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1} \text{ har derivatan } -5 \cdot x^{-2} = -\frac{5}{x^2}}$$

$$y' = 1 + \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 + 5}{x^2}$$

Metod 2: Vi använder kvotregeln direkt

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x + 2)x - (x^2 + 2x - 5) \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 2x + 5}{x^2} = \frac{x^2 + 5}{x^2} \end{aligned}$$

Derivera med kvotregeln

3136 a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

a

3137 a) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ b) $f(x) = \frac{\cos 2x}{e^{2x}}$

3138 Derivera $y = \frac{x^3 + 5}{x}$ genom att

- a) använda kvotregeln
- b) först skriva om uttrycket.

3139 Derivera $y = \frac{1}{x^3}$ genom att

- a) använda kvotregeln
- b) skriva $\frac{1}{x^3}$ som x^{-3}

3140 Beräkna $f'(\frac{\pi}{3})$ då $f(x) = \tan x$

3141 $y = \frac{x^4 - x^2 + ax + b}{x}$

b

Visa att derivatan av y är oberoende av värdet på a men beror av värdet på b .

3142 Om funktionen $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ vet man att $f'(3) = -2$. Bestäm talet a .

3143 a) Derivera $y = \frac{x^2}{e^{2x}}$ genom att skriva om kvoten till en produkt.

b) Kan vi alltid skriva om en kvot som en produkt? Motivera.

3144 Visa att cotangens, $y = \cot x = \cos x / \sin x$ har derivatan $y' = -(1 + \cot^2 x)$

3145 Bestäm tangentens ekvation för kurvan

c

$$y = \frac{\tan x}{x} \text{ där } x = \pi/4$$

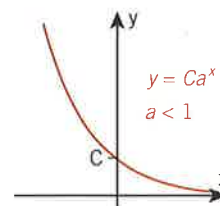
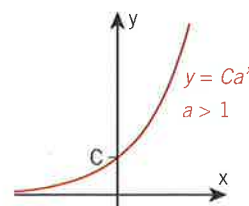
Exponential- och logaritmfunktioner

Exempel 1 Vi repeterar några fakta om exponentialfunktioner. Exponentialfunktionen $y = Ca^x$ är definierad för alla reella tal x . Värdeområdet är $y > 0$. Grafen är antingen växande för alla x ($a > 1$) eller avtagande för alla x ($a < 1$).

$y = Ca^x$ har derivatan $y' = Ca^x \cdot \ln a$.
Med kedjeregeln kan vi derivera t ex
 $y = 2 \cdot 1,3^{4x}$ som ger
 $y' = 2 \cdot 1,3^{4x} \cdot \ln 1,3 \cdot 4 = 8 \cdot \ln 1,3 \cdot 1,3^{4x}$

När en exponentialfunktion skrivs med basen e är funktionen enklare att derivata.

T ex $y = 50e^{0,3x} \Rightarrow y' = 50 \cdot 0,3e^{0,3x} = 15e^{0,3x}$



Derivatan av $y = a^{kx}$
 $y = e^{kx}$

För exponentialfunktioner gäller

$$y = a^{kx} \Rightarrow y' = a^{kx} \cdot \ln a \cdot k$$

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k \cdot e^{kx}$$

Exempel 2 Hur deriverar man $y = \ln x$?
 $y = \ln x$ är skrivet i logaritmform. I potensform kan detta skrivas $e^y = x$. Vi deriverar båda leden i $e^y = x$ med avseende på variabeln x och använder kedjeregeln. Vi får

$$e^y \cdot y' = 1 \text{ vilket kan skrivas } y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

yttre derivatan · inre derivatan

Derivatan av $y = \ln x$

Logaritmfunktionen $y = \ln x$, $x > 0$, har derivatan $y' = \frac{1}{x}$

3146

Derivera

a) $y = \ln 5x$

a) Derivera med kedjeregeln:

$$y' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$$

eller

Skriv om funktionen med en logaritmlag:

$$y = \ln 5x = \ln 5 + \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

b) $y = \frac{\ln x^2}{x}$

b) Kvotregeln ger

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot x - \ln x^2 \cdot 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$$

Inre derivata

3147

En linje med lutningen k går genom origo och är tangent till kurvan $y = \ln x$. Rita kurvan och tangenten och ange värdet på k .

Vi sätter tangeringspunkten till $(a, \ln a)$, $a > 0$.

Linjen går då genom punkterna $(0, 0)$ och $(a, \ln a)$.

$$\text{Formeln för } k \text{ ger } k = \frac{\ln a - 0}{a - 0} = \frac{\ln a}{a}$$

Tangenten i punkten $(a, \ln a)$ har $k = y'(a)$.

Om $y = \ln x$ så är $y' = \frac{1}{x}$ och $y'(a) = \frac{1}{a}$

Vi får alltså ekvationen

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\ln a = 1$$

$$a = e$$

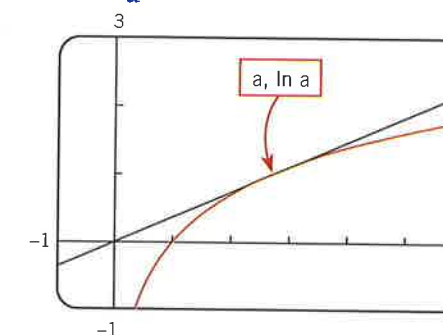
$$k = y'(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{e}$$

(Alternativt:

Enpunktsformeln ger

$$y - \ln a = y'(a) \cdot (x - a)$$

Insättning av $x = 0$, $y = 0$ och $y'(a) = 1/a$ ger $\ln a = 1$)



3148

En influensaepidemi sprider sig i ett samhälle med 2000 personer. Antalet personer N som insjuknat i influensan t dygn efter det att första personen blivit sjuk följer funktionen

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 1999 \cdot e^{-0,5t}}$$

Beräkna och tolka $N'(12)$.

$$N(t) = 2000 \cdot (1 + 1999 \cdot e^{-0,5t})^{-1}$$

$$N'(t) = 2000 \cdot (-1) \cdot (1 + 1999 \cdot e^{-0,5t})^{-2} \cdot 1999 \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) =$$

$$= \frac{1999000 \cdot e^{-0,5t}}{(1 + 1999 \cdot e^{-0,5t})^2}$$

$$N'(12) = \frac{1999000 \cdot e^{-6}}{(1 + 1999 \cdot e^{-6})^2} = 139,726... \approx 140$$

Svar: Att $N'(12) \approx 140$ kan tolkas så här: 12 dygn efter att influensan kom till samhället ökar antalet insjuknade med 140 personer/dygn.



Derivera

- 3149 a) $y = 4 + \ln x$ c) $y = \ln 4x$
 b) $y = 4 \ln x$ d) $y = \ln x^4$
- 3150 a) $y = 10e^{x/5}$ c) $y = 3000 \cdot 1,12^x$
 b) $y = 5^x$ d) $y = 10^{2x}$
- 3151 a) $y = (\ln x)^2$ c) $y = 2^{-x}$
 b) $y = \ln x^{2^x}$ d) $y = (2^x)^2$
- 3152 a) $y = (5x + 1)^{-1}$ c) $y = \frac{1}{\sin x}$
 b) $y = \frac{2}{e^x}$ d) $y = \frac{1}{(e^{2x} + 1)^2}$
- 3153 a) $y = e^{2x} \cdot \ln x$ b) $y = e^3 \cdot \ln x$
- 3154 Hassan säger att $\ln 5x$ och $\ln 8,5x$ har samma derivata. Har han rätt? Motivera.
- 3155 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \ln x$ i den punkt där $x = 1$. Rita kurvan och tangenten.
- 3156 Låt $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ och bestäm $f'(e)$.
- 3157 På en internatskola sprider sig mässlingen. Antalet elever N som insjuknat följer funktionen
- $$N(t) = \frac{250}{1 + 249 \cdot e^{-t}}$$
- där t är antalet dygn efter det att den första eleven blivit sjuk. Beräkna och tolka
- a) $N'(7)$ b) $N''(7)$.

- 3158 Derivera
- a) $y = \tan 2x$ c) $y = \ln(\cos x)$
 b) $y = \tan^2 x$ d) $y = \ln(\ln x)$

- 3159 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \frac{\ln x}{x^2}$ i punkten $(1, 0)$. Rita grafen.

- 3160 Beräkna med tre decimaler det värde på x för vilket derivatan till funktionen $y = x^3 \cdot \ln x$ antar värdet 0.

- 3161 Derivera vi $y^2 = x$ med avseende på x får vi $2y \cdot y' = 1$. Visa hur vi kan utnyttja detta för att härleda derivatan till $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ genom att göra omskrivningen $y^2 = x$ och sedan derivera båda leden.

- 3162 Härled derivatan till $y = a^x$, $a > 0$, genom att
- a) gå över till basen e och derivera.
 b) logaritmera båda leden och sedan derivera.

- 3163 Studera härledningen av derivatan till $\ln x$. Vad är derivatan av $y = \lg x$? Motivera.

- 3164 Om $y = \tan x$ så är
- $$y^2 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$
- a) Visa denna identitet.
 b) Derivera identiteten och härled derivatan av $y = \tan x$.

- 3165 Undersök med derivata om $x \cdot \ln x > -0,3675$ för alla positiva x .

- 3166 Bestäm exakt koordinaterna för maxipunkten på kurvan $y = x^{1/x}$. Rita grafen.

Samband mellan förändringshastigheter

Kedjeregeln ger ett samband mellan olika förändringshastigheter.

Exempel Antag att vi har en area A som beror av en variabel x som i sin tur beror av tiden t . Arealen kan då beskrivas av den sammansatta funktionen $A(t) = A(x(t))$.

Kedjeregeln ger att

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{yttre derivatan} \times \text{inre derivatan}$$

På denna form ger kedjeregeln ett användbart samband mellan olika variabler och förändringshastigheter för sammansatta funktioner.

3167

En rektangel har basen $b = 4$ cm och höjden $= 3$ cm. Rektangelns höjd ökar med 0,5 cm/min,



dvs $\frac{dh}{dt} = 0,5$ cm/min

- a) Ställ upp en formel för hur rektangelns area A beror av tiden t .
 b) Bestäm och tolka $\frac{dA}{dt}$
 c) Bestäm $\frac{dA}{dh}$ om $A = b \cdot h$
 d) Visa att $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

a) Arealen i cm² efter t minuter ges av
 $A(t) = b \cdot h = 4 \cdot (3 + 0,5t) = 12 + 2t$

b) $\frac{dA}{dt}$ betyder derivatan av A med avseende på variabeln t
 $A(t) = 12 + 2t \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2$

Tolkning: Arealen ökar med hastigheten 2 cm²/min.

c) $\frac{dA}{dh}$ betyder derivatan av A med avseende på variabeln h
 $A = b \cdot h \Rightarrow \frac{dA}{dh} = b \cdot 1 = b$ (b ska behandlas som en konstant)

d) $VL = \frac{dA}{dt} = 2$ cm²/min

$$HL = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = b \cdot \frac{dh}{dt} = 4 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ cm/min} = 2 \text{ cm}^2/\text{min} = VL$$

3168

En isskulptur har formen av ett klot. Den smälter så att radien minskar med hastigheten 2 mm/h. Med vilken hastighet förändras volymen när radien är 5 dm?

Beteckningar:

Klotets volym = $V \text{ dm}^3$

Klotets radie = $r \text{ dm}$

Tiden = $t \text{ h}$

Hastigheten med vilken

radien förändras = $\frac{dr}{dt}$

Hastigheten med vilken

volymen förändras = $\frac{dV}{dt}$

Volymen beror av radien som förändras med tiden, vilket kan skrivas $V(r(t))$.

Derivatan av V med avseende på t blir enligt kedjeregeln:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\text{Klotets volym, } V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{3 \cdot 4\pi r^2}{3} = 4\pi r^2$$

Radien minskar med hastigheten 2 mm/h = 0,02 dm/h

vilket kan skrivas $\frac{dr}{dt} = -0,02$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$r = 5 \text{ och } \frac{dr}{dt} = -0,02 \text{ ger}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot 5^2 \cdot (-0,02) = -6,283 \dots \approx -6$$

Svar: Volymen minskar med 6 dm³/h.



3169 Bestäm

a) $\frac{dy}{dt}$ om $y = \sin t - t$ b) $\frac{dA}{dr}$ om $A = 4r^2$

3170 En sten kastas i en damm och ger upphov till en cirkulär vattenvåg. Arealen innanför vågen är $A = \pi r^2$. Vågen utbreder sig så att radien ökar med hastigheten 0,075 m/s.

Kedjeregeln ger att $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$

a) Vilket värde har $\frac{dr}{dt}$?

b) Bestäm $\frac{dA}{dr}$

c) Beräkna $\frac{dA}{dt}$ om $r = 2,0 \text{ m}$ och tolka ditt svar.

3171 Ett kubiskt isblock smälter så att kubens sida, x , minskar med 3 mm/h.

a) Använd kedjeregeln och ställ upp ett samband mellan $\frac{dV}{dt}$ och $\frac{dx}{dt}$

b) Beräkna med vilken hastighet kubens volym förändras då kubens sida är 75 cm.

3172 En kvadrat har sidan $x \text{ cm}$. Hur snabbt ökar

a) arean A , då sidan är 12 cm och ökar med 1,5 cm/min

b) sidan x , då sidan är 12 cm och arean ökar med 4,5 cm²/min?

3173 Luft blåses in i en sfärisk ballong så att volymen ökar med hastigheten 30 cm³/s. Hur snabbt ökar radien vid den tidpunkt då den är 18 cm?

3174 Bestäm $\frac{dV}{dt}$ om $V = \pi r^2 h$ och

a) r är konstant och h beror av t

b) h är konstant och r beror av t

c) $h = 3r$ och r beror av t .

3175 En kub har volymen 216 cm³ och dess sida minskar med 2 cm/minut.

a) Beräkna kubens sida och med vilken hastighet kubens volym minskar med.

b) Pelle ser svaret från a) och säger: "Då försvinner hela kubens på en minut." Kommentera Pelles påstående.

3176 a) I uppgift 3168 med det smältande klotet kom vi fram till sambandet

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

där $4\pi r^2$ är klotets area. Försök att förklara varför klotets area dyker upp.

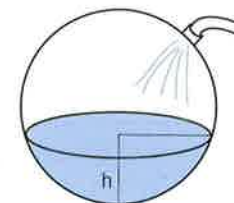
b) Bestäm sambandet mellan förändringen av en cirkels area $\frac{dA}{dt}$ och dess radie $\frac{dr}{dt}$. Vilken geometrisk storhet dyker upp här? Försök att förklara varför.

3177 Vatten rinner in i en sfärisk behållare med hastigheten 2,5 liter/min.

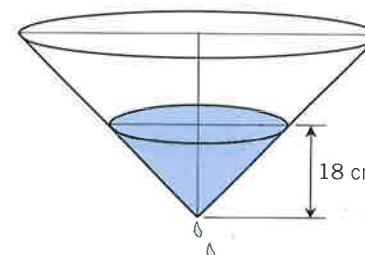
Behållaren har en radie (dm) som är 4,5 dm. När vattnet har höjden $h \text{ dm}$ kan volymen $V \text{ dm}^3$ beräknas med formeln

$$V = \frac{\pi}{3} (13,5 h^2 - h^3)$$

Hur förändras höjden på vattennivån då behållaren är fylld till hälften?



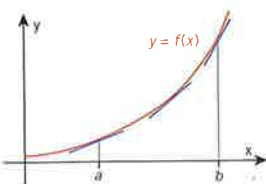
3178 En konisk behållare har spetsen nedåt och lika stor höjd som radie. Behållaren läcker så att det rinner ut 360 cm³/min. Hur förändras vätskenivån vid det läge då den är 18 cm?



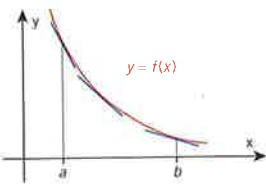
3.2 Grafer

Grafer och derivator

Förstaderivatan är ett mått på en kurvas lutning.



f'(x) > 0 för a ≤ x ≤ b



f'(x) < 0 för a ≤ x ≤ b

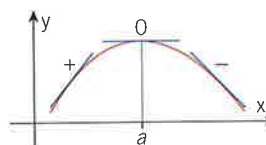
växande och avtagande

f är växande om x₂ > x₁ ger att f(x₂) ≥ f(x₁)
f är avtagande om x₂ > x₁ ger att f(x₂) ≤ f(x₁)
Om f' ≥ 0 i ett intervall, så är f växande där.
Om f' ≤ 0 i ett intervall, så är f avtagande där.

f kan även kallas
strängt växande
om f(x₂) > f(x₁) och
strängt avtagande
om f(x₂) < f(x₁).

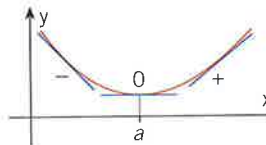
Andraderivatan är ett mått på hur förstaderivatan ändras.

lokal maximipunkt
lokal minimipunkt



I en lokal maximipunkt är:

- derivatans teckenväxling + 0 -
- andraderivatan negativ (förstaderivatan minskar)



I en lokal minimipunkt är

- derivatans teckenväxling - 0 +
- andraderivatan positiv (förstaderivatan ökar)

För att hitta extrempunkter (lokala maximi- och minimipunkter) till en kurva y = f(x) kan vi göra på följande sätt:

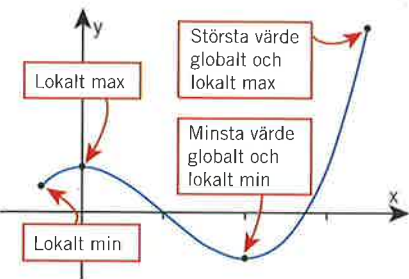
- Bestäm f'(x) och lös ekvationen f'(x) = 0. Antag x = a är en lösning
- Bestäm f''(x) och beräkna f''(a).
- Om f''(a) > 0 så har f ett minimum för x = a.
Om f''(a) < 0 så har f ett maximum för x = a.
- Om f''(a) = 0 undersök teckenväxling för f'(x)

+	0	-		ger maximipunkt.
-	0	+		ger minimipunkt.
+	0	+		ger terrasspunkt.
-	0	-		

största/minsta värde

Antag att vi har en "snäll" funktion som har en sammanhängande graf som vi kan derivera överallt. För att hitta funktionens största och minsta värde i ett begränsat intervall måste vi undersöka och jämföra funktionsvärdet i

- punkter där f'(x) = 0
- intervallets ändpunkter



Största/minsta värde är ett y-värde. En punkt anges med x- och y-koordinat. Det är dock vanligt att t ex en maximipunkt bara anges med x-koordinaten.

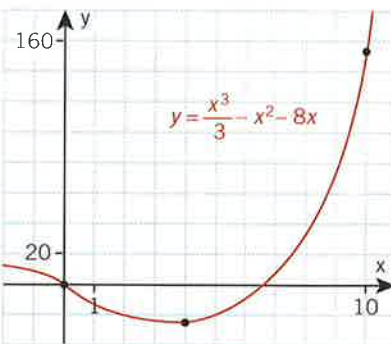
3201

Skissa med hjälp av derivata grafen till y = x³/3 - x² - 8x i intervallet 0 ≤ x ≤ 10 och bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet.
Kontrollera med grafräknare.

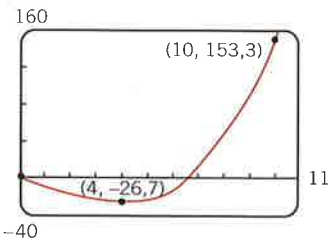
y = x³/3 - x² - 8x
y' = x² - 2x - 8
y' = 0 ger x² - 2x - 8 = 0
x₁ = 4 och x₂ = -2 (ej i intervallet)

Vi beräknar funktionsvärden för x där y' = 0 samt för intervallets gränser. Derivatans tecken beräknar vi för något x mellan 0 och 4 samt mellan 4 och 10.

x	0	4	10
y'		0	+
y	0	↘ min: -26,7	↗ 153,3



Kontroll:



I intervallet är funktionens största värde = 153,3 och minsta värde = -26,7

3202

Bestäm med derivata koordinaterna för de lokala extrempunkterna till kurvan $y = (x^2 - 3)e^x$. Rita en enkel skiss av kurvan som kontroll.

förstaderivatan

$$y = (x^2 - 3) \cdot e^x$$

$$y' = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$y' = 0 \text{ ger } x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ eftersom } e^x > 0 \text{ för alla } x$$

$$x = -1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 1 \text{ och } x_2 = -3$$

andraderivatan

$$y'' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x$$

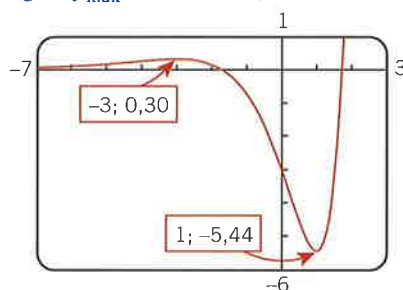
$$y''(1) = 4e > 0, \text{ dvs } x = 1 \text{ ger } y_{\min} = -2e \approx -5,44$$

$$y''(-3) = -4e^{-3} < 0, \text{ dvs } x = -3 \text{ ger } y_{\max} = 6e^{-3} \approx 0,30$$

grafen

Grafen visar att de erhållna extrempunkterna är rimliga. Med olämplig skala kan maximipunkten vara svår att upptäcka grafiskt.

Svar: Maximipunkt $(-3, 6e^{-3})$ och minimipunkt $(1, -2e)$.



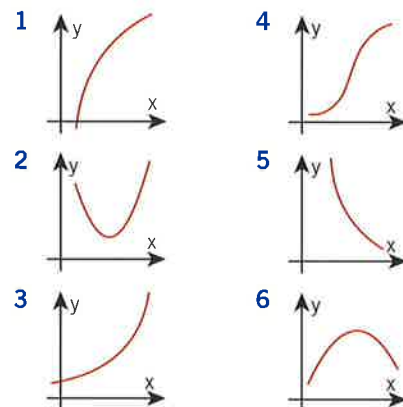
3203 $y = x^3 + 1,5x^2 - 6x + 4$

- a)** Lös ekvationen $y' = 0$.
- b)** Bestäm andraderivatans värde för de x -värden där $y' = 0$ och avgör om kurvan har maxi- eller minimipunkt för dessa x -koordinater.
- c)** Rita upp kurvan med grafräknaren och kontrollera ditt svar i b).

3204 $y = \sin 2x$

- a)** Visa att $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{3\pi}{4}$ är lösningar till $y' = 0$.
- b)** Bestäm andraderivatans värde för x -värdena i a) och avgör om kurvan har maxi- eller minimipunkt för dessa x -koordinater.
- c)** Kontrollera ditt svar i b) grafiskt.

3205 Figuren visar några funktionskurvor.



Vilka funktioner har en

- a) förstaderivata som är positiv för alla x
- b) förstaderivata som är negativ för alla x
- c) andraderivata som är negativ för alla x , dvs en förstaderivata som minskar i värde för alla x
- d) andraderivata som är positiv för alla x

3206 a) Skissa kurvan $y = x^3 - 3x$ med hjälp av derivata.

b) För vilka x -värden är $y = x^3 - 3x$ växande?

3207 Funktionen $y = \ln x - 0,5x^2$ har en extrempunkt för ett positivt x -värde. Bestäm koordinaterna för denna. Kontrollera grafiskt.3208 Rita en enkel skiss av grafen till funktionen f om följande tre villkor gäller:

- 1** Punkterna $(1, 5)$, $(2, 3)$ och $(3, 1)$ ligger på grafen.
- 2** $f'(1) = 0$ och $f'(3) = 0$.
- 3** $f'(x) > 0$ för $x < 1$,
 $f'(x) < 0$ för $1 < x < 3$ och
 $f'(x) > 0$ för $x > 3$

3209 Skissa kurvan $y = (2x - 1)e^{-x}$ med hjälp av derivata.3210 När fiskar simmar uppströms i ett vattendrag anpassar de sin hastighet x m/s så att energiåtgången J/m blir så liten som möjligt. Om vattnet rinner med hastigheten 4,0 m/s beskrivs energiåtgången av funktionen

$$f(x) = \frac{kx^3}{x - 4}, \quad x > 4 \text{ och}$$

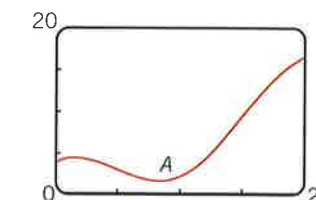
k är en positiv konstant.

- a) Hur ändras energiåtgången om en fisk ökar hastigheten från 4,5 m/s till 5,0 m/s?
- b) Vilken hastighet minimerar energiåtgången?

3211 Bestäm koordinaterna för extrempunkter till funktionen

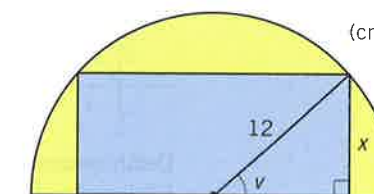
$$y = \frac{2 - x}{x^3}$$

- a) grafiskt med din räknare
- b) med derivata.

3212 Figuren visar grafen till $y = 4 \cos x + 2x$ i intervallet $0 < x < 2\pi$. Bestäm exakt koordinaterna för minimipunkten A.3213 Bestäm talet a så att funktionen

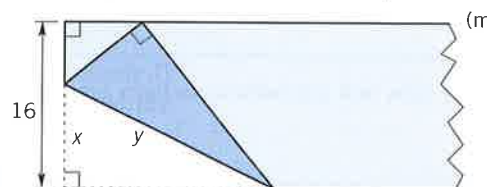
$$y = \frac{x^3 + a}{x} \text{ får ett lokalt min för } x = 2.$$

3214 En rektangel är inskriven i en halvcirkel som figuren visar.



- a) Uttryck rektangelns area som funktion av v .
- b) Uttryck rektangelns area som funktion av x .
- c) Bestäm areans största värde.

3215 Ett papper viks som figuren visar.



För vilket värde på x är den vikta kantens längd y så liten som möjligt?

Olika typer av grafer

Vi börjar med att repetera några begrepp som behandlar funktioner och deras grafer.

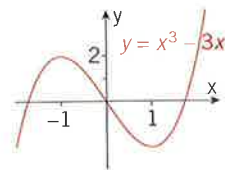
definitionsomängd En funktions *definitionsomängd* är tillåtna värden för den oberoende variabeln, t ex x . *Värdeomängden* är de funktionsvärden, t ex y , som definitionsomängden ger.

Ordet **kontinuerlig** kan översättas till sammanhängande. En förenklad beskrivning av en kontinuerlig funktion är att dess graf går att rita utan att lyfta pennan. En korrekt definition är:

kontinuerlig En funktion är *kontinuerlig* i en punkt x_0 om x_0 tillhör definitionsomängden och $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existerar och är lika med $f(x_0)$. Om funktionen är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsomängd kallas den kontinuerlig.

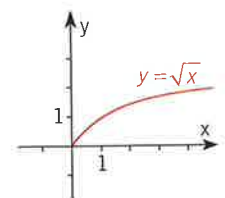
deriverbar En funktion är *deriverbar* i alla de punkter där förstaderivatan existerar, dvs där kurvan har en tangent.

Exempel 1



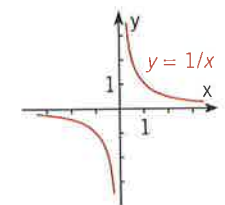
Definitionsomängd: Alla reella tal x
Värdeomängd: Alla reella tal y

Funktionen $y = x^3 - 3x$ är kontinuerlig och deriverbar för alla x .



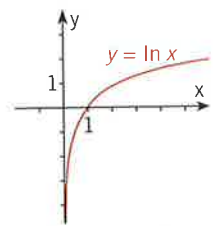
Definitionsomängd: $x \geq 0$
Värdeomängd: $y \geq 0$

Funktionen $y = \sqrt{x}$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och deriverbar för $x > 0$



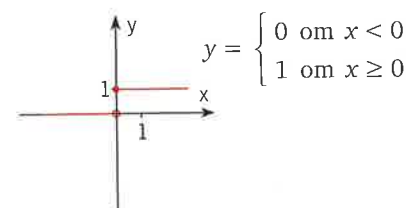
Definitionsomängd: $x \neq 0$
Värdeomängd: $y \neq 0$

Funktionen $y = 1/x$ är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$.



Definitionsomängd: $x > 0$
Värdeomängd: Alla reella tal y

Funktionen $y = \ln x$ är kontinuerlig och deriverbar för $x > 0$



Definitionsomängd: Alla reella tal x
Värdeomängd: $y = 0, y = 1$

Funktionen är inte kontinuerlig eller deriverbar då $x = 0$.

största/minsta värde

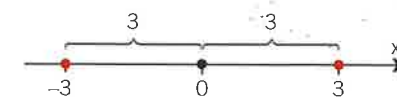
För att **avgöra** om en funktion f har ett största/minsta värde måste vi, utöver **extrempunkter** och intervallgränser, också undersöka om det finns punkter där f inte är definierad, kontinuerlig eller deriverbar.

absolutbelopp

Vi repeterar begreppet *absolutbeloppet* av x , som skrivs $|x|$.

Absolutbeloppet av ett reellt tal definieras som talets avstånd till origo och är därför alltid ett positivt tal (eller noll).

Exempel 2



$|3| = 3$ och $|-3| = 3$ eftersom både 3 och -3 har avståndet 3 till origo.

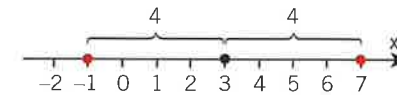
Exempel 3

Ekvationen $|x - 3| = 4$ kan tolkas som att vi söker punkter med avståndet 4 till punkten 3 på tallinjen.

Vi kan lösa ekvationen genom att skriva

$$\begin{aligned} x - 3 &= 4 & \text{som ger } x &= 7 & \text{och} \\ x - 3 &= -4 & \text{som ger } x &= -1 \end{aligned}$$

På tallinjen ser vi att lösningen är korrekt.

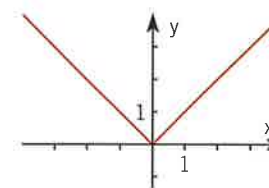


Exempel 4

Funktionen $y = |x|$ måste enligt definitionen skrivas

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Grafen får följande lite speciella utseende.



Definitionsomängd: Alla reella tal x
Värdeomängd: $y \geq 0$

Funktionen är kontinuerlig, eftersom grafen är sammanhängande. Funktionen är inte deriverbar då $x = 0$, eftersom grafen saknar tangent där. Närmar vi oss $x = 0$ från höger är lutningen 1 och närmar vi oss från vänster är lutningen -1 . Funktionen är inte deriverbar där den har en "spets".



Grafen till en funktion som beskrivs med absolutbelopp kan ritas på grafräknaren med tex $y = \text{abs}(x)$

3216

$f(x) = |2x - 1|$. Beräkna x om $f(x) = 2$

$|2x - 1| = 2$ ger två möjligheter

$2x - 1 = -2$ eller $2x - 1 = 2$

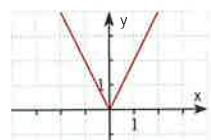
$x = -0,5$ eller $x = 1,5$

3217

Rita grafen till a) $y = |2x|$ b) $y = |2x - 6|$

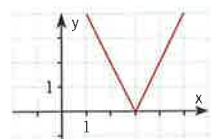
a) Definitionen ger $y = |2x| = \begin{cases} 2x & \text{om } 2x \geq 0 \\ -2x & \text{om } 2x < 0 \end{cases}$

dvs för $x \geq 0$ ritar vi $y = 2x$ och
för $x < 0$ ritar vi $y = -2x$



b) $y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{om } 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) & \text{om } 2x - 6 < 0 \end{cases}$

dvs för $x \geq 3$ ritar vi $y = 2x - 6$ och
för $x < 3$ ritar vi $y = -(2x - 6) = -2x + 6$

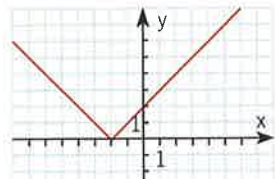


3218

Figuren visar grafen till en funktion f .

a) Bestäm funktionen.

b) Är funktionen kontinuerlig och
deriverbar för alla x -värden?
Motivera.



a) Vi bestämmer linjens ekvation för $x \geq -2$

$k = 1$ och $m = 2$ ger
 $f(x) = x + 2$ för $x \geq -2$

$f(x) = |x + 2|$ för alla x

Vi ser t ex att $x = -3$ ger $f(-3) = |-3 + 2| = |-1| = 1$
vilket stämmer med grafen.

b) Funktionen är kontinuerlig och definierad för alla x -värden,
eftersom grafen är sammanhängande.

Funktionen är inte deriverbar då
 $x = -2$ eftersom grafen saknar tangent där.

Närmar vi oss $x = -2$ från höger är lutningen 1.

Närmar vi oss $x = -2$ från vänster är lutningen -1.

Funktionen är inte deriverbar där den har en "spets".

3219 Beräkna

- a) $|5| + |-3| + |3|$
b) $|-2| - |10| - |-1|$
c) $|0,12| + 4 \cdot |-1,2|$

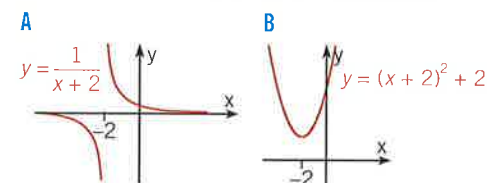
3220 $f(x) = |x - 2|$

- a) Beräkna $f(3)$ och $f(-3)$.
b) Finn två olika värden på x så att $f(x) = 7$.

- 3221 a) Rita graferna till $y = |x|$ och
 $y = |x - 2|$ i samma koordinatsystem.
b) Kontrollera graferna med din
grafräknare.

3222 Fiona påstår att absolutbeloppet av x alltid
är positivt. Har hon rätt? Motivera.

- 3223 a) Vilken av funktionerna nedan är inte
definierad för alla x ? Motivera.
b) Har de olika funktionerna något största
respektive minsta värde? Motivera.



3224 Rita $y = \frac{1}{2x - 10}$ med grafräknaren.

- a) För vilket x -värde är funktionen inte
definierad?
b) Undersök om din räknare klarar av att
rita grafen korrekt när du zoomar ut.

3225 Ge ett eget exempel på en funktion som

- a) inte är definierad för $x = 2$.
b) har definitionsmängd $x \geq 2$.
c) är definierad men inte deriverbar då
 $x = 2$.

3226 Bestäm den funktion som har grafen nedan.

3227 Rita grafen till $y = \ln(x + 2)$.

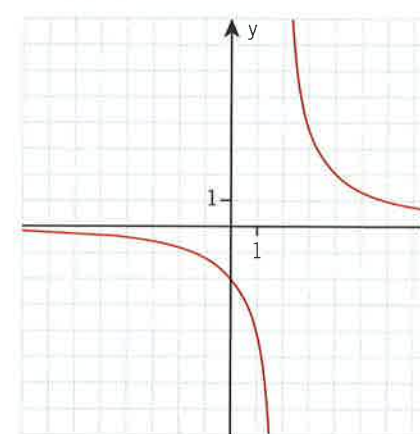
- a) Bestäm funktionens definitionsmängd
och värdemängd.
b) Förklara grafens utseende.

3228 Motivera varför $|x - y| = |y - x|$
för alla reella värden på x och y .

3229 Funktionen $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ är inte
definierad för $x = 2$ samt har en graf
som skär y -axeln där $y = 1/4$.
Bestäm a och b .

3230 I figuren visas grafen till funktionen

c) $y = \frac{a}{bx - c}$



Bestäm de positiva talen a , b och c då
funktionen skrivs i sin enklaste form.

3231 Grafen till $y = |ax + 2| - 2$ bildar
tillsammans med x -axeln en triangel med
arean 3 a.e. Bestäm värdet på a om $a > 0$.

Aktivitet

UNDERSÖK

Vilken term dominerar?

1 a) Rita av och fyll i värdetabellen

x	-10	-0,1	0	0,1	10
$y = \frac{1}{x}$	-0,1				
$y = 3x$					
$y = \frac{1}{x} + 3x$					

b) Är funktionen $y = \frac{1}{x} + 3x$ definierad för alla x ?

c) Vilken term i funktionen $y = \frac{1}{x} + 3x$ är den dominerande (påverkar y -värdet mest) för stora $|x|$ respektive för små $|x|$?

d) Rita med grafitande verktyg grafen till $y = \frac{1}{x} + 3x$ och $y = 3x$. För vilka $|x|$ har graferna liknande utseende, stora $|x|$ eller små $|x|$?

e) Rita en skiss av $y = \frac{1}{x} + 3x$ och $y = \frac{1}{x}$ i samma figur. För vilka $|x|$ har graferna liknande utseende, stora $|x|$ eller små $|x|$?

2 a) Bestäm utan att rita funktionens graf vilken term som dominerar för stora $|x|$ respektive små $|x|$

A $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

B $y = x^3 - 5x$

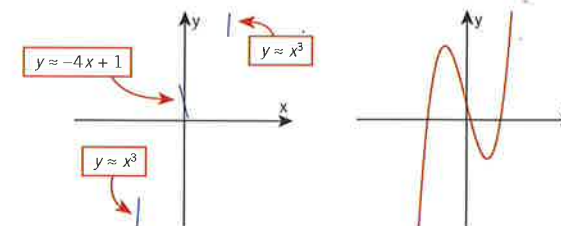
C $y = 0,2x^4 - 2x^2$

b) Kontrollera dina svar i uppg 2a) med grafitande verktyg. Rita t ex grafen till $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ och $y = x^2$. Är det för stora $|x|$ eller för små $|x|$ som graferna är mest lika?

Kurvor och asymptoter

När vi studerar funktioners grafer är det bra att ha god kännedom om derivata och olika funktioners egenskaper.

Exempel 1 Skissa i stora drag grafen till $y = x^3 - 4x + 1$. För stora $|x|$ är $y \approx x^3$ och för små $|x|$ är $y \approx -4x + 1$.



Polynomfunktioner är "snälla" funktioner som är kontinuerliga och deriverbara överallt.

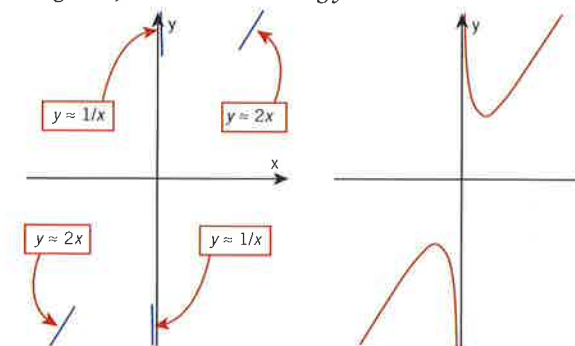
Exempel 2 Skissa i stora drag grafen till $y = \frac{1}{x} + 2x$.

För stora $|x|$ är $y \approx 2x$ eftersom $\frac{1}{x} \approx 0$.

För små $|x|$ är $y \approx \frac{1}{x}$ eftersom $2x \approx 0$.

Funktionen $y = \frac{1}{x}$ är ej definierad för $x = 0$.

När x närmar sig 0 går $1/x$ mot $\pm\infty$ beroende på om x är positivt eller negativt, kurvan närmar sig y -axeln.



asymptot y -axeln och den räta linjen $y = 2x$ är *asymptoter* till $y = \frac{1}{x} + 2x$.

En asymptot är en rät linje sådan att avståndet mellan kurvan och linjen närmar sig noll när avståndet till origo går mot oändligheten åt något håll.

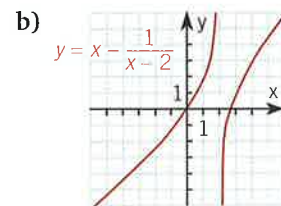
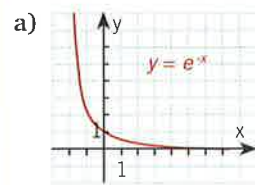
En kurva kan ha vertikala asymptoter där den ej är definierad, t ex

$y = \frac{1}{x-4}$ är ej definierad för $x = 4$ och har asymptoten $x = 4$.

En kurva kan ha horisontella eller sneda asymptoter då en eller flera termer går mot noll för stora $|x|$, t ex $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 3x$ har asymptoten $y = -3x$.

3232

Ange grafens asymptoter. Motivera ditt svar.



- a) x -axeln är en asymptot eftersom $e^{-x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$
- b) $x = 2$ och $y = x$ är asymptoter.
 y är ej definierat för $x = 2$. När x närmar sig 2 närmar sig kurvan $x = 2$.
 För stora $|x|$ är $\frac{1}{x-2} \approx 0$ vilket ger $y \approx x$ dvs kurvan närmar sig $y = x$.

3233

- a) Skissa grafen till $y = \frac{x^2 + 16}{4x}$ med hjälp av derivata.
- b) Ange eventuella asymptoter till kurvan.
- a) Funktionen blir enklare att studera om vi först skriver om den.

$$y = \frac{x^2 + 16}{4x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x} = 0,25x + 4x^{-1} \quad (x \neq 0)$$

$$y' = 0,25 - 4x^{-2} = 0,25 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 \text{ ger } 0,25 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ och } x = \pm 4$$

x	-4	0	4
y'	+	ej def	-
y	-2		2
	max		min

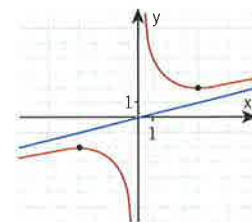
$$x = -4 \text{ ger } y_{\max} = -2$$

$$x = 4 \text{ ger } y_{\min} = 2$$

- b) $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ är ej definierat för $x = 0$.
 y -axeln är en asymptot.

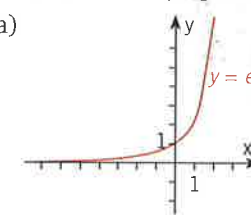
$$\text{För stora } |x| \text{ är } \frac{4}{x} \approx 0 \text{ vilket ger } y \approx \frac{x}{4}$$

Svar: y -axeln och $y = x/4$ är asymptoter.

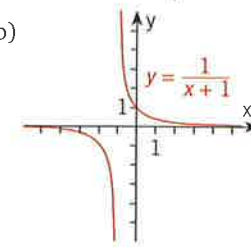


3234 Ange grafens asymptoter.

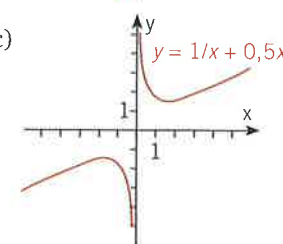
a)



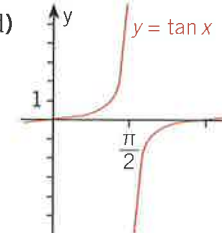
b)



c)



d)



3235 Rita grafen med grafräknare. Bestäm grafens asymptoter.

- a) $y = \ln x$
 b) $y = -\frac{1}{x} - 1,5x$
 c) $y = e^{-x} - 1$

3236 Vad är en asymptot? Förklara med ett eget exempel.

- 3237 a) Rita kurvan $y = 2x + 8/x$ med hjälp av derivata.
 b) Har kurvan några asymptoter?
 c) Har kurvan något största värde?

3238 Undersök vilken term som dominerar för stora $|x|$ och vilken som dominerar för små $|x|$. Rita sedan en enkel skiss av grafen till

- a) $y = \frac{1}{x} + 3x$
 b) $y = 4x^2 - x^4$

3239 Rita med hjälp av derivata grafen

b

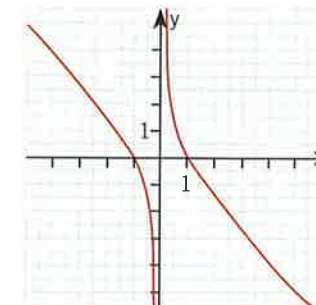
till $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$ inklusive eventuella asymptoter.

3240 Undersök med derivata om funktionen har några extrempunkter. Ange även eventuella asymptoter till kurvan.

- a) $y = \frac{1}{x^2}$ b) $y = \frac{1}{x^2 - x}$

3241 Figuren visar grafen till en funktion f .

- a) Funktionen har två asymptoter. Vilka?
 b) Vilken är funktionen?



3242 Johan påstår att $y = x$ är en asymptot till $y = \sin x + x$. Har han rätt? Motivera.

3243 Undersök grafen till $y = \tan^{-1} x$. Bestäm och motivera grafens asymptoter.

3244 Ange ett eget exempel på en funktion som har asymptoterna

- a) $y = 2$ b) $x = 1$, $x = 3$ och $y = x$.

3245 Bestäm utan räknare eventuella extrempunkter och asymptoter till

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

3.3 Differentialekvationer

Begreppet differentialekvation

Exempel 1 Lufttrycket y kPa förändras med en hastighet som på varje höjd är proportionell mot det aktuella trycket. Detta kan beskrivas med differentialekvationen $y' = k \cdot y$

differentialekvation En ekvation med en obekant funktion och en eller flera av denna funktions derivator kallas en *differentialekvation*.

första ordningen $y' = 2y$ är en differentialekvation av *första ordningen* eftersom y' är den högsta derivatan.

andra ordningen $y'' + y' + 2y = 0$ är en differentialekvation av *andra ordningen* eftersom y'' är den högsta derivatan.

Lösningen till en differentialekvation är en funktion. Genom prövning kan vi undersöka om en viss funktion är en lösning till en given differentialekvation.

Exempel 2 Är funktionen $y = \sin 2x$ en lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = 0$?

Vi börjar med att bestämma de derivator som ingår i ekvationen.

$$y = \sin 2x \Rightarrow y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x$$

$$VL = y'' + 4y = -4 \sin 2x + 4 \sin 2x = 0 = HL$$

Prövningen visar att $y = \sin 2x$ är en lösning. På motsvarande sätt kan vi visa att även funktionerna $y = 5 \sin 2x$ och $y = -3 \sin 2x$ är lösningar. Vi inser att en differentialekvation kan ha flera olika lösningar.

Exempel 3 Differentialekvationen $y' - 3y = 0$ har t ex lösningarna

$$y = 100e^{3x} \text{ och } y = 200e^{3x}.$$

begynnelsevillkor Vi undersöker om någon av lösningarna uppfyller *begynnelsevillkoret* $y(0) = 200$.

$$y = 100e^{3x} \Rightarrow y(0) = 100e^{3 \cdot 0} = 100 \Rightarrow \text{Villkoret är inte uppfyllt.}$$

$$y = 200e^{3x} \Rightarrow y(0) = 200e^{3 \cdot 0} = 200 \Rightarrow \text{Villkoret är uppfyllt.}$$

Funktionen $y = 200e^{3x}$ uppfyller villkoret $y(0) = 200$.

Sammanfattning

En differentialekvation innehåller en obekant funktion och en eller flera derivator till denna. Differentialekvationens lösning är en funktion.

3301

Differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = -0,2y$ är given.

a) Visa att $y = Ce^{-0,2x}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Bestäm C så att villkoret $y(1) = 50$ är uppfyllt.

a) $y = Ce^{-0,2x}$ ger $\frac{dy}{dx} = -0,2 Ce^{-0,2x}$

$$VL = \frac{dy}{dx} = -0,2 Ce^{-0,2x} = -0,2y = HL$$

b) $y(1) = Ce^{-0,2 \cdot 1} = C \cdot e^{-0,2}$

Villkoret $y(1) = 50$ ger

$$C \cdot e^{-0,2} = 50, \text{ dvs } C = 50/e^{-0,2} \approx 61$$

3302 Visa att

a a) $y = 5 \cdot e^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$

b) $y = 4 \cos x$ är en lösning till differentialekvationen $y'' + y = 0$.

3303 Ge ett exempel på en differentialekvation av andra ordningen.

3304 Visa att $y = A \cdot e^{kx}$

a) är en lösning till $\frac{dy}{dx} = ky$

b) uppfyller villkoret $y(0) = A$.

3305 Är $y = x \cdot e^x$ en lösning till differentialekvationen $y' - y = xy$? Motivera.

3306 Vi vet att $y = A \cdot e^{kx}$ är en lösning till differentialekvationen $y' = -0,03y$ och att $y(0) = 12$.

Bestäm konstanterna A och k .

3307 Bestäm det positiva talet k så att $y = \cos kx$ blir en lösning till $y'' + 9y = 0$.

3308 För vilket eller vilka tal r är $y = e^{rx}$ en lösning till differentialekvationen $y'' + y' - 6y = 0$?

3309 Differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ är given.

a) Visa att $y = A \cos 2x + B \sin 2x$ är en lösning.

Bestäm konstanterna A och B om

b) $y(0) = 0$ och $y(\pi/4) = 20$

c) $y(0) = 1$ och $y'(0) = -6$.

e 3310 Visa att $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ är en lösning till differentialekvationen $y' = y(1 - y)$

3311 a) Finn två olika lösningar till differentialekvationen $100y'' = y$

b) Visa att summan av dina två lösningar också är en lösning.

Differentialekvationer och matematiska modeller

När vi vill beskriva olika förlopp inom naturvetenskap och teknik leder det ofta till matematiska modeller med differentialekvationer.

3312

En biolog har studerat en stor fågelkoloni under tio år. Biologen finner att under hela studien har antalet fåglar minskat med hastigheten 4% per år av det aktuella antalet.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver förändringen.

Förändringshastigheten är -4% per år av totala antalet fåglar.

Om y är antalet fåglar t år efter studiens start ger det för tidsintervallet $0 \leq t \leq 10$ differentialekvationen

$$y' = -0,04y$$

Ekvationen kan även skrivas

$$\frac{dy}{dt} = -0,04y \text{ eller } y' + 0,04y = 0$$



3313

En stek som har temperaturen 20°C sätts in i en ugn som håller 175°C . Enligt en matematisk modell stiger då stekens temperatur $y^\circ\text{C}$ med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferensen $(175 - y)$.

Det ger differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = k(175 - y)$$

där t är tiden i minuter sedan steken sattes i ugnen.

a) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ är en lösning till $y(0) = 20$.

b) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

c) Efter 30 minuter är stekens temperatur 45°C . Vilken är temperaturen efter 70 minuter?

$$\text{a) } y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$$

$$y(0) = 175 - 155 \cdot e^0 = 175 - 155 \cdot 1 = 20$$

$$\text{b) VL} = \frac{dy}{dt} = (-155) \cdot e^{-kt} \cdot (-k) = k \cdot 155 \cdot e^{-kt}$$

$$\text{HL} = k \cdot (175 - y) = k \cdot (175 - 175 + 155 \cdot e^{-kt}) = k \cdot 155 \cdot e^{-kt}$$

$$\text{VL} = \text{HL}$$

c) $y(30) = 45$ ger ett värde på k .

$$175 - 155 \cdot e^{-30k} = 45$$

$$e^{-30k} = \frac{130}{155}$$

$$k = \frac{\ln(130/155)}{-30} \approx 0,00586$$

$$y(70) = 175 - 155 \cdot e^{-0,00586 \cdot 70} \approx 72$$

Svar: Efter 70 minuter är stekens temperatur 72°C .



- 3314** 150 gram av ett radioaktivt ämne minskar med en hastighet som är proportionell mot kvarvarande mängd enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0,20y$$

där y är mängden i gram efter t år.

Visa att $y = 150 e^{-0,20t}$ är en lösning till

- begynnelsevillkoret $y(0) = 150$
- differentialekvationen.

- 3315** Folkmängden y miljoner i ett land förändras enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0,012y, \quad y(0) = 45$$

där t är tiden i år räknat från år 2010.

Förklara med egna ord vad

- $y(0) = 45$ betyder
- differentialekvationen betyder för folkmängden.

- 3316** Antalet bakterier y i en näringslösning ökar enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0,15y \quad \text{där } t \text{ är tiden i timmar.}$$

Antalet bakterier är från början 10 000 st.

- Bestäm k så att $y = 10\,000 e^{kt}$ är en lösning till differentialekvationen.
- Hur många bakterier finns det efter 8 timmar?

- 3317** Invånarantalet y i en stad ökar varje år med 1 000 personer, dvs $dy/dt = 1\,000$.

- Visa att $y = 1\,000t + C$ är en funktion som uppfyller hur antalet förändras.
- Bestäm C om $y(1) = 45\,000$.

- 3318** Ställ upp en differentialekvation som beskriver att

b

- y minskar med en hastighet som är 20 % per tidsenhet av y .
- y ökar med en hastighet som är proportionell mot y .
- y ökar med en hastighet som är proportionell mot $(20 - y)$.

- 3319** Hastigheten är derivatan av sträckan, $v = ds/dt$ och accelerationen är derivatan av hastigheten, $a = dv/dt$.

Visa att $s = v_0 t + at^2/2$ är en lösning till $s'' = a$ om v_0 och a är konstanter.

- 3320** Lövmängden i en skog y g/cm² ökar genom nedfall av nya löv med 3 g/cm² och år. Samtidigt förmultnar löven med en hastighet som är 75 % per år av den aktuella mängden. Detta ger differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 0,75y, \quad \text{där } t \text{ är tiden i år.}$$

- Visa att $y = A \cdot e^{-0,75t} + 4$ är en lösning och bestäm konstanten A om $y(0) = 0$.
- Beräkna lövmängden efter 2, 4, 6, 8 och 10 år. Slutsats? Rita grafen som kontroll.

- 3321** Mängden föroreningar i en sjö, y enheter, avtar enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0,4y \quad \text{där } t \text{ är tiden i år.}$$

- Visa att $y = A \cdot e^{-0,4t}$ är en lösning.
- Tolka konstanten A .
- Vad får du fram om du löser ekvationen $y = \frac{A}{10}$?

- 3322** Antalet individer y i en djurpopulation kan enligt en matematisk modell beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0,000\,25y \cdot (5\,400 - y)$$

där t är tiden i år.

- Beräkna förändringshastigheten $\frac{dy}{dt}$ om antalet individer är 5 200.
- Beräkna förändringshastigheten $\frac{dy}{dt}$ om antalet individer är 6 000.
- För vilka värden på y ökar antalet?
- För vilka värden på y minskar antalet?
- Efter lång tid sker en stabilisering av antalet, dvs $\frac{dy}{dt} = 0$ (om inte förutsättningarna förändras). Vilket värde har då y ?

- 3323** Antalet bakterier i en maträtt kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = 0,08y, \quad y(0) = 100,$$

där t är tiden i timmar.

- Uttryck detta i ord.
- Ange den funktion som är en lösning.

- 3324** Temperaturen y °C i en kopp te som får svalna i ett rum med temperaturen 20 °C kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - 20)$$

där t min är tiden och $y(0) = 85$.

- Uttryck detta i ord.
- Visa att $y = 20 + 65 \cdot e^{-kt}$ är en lösning.
- Vad behövs för att bestämma konstanten k ?

- 3325** Tjockleken y cm för isen på en sjö som håller på att frysa till växer med en hastighet som är omvänt proportionell mot y enligt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{y}$$

Visa att $y = \sqrt{2kt + C}$ är en lösning.

- 3326** Vattennivån h cm i en tank sjunker efter t minuter med en hastighet som är proportionell mot kvadratroten ur h .

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta.
- $h = 0,25(18 - 2t)^2$ är en lösning till differentialekvationen. Vilket värde har proportionalitetskonstanten?
- Bestäm $h(0)$ och när tanken är tom.

- 3327** En damm rymmer 500 000 liter. Dammen innehåller y liter gift efter t år.

Antag att giftet är jämnt fördelat i hela dammen. Vattnet rinner ut från dammen med hastigheten en tiondel per år av den aktuella vattenmängden, samtidigt som nytt vatten fylls på med samma hastighet. Med det nya vattnet tillförs gift med hastigheten 1 liter per år.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur mängden gift ändras.



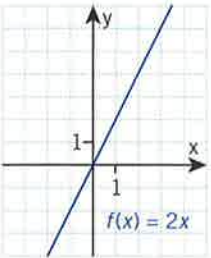
3.4 Integraler

Integraler och primitiva funktioner

Antiderivata
primitiv funktion

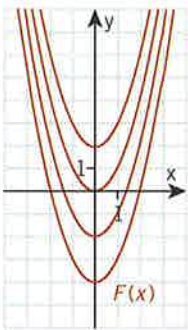
Vi inleder med att repetera några begrepp från tidigare kurs.
En *primitiv funktion* $F(x)$ har $f(x)$ som derivata, dvs $F'(x) = f(x)$.
 $F(x)$ kan också kallas antiderivatan till $f(x)$.

Exempel 1 Vilken eller vilka funktioner har $f(x) = 2x$ som derivata?



$F(x) = x^2$ är en primitiv funktion till f eftersom $F'(x) = 2x$.

I figuren till höger ser du exempel på fler funktioner med derivatan $2x$.



Exempel 2 En primitiv funktion $F(x)$ till $f(x) = 8x^3$ får vi genom att "derivera baklänges", $F(x) = \frac{8x^4}{4} = 2x^4$
Även $F(x) = 2x^4 + 3$ har derivatan $f(x)$
Alla primitiva funktioner till $f(x)$ ges av $F(x) = 2x^4 + C$
För att bestämma C behöver vi veta mer om $F(x)$.

Primitiv funktion

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så betecknar $F(x) + C$, där C är en reell konstant, samtliga primitiva funktioner till $f(x)$.

Några primitiva funktioner:

$f(x)$	$F(x)$ (C är en reell konstant)
k	$kx + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{x}$ $x \neq 0$	$\ln x + C$
$\sin kx$	$-\frac{\cos kx}{k} + C$
$\cos kx$	$\frac{\sin kx}{k} + C$

När vi beräknar areor under kurvor är primitiva funktioner användbara verktyg.

Exempel 3 Den färgade arean under grafen till funktionen $f(x)$ ges av

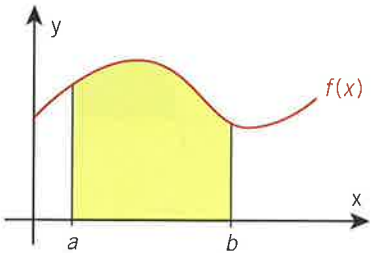
integralen $\int_a^b f(x) dx$ där

integrationsgräns a och b kallas *undre* respektive *övre integrationsgräns*.

Man kan visa att om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så gäller

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{Integralkalkylens fundamentalsats})$$

Detta innebär att vi kan beräkna integralen om vi kan hitta *en* primitiv funktion till $f(x)$.



Sammanfattning

För en kurva $f(x)$ ovanför x -axeln motsvarar integralen $\int_a^b f(x) dx$ arean mellan kurvan, x -axeln och linjerna $x = a$ och $x = b$.

3401

Bestäm den primitiva funktionen F till $f(x) = x^2 + \sin 2x$ för vilken $F(0) = 1$.

$$f(x) = x^2 + \sin 2x$$

Samtliga primitiva funktioner:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\cos 2x}{2} + C$$

Kontrollera genom att derivera.

$F(0) = 1$ ger ekvationen

$$\frac{0^3}{3} - \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} + C = 1$$

$$0 - \frac{1}{2} + C = 1 \quad \text{vilket ger } C = 3/2$$

$$\text{Svar: } F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}$$

3402

Beräkna det färgade områdets area.

Den övre integrationsgränsen, $x = 4$, avläser vi i figuren.

Den undre gränsen är en lösning till ekvationen $y = 0$.

$$0,5x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

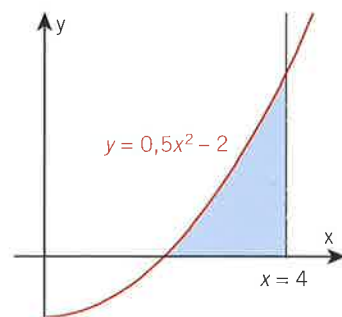
Figuren visar att nollstället $x = 2$ är den undre integrationsgränsen.

Arealen ges av integralen

$$\int_2^4 (0,5x^2 - 2) dx = \left[\frac{0,5x^3}{3} - 2x \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{0,5 \cdot 4^3}{3} - 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{0,5 \cdot 2^3}{3} - 2 \cdot 2 \right) = \frac{32}{3} - 8 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Svar: Områdets area är $5\frac{1}{3}$ areaenheter



3403 Bestäm en primitiv funktion till

a) $f(x) = x^2 + 3$ c) $f(x) = 2 \cos x + \sin x$

b) $f(x) = 1,2e^{2x}$ d) $f(x) = \frac{\sin 4x}{2}$

3404 Bestäm den primitiva funktion för vilken $F(0) = 1$ om

a) $f(x) = 4 \cos x - 3x^2$

b) $f(x) = 2e^{3x} + x$

3405 Förklara varför både $F(x) = 0,5x^2 + 7$ och $F(x) = 0,5x^2 - 7$ är primitiva funktioner till $f(x) = x$.

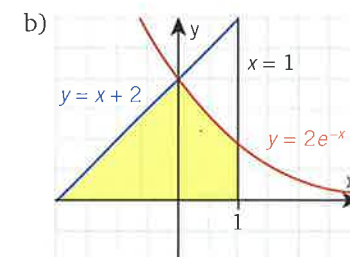
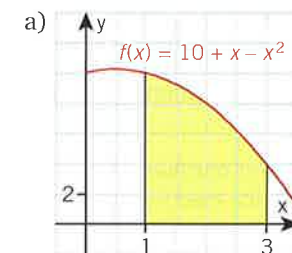
3406 Förklara steg för steg hur du beräknar

integralen $\int_1^2 x^2 dx$.

3407 Beräkna integralen exakt.

a) $\int_1^2 (4 - 2x) dx$ b) $\int_0^2 4e^{0,5x} dx$

3408 Beräkna det färgade områdets area.



3409 Integralen $\int_0^\pi \sin x dx$ ger arean av ett område. Rita detta område och beräkna arean.

3410 Bestäm en primitiv funktion till

a) $f(x) = \sqrt{x} - 0,2$

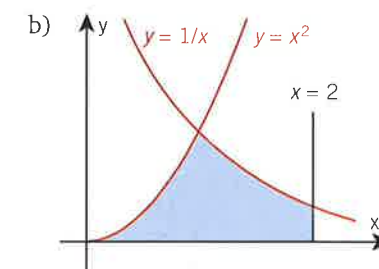
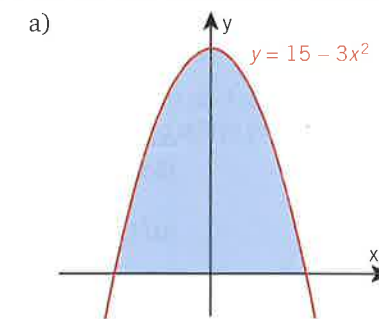
b) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = 5^{-x}$

3411 Rita figur och beräkna arean av området i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = 8x - 2x^2 + 10$

3412 Bestäm den markerade arean exakt.



3413 a) Visa att $F(x) = 2e^x(x - 1)$ är en primitiv funktion till $f(x) = 2xe^x$

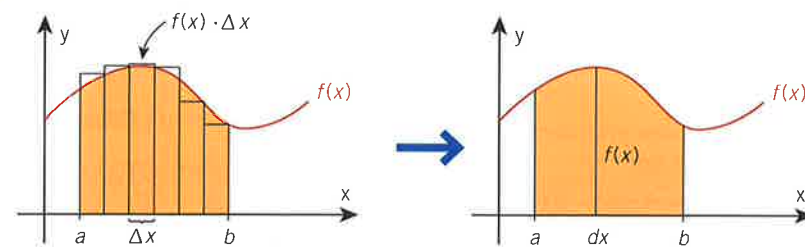
b) Beräkna exakt $\int_1^2 2xe^x dx$

3414 $\int_0^{\pi/4} a \sin 2x dx = \frac{2}{3}$ Bestäm a .

3415 Beräkna $F'(\sqrt{\pi})$ om $F(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx$

c

Grafiska metoder



$$A \approx \sum f(x) \cdot \Delta x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Areal under en kurva kan approximeras med en summa av rektanglar med basen Δx och höjden $f(x)$. Ökar vi antalet rektanglar och låter

$\Delta x \rightarrow 0$ får vi integralen $\int_a^b f(x) dx$ som kan betraktas som en summa av

oändligt många rektanglar med basen dx och höjden $f(x)$. Integraltecknet liknar också ett utdraget summatecken.

Att bestämma ett exakt värde för $\int_a^b f(x) dx$ kan vara svårt om

- vi inte hittar en primitiv funktion till $f(x)$
- $f(x)$ endast är given i form av tabell, mätvärden eller graf.

Vi behöver metoder för att uppskatta värdet av en integral. Vi visar några olika sätt att finna närmevärden till en integral genom att uppskatta arean under en kurva.

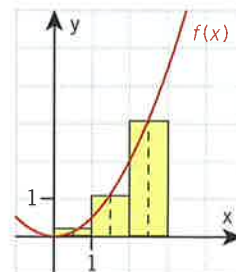
rektangelmetoden

Rektangelmetoden innebär att man approximerar områdets area med en eller flera rektanglar. Om rektangelns höjd är lika med funktionsvärdet i rektangelns mitt får vi en mittpunktsrektangel.

Vi uppskattar integralen med tre mittpunktsrektanglar.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &\approx 1 \cdot f(0,5) + 1 \cdot f(1,5) + 1 \cdot f(2,5) \approx \\ &\approx 1 \cdot (0,1 + 1,1 + 3,1) = 4,3 \end{aligned}$$

Här avläser vi funktionsvärdena men har vi en funktionsformel kan vi beräkna dem. Fler rektanglar ger oftast ett bättre närmevärde.



trapetsmetoden

Trapetsmetoden innebär att man approximerar områdets area med ett antal parallelltrapetser.

Arealen av ett parallelltrapets beräknas med formeln

$$A = b \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$$

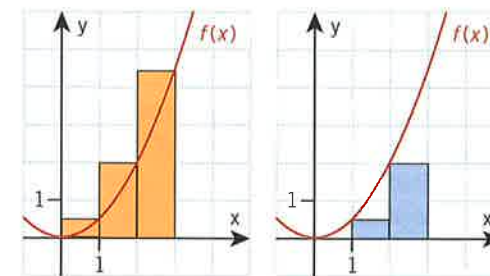
Vi uppskattar integralen med tre parallelltrapetser.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &\approx 1 \cdot \frac{f(0) + f(1)}{2} + 1 \cdot \frac{f(1) + f(2)}{2} + 1 \cdot \frac{f(2) + f(3)}{2} \approx \\ &\approx 1 \cdot \frac{0 + 0,5}{2} + 1 \cdot \frac{0,5 + 2}{2} + 1 \cdot \frac{2 + 4,5}{2} \approx 4,8 \end{aligned}$$

Vilken av rektangel- eller trapetsmetoden som ger bäst närmevärde beror av kurvans form.

över- och undersumma

Metoden med *över- och undersumma* innebär att man approximerar områdets area med ett antal rektanglar med större respektive mindre area än arean under kurvan.



De orange rektanglarna ger översumman: $(1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4,5)$ a.e. = 7,0 a.e.
De blå rektanglarna ger undersumman: $(1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2)$ a.e. = 2,5 a.e.

Integralens värde ligger i intervallet: $2,5 < \int_0^3 f(x) dx < 7,0$

Använder vi fler rektanglar får vi ett mindre intervall.

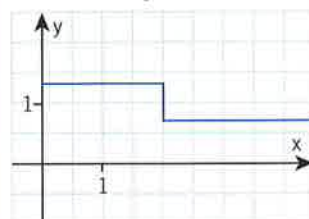
Över- och undersummor kan användas för att uppskatta integralers värde. De är också viktiga teoretiska begrepp. Man kan visa att om det finns precis ett tal I sådant att det är mindre än alla möjliga översummor och större än alla möjliga undersummor så är I integralens värde.



De flesta räknare har inbyggda verktyg för att numeriskt eller grafiskt bestämma integralers värde. Lär dig hur din räknare fungerar men observera att de endast i undantagsfall ger exakta värden.

3416

Uppskatta $\int_0^4 f(x) dx$ om $f(x)$ ges av grafen



Integralens värde motsvarar arean under grafen.

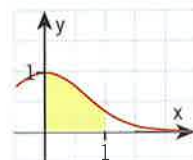
Vi kan välja att räkna rutor under grafen eller att beräkna arean med två rektanglar, dvs

$$\int_0^4 f(x) dx \approx 2 \cdot 1,3 + 2 \cdot 0,7 = 4$$

3417

Beräkna ett närmevärde med två

decimaler till $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ med



- en mittpunktsrektangel
- ett parallelltrapets.
- Jämför svaren i a) och b) med hjälp av räknarens integralverktyg.

- Mittpunktsrektangeln har basen, $b = 1$ och höjden, $h = f(0,5) = e^{-0,5^2} \approx 0,78$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \text{rektangelns area} = 1 \cdot 0,78 = 0,78$$

- Parallelltrapetsen har $A = b \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$ där $b = 1$ och $h_1 = f(0)$ och $h_2 = f(1)$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \text{parallelltrapetsets area} = 1 \cdot \frac{e^{-0^2} + e^{-1^2}}{2} \approx 0,68$$

- Räknaren ger $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,75$

Vi kan inte hitta en primitiv funktion till $y = e^{-x^2}$. Räknaren ger ett bra närmevärde.

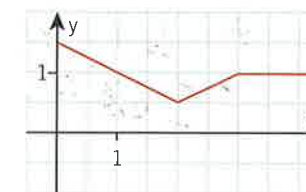
I detta exempel ger rektangelmetoden ett bättre närmevärde än trapetsmetoden. En finare indelning med fler rektanglar/parallelltrapetsar kan förändra situationen.

3418 Uppskatta

a

$$\int_1^4 f(x) dx$$

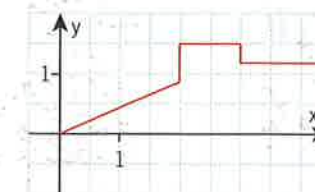
med hjälp av grafen



3423 Uppskatta

b

$$\int_0^a f(x) dx = 3$$



3419 Använd din räknarens integralverktyg och bestäm med två decimaler

$$a) \int_{-1}^3 e^{-2x^2} dx$$

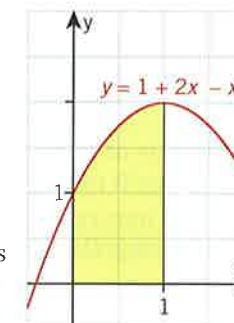
$$b) \int_0^2 \sin^2 x dx$$

3420 Bestäm integralen

$$\int_0^1 f(x) dx$$

genom att uppskatta arean under kurvan med

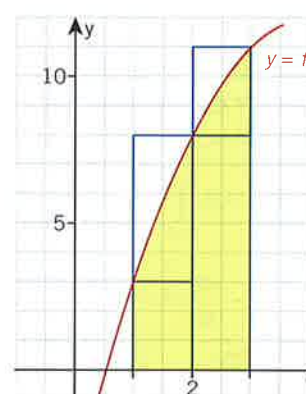
- ett parallelltrapets
- en mittpunktsrektangel.
- Jämför svaren i a) och b) med det värde på integralen som räknarens verktyg ger.



3421 Använd figuren och bestäm ett intervall inom vilket integralen

$$\int_1^3 f(x) dx$$

har sitt värde.

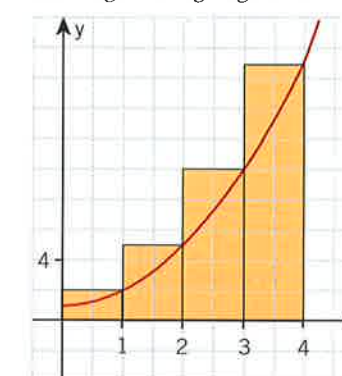


3422 Skissa en figur och uppskatta

värdet av $\int_6^8 f(x) dx$ om $f(x)$ ges av

x	5	6	7	8	9
f(x)	3	5	8	9	7

3424 En integrals värde uppskattas med rektanglar enligt figuren.



Hur kan vi göra en bättre approximation? Motivera.

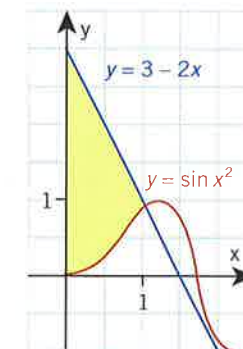
3425 Grafen till $y = x^3 - 2x + 5$ bildar tillsammans x- och y-axeln ett område. Bestäm detta områdes area.

3426 Undersök och finn ett värde på k

$$\text{så att } \int_0^k \frac{e^{x^2}}{2} dx = 5,0$$

3427 Bestäm det färgade områdets area.

c

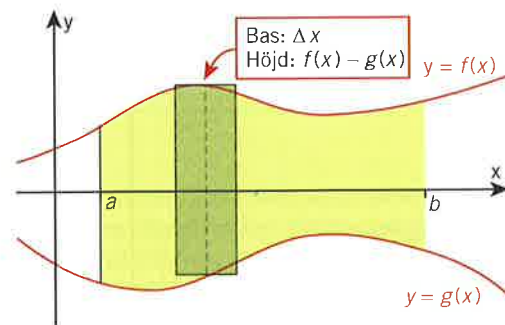


3428 Undersök med din räknare $\int_0^{1/2} \tan \pi x dx$. Motivera ditt resultat.

Areor mellan kurvor

Arean under en kurva, dvs mellan kurvan och x-axeln, kan vi approximera med en summa av rektanglar. Samma sak kan vi göra med arean mellan två kurvor.

$$A \approx \sum (f(x) - g(x)) \cdot \Delta x$$



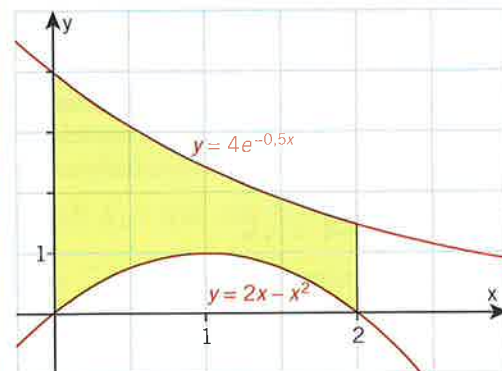
När $\Delta x \rightarrow 0$ går summan mot en integral. Arean mellan två kurvor ges av integralen

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$A = \int_a^b ((\text{övre funktion}) - (\text{undre funktion})) dx$$

3429

Det färgade området i figuren begränsas av kurvorna $y = 4e^{-0,5x}$ och $y = 2x - x^2$ samt y-axeln och linjen $x = 2$.



- Beräkna områdets area A.
- Kontrollera värdet på integralen med hjälp av räknarens integralverktyg.



a) Övre funktion: $y = 4e^{-0,5x}$

Undre funktion: $y = 2x - x^2$

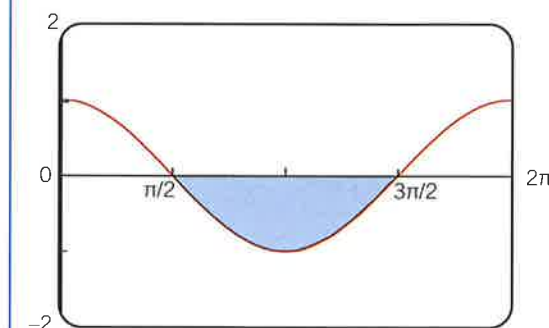
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (4e^{-0,5x} - (2x - x^2)) dx = \\ &= \left[-8e^{-0,5x} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \left(-8e^{-1} - 4 + \frac{8}{3} \right) - (-8) = \frac{20}{3} - 8e^{-1} \approx 3,72 \end{aligned}$$

b) Räknaren ger värdet 3,723 631 ...

Svar: Arean är 3,72 a.e.

3430

Figuren visar kurvan $y = \cos x$. Beräkna arean A av det färgade området.

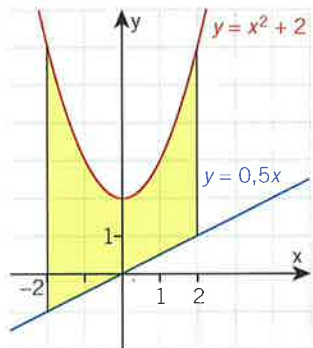


Här kan vi betrakta $y = 0$ som övre funktion.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (0 - \cos x) dx = [-\sin x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \\ &= -\sin \frac{3\pi}{2} - (-\sin \frac{\pi}{2}) = \\ &= -\sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = -(-1) + 1 = 2 \end{aligned}$$

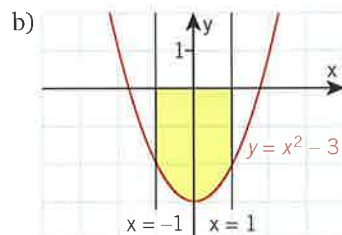
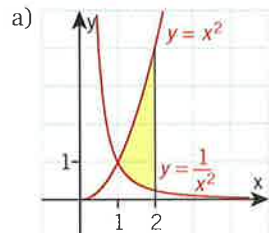
Svar: Arean är 2 a.e.

3431
a

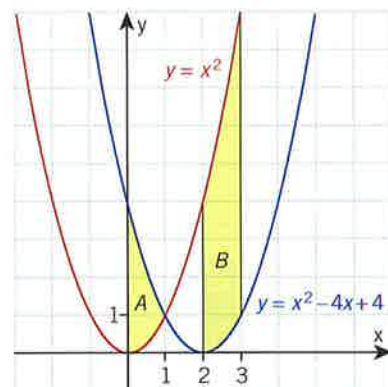


- a) Ställ upp en integral som ger den färgade arean.
b) Beräkna den färgade arean.

3432 Beräkna arean av det färgade området.



3433 Beräkna arean av de färgade områdena A och B i figuren.

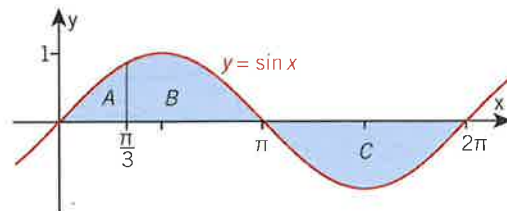


3434 Förklara varför de två integralerna A och B har samma värde.

$$A \int_{-1}^2 (4 - x^2) - (2 - x) dx$$

$$B \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx$$

3435 Figuren visar grafen till $y = \sin x$. Beräkna arean av vart och ett av de områden som vi markerat med A, B respektive C.



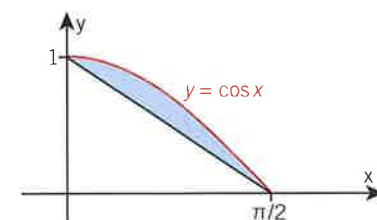
3436 Rita kurvan $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 4 - x$.

- a) Beräkna var linjen skär kurvan.
b) Ställ upp en integral för beräkning av arean av det område som linjen och kurvan begränsar.
c) Hur stor är arean?

3437 Beräkna arean för det område som innesluts av kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x$.

3438 Figuren visar kurvan $y = \cos x$.

b



Beräkna det exakta värdet på arean av det färgade området.

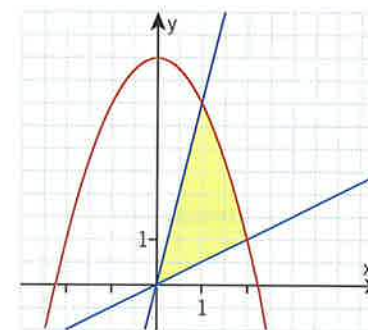
3439 Kurvorna $y = \sin x$ och $y = 0,5$ har två skärningspunkter i intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

- a) Ange skärningspunkternas koordinater i exakt form.
b) Kurvan och linjen innesluter tillsammans ett område. Beräkna områdets area exakt.

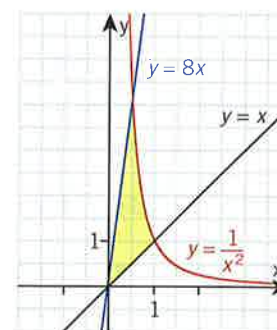
3440 Rita kurvan $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ för $1 \leq x \leq 4$.

Beräkna arean av det område som innesluts av kurvan och linjerna $y = x$ och $x = 4$.

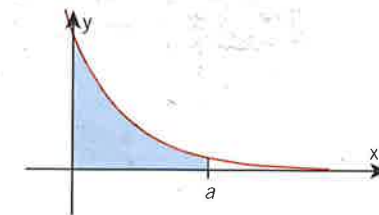
3441 Kurvan $y = 5 - x^2$ begränsar tillsammans med linjerna $y = 4x$ och $y = 0,5x$ ett område i första kvadranten. Bestäm arean av detta område.



3442 Beräkna arean av det i figuren markerade området.

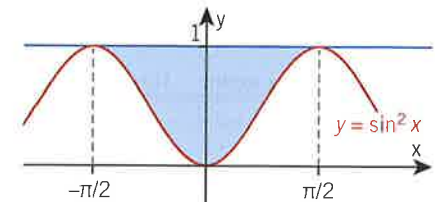


3443 Grafen visar kurvan till $y = 2^{-x}$. Det färgade området har arean 1 a.e. Bestäm talet a .



3444 Arean av det färgade området i figuren är $\frac{\pi}{2}$ a.e. Visa detta med hjälp av

- a) symmetrin i figuren
b) en integral och primitiv funktion.



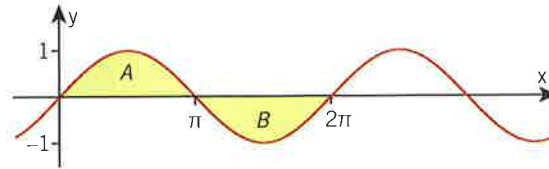
3445 Kurvan $y = 3x^2 - x^3$ begränsar tillsammans med x-axeln ett ändligt område. Kurvan $y = 0,5x^3$ delar området i två delar. Sök förhållandet mellan delarnas areor.

3446 Parablerna $y = b - x^2$ och $y = x^2 - b$ ($b > 0$) innesluter ett område med arean 3 a.e. Bestäm b .

Integraler och areor

Vi undersöker nu integralen av en funktion vars graf ligger både över och under x-axeln i det aktuella intervallet.

Exempel



graf över x-axeln

$$\text{Integralen } \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) =$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$

$$\text{Arean } A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ areaenheter}$$

graf under x-axeln

$$\text{Integralen } \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) =$$

$$= -1 - (-(-1)) = -2$$

$y = 0$ är övre funktion.

$$\text{Arean } B = \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x) \, dx = [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 \text{ areaenheter}$$

graf både över
och under x-axeln

$$\text{Integralen } \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) =$$

$$= -1 - (-1) = 0$$

$$\text{Arean } A + B = (2 + 2) \text{ areaenheter} = 4 \text{ areaenheter}$$

Sammanfattning

En integral är ett tal utan enhet som även kan anta negativa värden.
En area har alltid ett positivt värde.

Geometrisk tolkning av integralen $\int_a^b f(x) \, dx$ är att värdet motsvarar:

"summan av areorna över x-axeln" – "summan av areorna under x-axeln"

En integral kan visas ha följande egenskaper

$$1 \quad \int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx \quad (k \text{ är en konstant})$$

$$2 \quad \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx, \quad a \leq b \leq c$$

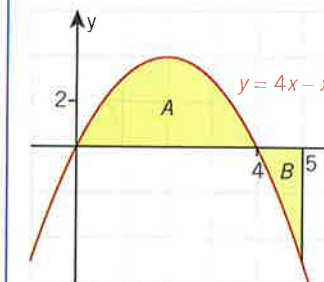
$$3 \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

$$4 \quad \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$5 \quad \int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$$

Egenskaper hos
integraler

3447



a) Beräkna areorna A och B.

b) Beräkna integralen $\int_0^5 (4x - x^2) \, dx$

c) Tolka integralen i b) geometriskt.

$$a) \text{ Arean } A = \int_0^4 (4x - x^2) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Arean } B = \int_4^5 (-(4x - x^2)) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^5 = \frac{25}{3} - \left(\frac{32}{3} \right) = \frac{7}{3}$$

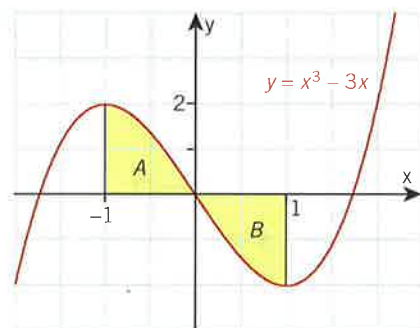
$$b) \int_0^5 (4x - x^2) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = 50 - \frac{125}{3} = \frac{25}{3}$$

c) Integralen = "arean över x-axeln" – "arean under x-axeln"

$$\text{Integralen} = \frac{32}{3} - \frac{7}{3} = \frac{25}{3}$$

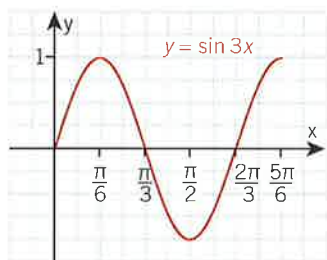
3448

a



- a) Beräkna integralen $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x) dx$.
 b) Beräkna arean av område A respektive B.
 c) Tolk integralen i a) geometriskt.

3449 Figuren visar grafen till
 $y = \sin 3x$, $0 \leq x \leq 5\pi/6$.



Bestäm konstanten $a > 0$ så att integralen

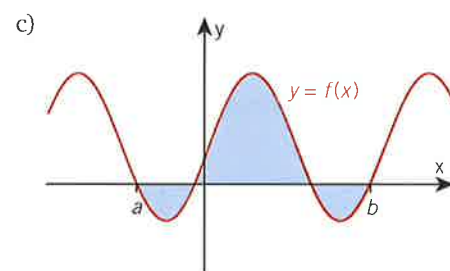
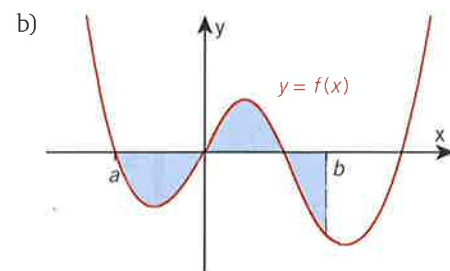
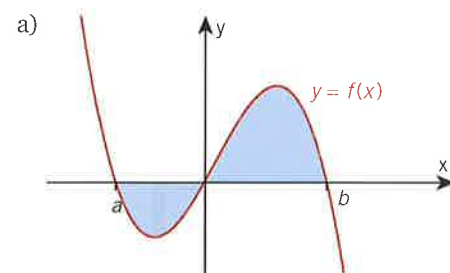
$$\int_0^a \sin 3x \, dx$$

- a) blir så liten som möjligt
 b) blir så stor som möjligt.

3450 Visa med beräkningar att

$$\begin{aligned} \text{a) } 4 \int_0^2 (3x^2 - 1) dx &= \int_0^2 4(3x^2 - 1) dx \\ \text{b) } \int_0^{\pi/2} (1 - \cos x) dx &= -\int_{\pi/2}^0 (1 - \cos x) dx \end{aligned}$$

3451 Avgör om integralen $\int_a^b f(x) dx$
 är positiv, negativ eller noll.
 Motivera ditt svar.



3452 Två integraler är givna:

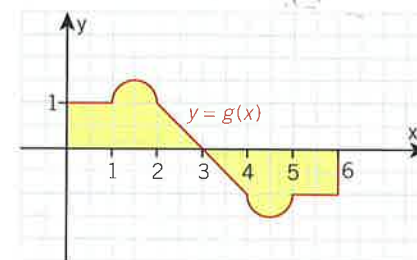
$$\int_a^b f(x) dx = 20 \quad \text{och} \quad \int_a^b g(x) dx = 4.$$

Beräkna

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx \\ \text{b) } \int_a^b 5f(x) dx \\ \text{c) } \int_a^b (4f(x) - 3g(x)) dx \end{aligned}$$

b

3453 Figuren visar grafen till en funktion g .
 Det färgade området är sammansatt av
 rektanglar, trianglar och halvcirklar.



Beräkna integralen $\int_0^a g(x) dx$ för

- a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 5$ d) $a = 6$

3454 Tre integraler är givna:

$$\int_0^1 f(x) dx = 4, \quad \int_0^2 f(x) dx = 2 \quad \text{och}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = 14.$$

Beräkna

$$\text{a) } \int_1^2 f(x) dx \quad \text{b) } \int_1^4 f(x) dx$$

3455 Kan man bestämma talet $a > 1$ så att

värdet av integralen $\int_1^a (4x - 6) dx$ blir

- a) -3 b) 3 ?

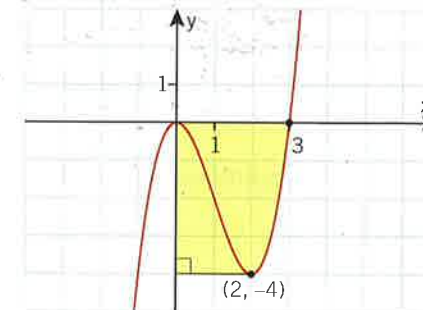
3456 Beräkna den totala arean som begränsas av
 kurvan $y = x^3 - 4x$ och x -axeln.

3457 Medelvärdet av en funktion f över ett
 intervall $a \leq x \leq b$ definieras som

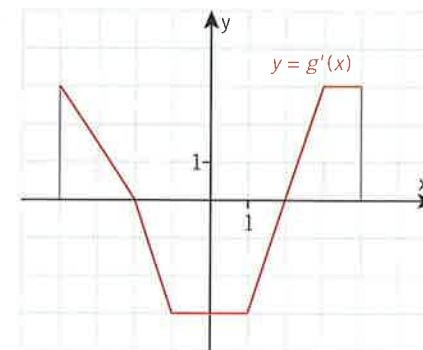
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Bestäm medelvärdet av $f(x) = x^n$ över
 intervallet $0 \leq x \leq 2$ om $n \geq 1$
 är ett heltal.

3458 Figuren visar grafen till $y = x^3 - 3x^2$.
 Uttryck det färgade områdets area med
 hjälp av en eller flera integraler.



3459 Funktionen g är definierad på inter-
 vallet $-4 \leq x \leq 4$. Figuren visar grafen
 till derivatan g' av denna funktion.



Bestäm $g(4)$ om $g(-2) = 3$.

3460 Funktionen $f(x)$ definieras av

$$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 3) dt, \quad x \geq 0.$$

Vilket är det minsta värde som $f(x)$
 kan anta?

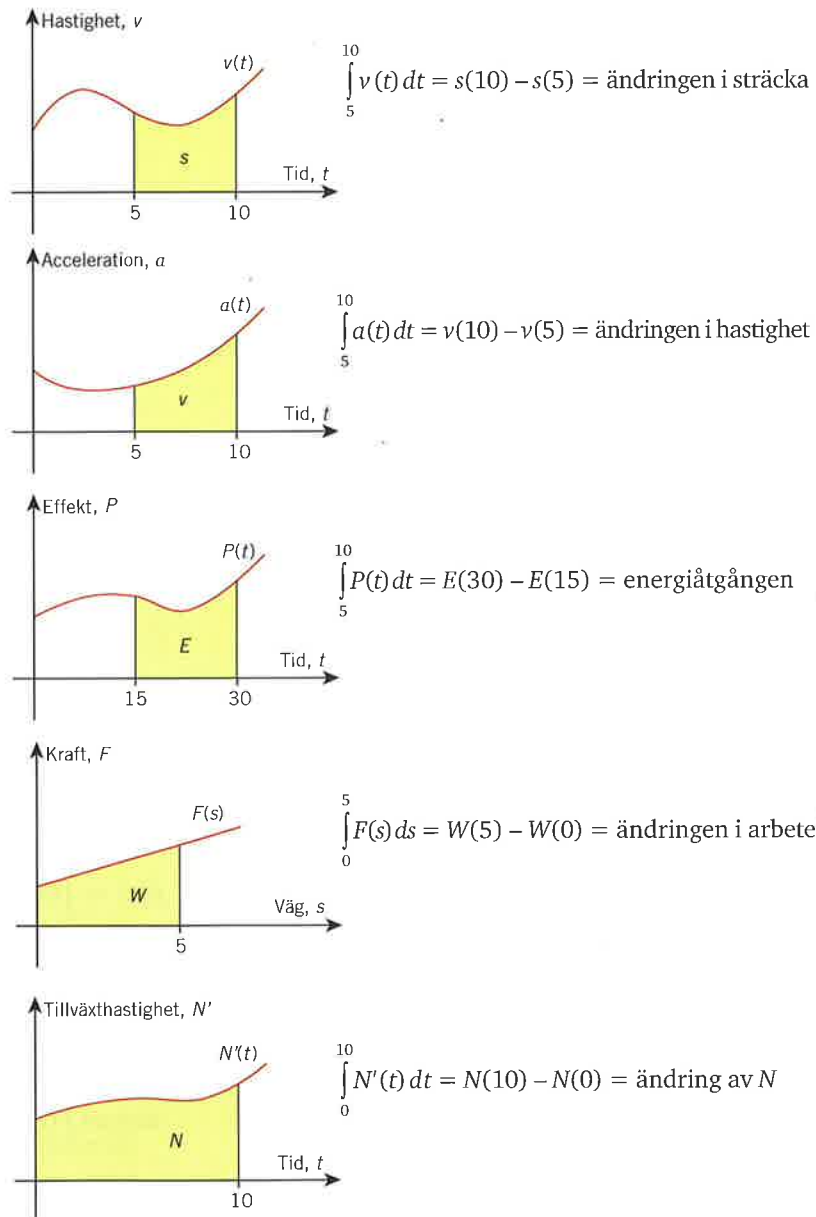
3461 Låt $\int_a^x f(t) dt = 5x^3 - 10$.

Bestäm $f(x)$ och talet a .

Integraler och storheter

Många olika storheter och dess förändringar kan representeras av areor i ett koordinatsystem.

Exempel



$$\int_a^b (\text{förändringshastigheten för } F) dx = \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \text{ändringen i } F$$



Din räknarens inbyggda verktyg för integralberäkningar kan beräkna olika typer av integraler vid tillämpningar och problemlösning. Använd gärna dessa när beräkningarna blir krävande eller som kontroll men se till att du behärskar nödvändiga metoder även för hand.

3462

Hastigheten för en bil som accelererar kan under ett tidsintervall ges av formeln $v(t) = 10 + 2,4t^2$ $0 \leq t \leq 4$ där v är hastigheten i m/s efter t sekunder.

Hur långt hinner bilen under den tredje sekunden, $t = 2,0$ till $t = 3,0$?

$$s = \int_{2,0}^{3,0} v(t) dt = \left[10t + 2,4 \cdot \frac{t^3}{3} \right]_{2,0}^{3,0} = 51,6 - 26,4 = 25,2$$

Kontrollera med din räknare.

Svar: Bilen hinner 25 meter under den tredje sekunden.

3463

Vid ett försök uppskattas antalet bakterier öka med hastigheten y bakterier/min enligt formeln

$$y = 1000 e^{0,2x} \quad 0 \leq x \leq 20$$

där x är antalet minuter efter försökets början.

Hur många minuter tar det för antalet bakterier att öka med 100 000 st?

Ändringen av antalet bakterier på t min ges av

$$\int_0^t 1000 e^{0,2x} dx = \left[5000 e^{0,2x} \right]_0^t = 5000 e^{0,2t} - 5000$$

Ändringen = 100 000 ger ekvationen

$$5000 e^{0,2t} - 5000 = 100000$$

$$5000 e^{0,2t} = 105000$$

$$e^{0,2t} = 21$$

$$0,2t = \ln 21$$

$$t \approx 15,2$$

Svar: Det tar cirka 15 minuter för antalet bakterier att öka med 100 000 st.



3464 Hastigheten v m/s för en sten som faller fritt i t s kan beräknas med formeln $v(t) = 10t$.

a

a) Ställ upp en integral som beskriver hur långt stenen faller under den fjärde sekunden, $t = 3,0$ till $t = 4,0$.

b) Beräkna hur långt stenen faller under den fjärde sekunden.

3465 Hastigheten v m/s för en inbromsande bil ges av formeln

$$v = 30 - 6t + 0,3t^2$$

där t är tiden i sekunder räknat från inbromsningens början.

a) Efter hur lång tid är hastigheten noll?

b) Hur lång väg tillryggalägger bilen innan den stannar?

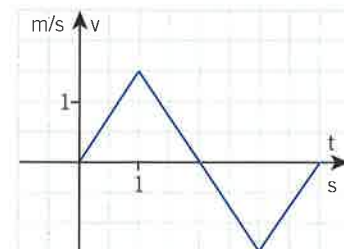
3466 I en stad förväntas antalet invånare öka med hastigheten y invånare/år enligt $y = 25 \cdot e^{0,05x}$ där x är antal år. Beräkna och tolka

a) $y(5)$

b) $\int_0^5 25e^{0,05x} dx$

3467 En bil håller hastigheten 30 m/s och bromsas in med accelerationen $(0,6t - 6)$ m/s², där $0 \leq t \leq 10$. Hur stor är hastigheten 6,0 s efter det att inbromsningen började?

3468 Ett föremåls rörelse längs en rät linje kan beskrivas med följande hastighetsgraf.



Beräkna och tolka

a) $\int_0^2 v(t) dt$

b) $\int_0^4 v(t) dt$

3469 En kopp kaffe med temperaturen 90 °C placeras i ett rum med temperaturen 20 °C. Temperaturen förändras med hastigheten $(-7e^{-0,1t})$ °C/minut.

Vilken temperatur har kaffet efter 10 minuter?

3470 En person i vila andas in och ut luft med hastigheten y liter/sekund. En enkel modell för hastigheten ges av funktionen

b

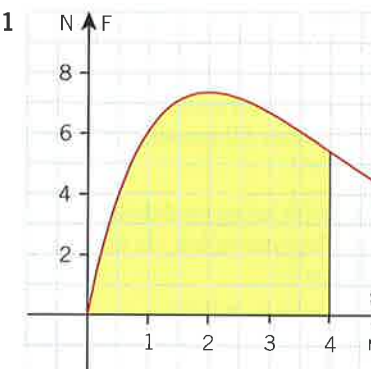
$$y = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$$

där t är tiden i sekunder.

a) Beräkna och tolka $y(1,5)$ och $y(3,5)$.

b) Hur mycket luft tas in under inandningen?

3471



Inom fysiken kan ett arbete W (Joule) definieras enligt $W = F \cdot s$ där F är kraften (N) och s sträckan (m).

Hur stort arbete motsvarar den färgade arean i figuren?

3472 En effekt varierar enligt tabellen.

t (s)	5	10	15	20	25
P (W)	48	52	55	46	52

Uppskatta energiåtgången för $t = 5$ till $t = 25$ genom att

a) rita figur och uppskatta integralens värde

b) anpassa lämplig kurva till tabellen och beräkna en integral.

3473 Elkostnaden y kr/månad för en eluppvärmad villa varierar under året enligt funktionen

$$y = 560 \cos 0,524(x - 1,2) + 640,$$

där x är tiden i månader räknat från nyår. Hur mycket större är elkostnaden under det första kvartalet jämfört med det andra kvartalet?

3474 Visa hur formeln $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

kan härledas från formeln

$$v = at + v_0 \text{ där } a \text{ och } v_0 \text{ är konstanter.}$$

3475 En fabrik uppskattas producera y enheter/månad av en viss vara enligt modellen

c

$$y = 100 \left(1 + \sin \frac{\pi(x-2)}{6} \right)$$

där x är antal månader från nyår.

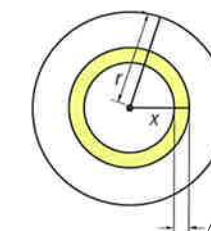
Hur lång tid kan det uppskattas ta att producera 200 enheter?

3476 Att producera k enheter kostar C kr. Därefter är marginalkostnaden $K'(x)$ kr/enhet för x enheter enligt

$$K'(x) = \frac{50}{\sqrt{2x+1}}$$

Ställ upp en formel som ger den totala kostnaden för att tillverka $k + a$ enheter.

3477 a) Approximera den färgade cirkelringens area ΔA med en lämplig rektangelarea.



b) Bestäm genom integration formeln för cirkelns area $A = \pi r^2$.

c) I en stad anser man att befolkningstätheten $f(x)$ tusen invånare per kvadratkilometer varierar enligt funktionen

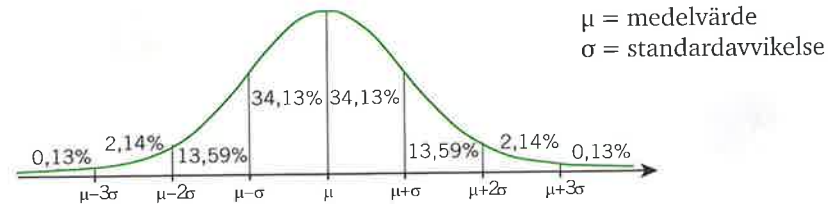
$$f(x) = 30 \cdot e^{-0,2x}$$

där x km är avståndet till centrum.

Hur många personer bor inom en radie av 4 km räknat från centrum?

Sannolikhetsfördelning

I kurs 2 introducerade vi normalfördelningskurvan.



Många olika statistiska material, t ex vikt/längd för barn av en viss ålder, följer denna kurva väldigt väl och kallas då normalfördelade. Med hjälp av kurvan kan vi beräkna hur stor andel av ett normalfördelat material som ligger inom ett visst intervall om vi känner till medelvärdet μ och standardavvikelsen σ .

normalfördelningskurvan

Normalfördelningskurvan är helt symmetrisk kring medelvärdet. Areal under kurvan motsvarar, för de olika intervallen, de angivna procentsatserna vilket t ex ger:

- Areal under kurvan mellan μ och $\mu + \sigma$ är ca 0,341.
- Totala arean under hela kurvan är 1,0.

sannolikhetsfördelning

Normalfördelningskurvan är ett exempel på en sannolikhetsfördelning. Den beskriver sannolikheten för olika utfall vid ett slumpförsök. En funktion som anger sannolikheten för att en variabel ska anta värden inom en viss mängd kallas en täthetsfunktion.

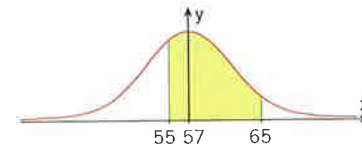
täthetsfunktion

Normalfördelningens täthetsfunktion ges av $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Hur man hittar denna funktion ligger utanför denna kurs men vi kan använda den för att beräkna olika sannolikheter för normalfördelat material.

Exempel

Ett normalfördelat material har medelvärde $\mu = 58$ och standardavvikelsen $\sigma = 5$. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald observation har ett värde mellan 55 och 65?



$$\mu = 58 \text{ och } \sigma = 5 \text{ ger } f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-58)^2}{2 \cdot 5^2}}$$

Den färgade arean ger sannolikheten.

$$\int_{55}^{65} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-58)^2}{2 \cdot 5^2}} dx \approx 0,64$$

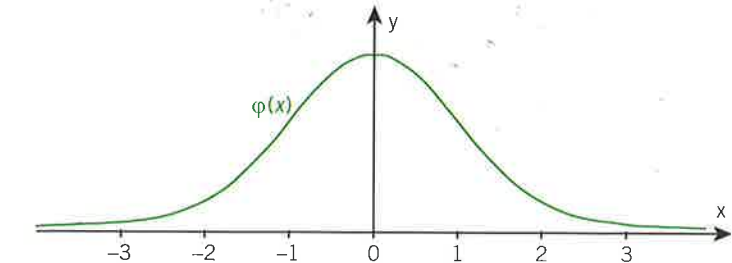
$f(x)$ saknar primitiv funktion. Räknares integralverktyg ger ett närmevärde.

Sannolikheten är 64 % att en slumpmässigt vald observation har ett värde mellan 55 och 65.

standardiserad normalfördelning

Om vi sätter $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ får vi en standardiserad normalfördelning. Täthetsfunktionen för denna fördelning betecknas ofta ϕ ("fi") och ges av

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$



Denna fördelning kan vi använda för att göra generella beräkningar, vi kan t ex visa att

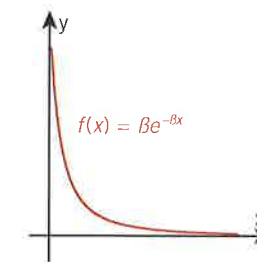
$$\int_{-1}^0 \phi(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx \approx 0,341$$

Sannolikheten att ett värde ligger i intervallet $(\mu - \sigma, \mu)$ är 34,1%.

exponentialfördelning

Det finns många olika typer av sannolikhetsfördelningar, ett exempel är exponentialfördelningen, en kontinuerlig fördelning som ges av täthetsfunktionen

$$f(x) = \beta e^{-\beta x} \text{ där } x > 0 \text{ och } \beta \text{ är en positiv konstant.}$$



Sannolikheten för ett utfall i ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av

$$\int_a^b \beta e^{-\beta x} dx \text{ och } \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta x} dx = 1$$

dvs arean under hela kurvan är 1.

Exponentialfördelningen används t ex för att beskriva livslängder eller tidsavstånd mellan olika företeelser.

Sammanfattning

En sannolikhetsfördelning beskriver fördelningen av möjliga utfalls sannolikheter.

Om $f(x)$ är fördelningens täthetsfunktion och $\int_a^b f(x) dx = P$ är P sannolikheten för ett utfall i intervallet (a, b) .

Om (a, b) är alla tillåtna x -värden är $P = 1$.

Normalfördelningens täthetsfunktion är $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

3478

I en stor stad är längden hos män normalfördelade med medelvärdet 178 cm och standardavvikelsen 6 cm. Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald man är

- a) mellan 175 cm och 185 cm b) längre än 195 cm.

- a) $\mu = 178$ cm och $\sigma = 6$ cm insatt i normalfördelningens täthetsfunktion ger

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}}$$

Sannolikheten ges av integralen $\int_{175}^{185} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}} dx$

Räknarens integralverktyg ger att

$$\int_{175}^{185} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}} dx \approx 0,57 = 57\%$$

- b) Sannolikheten ges av integralen $\int_{195}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}} dx$

För att beräkna denna integral måste vi göra en approximation. Normalfördelningskurvan går snabbt mot noll, det är tex bara 0,13 % av observationerna som har ett värde över medelvärdet +3 standardavvikelser. Det innebär att värden utanför medelvärdet ± 10 standardavvikelser kan försummas.

Vi beräknar med räknaren tex

$$\int_{195}^{250} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}} dx \approx 0,002 = 0,2\%$$

Svar: a) 57%

b) 0,2%

3479

Beräkna sannolikheten för att ett slumpvis valt värde i ett normalfördelat material ligger i intervallet $\mu \pm 0,5\sigma$.

Den standardiserade normalfördelningen med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$

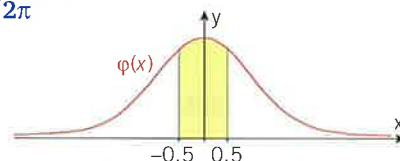
har täthetsfunktionen $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

Vi söker arean under kurvan i intervallet $-0,5$ till $0,5$.

Räknaren ger

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx \approx 0,38$$

Svar: Sannolikheten är 38 %.



3480

En äldre typ av glödlampor har en livslängd x timmar som kan beskrivas av en exponentialfördelning med täthetsfunktionen $f(x) = 0,0050 \cdot e^{-0,0050x}$ $x > 0$

Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald glödlampa har en livslängd

- a) mellan 100 och 200 timmar b) på minst 200 timmar

- a) Mellan 100 och 200 timmar ger intervallet $100 \leq x \leq 200$. Sannolikheten ges då av integralen

$$\int_{100}^{200} 0,0050 \cdot e^{-0,0050x} dx = \left[-e^{-0,0050x} \right]_{100}^{200} = -e^{-0,0050 \cdot 200} - (-e^{-0,0050 \cdot 100}) \approx \approx 0,24 = 24\%$$

- b) Minst 200 timmar är alla x från 200 till ∞ (oändligheten) vilket ger integralen

$$\int_{200}^{\infty} 0,0050 \cdot e^{-0,0050x} dx$$

Denna integraltyp kallas generaliserad integral och dess värde beräknar vi med ett gränsvärde. Med denna integral menar vi gränsvärdet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{200}^N 0,0050 \cdot e^{-0,0050x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-e^{-0,0050x} \right]_{200}^N = = \lim_{N \rightarrow \infty} (-e^{-0,0050N} - (-e^{-0,0050 \cdot 200})) = 0 + e^{-1} \approx 0,37 = 37\%$$

$$e^{-N} \rightarrow 0 \text{ då } N \rightarrow \infty$$

Svar: a) 24%

b) 37%



3481 Ange normalfördelningens täthetsfunktion

a) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ om

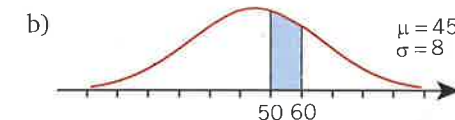
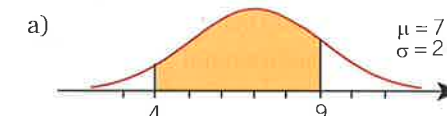
- a) $\mu = 110$ och $\sigma = 8$
b) $\mu = 1,65$ och $\sigma = 0,22$

3482 Beräkna integralen med din räknare och svara med två decimaler

a) $\int_{170}^{180} \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-178)^2}{2 \cdot 6^2}} dx$

b) $\int_{48}^{51} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 4^2}} dx$

3483 Beräkna den markerade arean och tolka resultatet.



3484 Ett tonfiskbestånd är normalfördelat med medelvikten $\mu = 300$ kg och standardavvikelsen $\sigma = 40$ kg. Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald fisk har en vikt mellan
a) 250 kg och 300 kg b) 300 kg och 400 kg.

3485 Bestäm en primitiv funktion till

a) $f(x) = 5 \cdot e^{-5x}$ b) $f(x) = 0,2 \cdot e^{-0,2x}$

3486 Beräkna integralen algebraiskt, kontrollera med din räknare.

a) $\int_0^3 2 \cdot e^{-2x} dx$ b) $\int_1^7 0,4 \cdot e^{-0,4x} dx$

3487 Vi antar att livslängden, x år, för en bilmodell ges av en exponentialfördelning med täthetsfunktionen $f(x) = 0,04 \cdot e^{-0,04x}$

a) Beräkna sannolikheten att bilmodellens livslängd ligger mellan 5 och 10 år.

b) Vilket värde ger $\int_0^{\infty} 0,04 \cdot e^{-0,04x} dx$?
Motivera.

3488 Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald observation i ett normalfördelat material finns i intervallet

- a) $(\mu - 0,6\sigma, \mu + 1,2\sigma)$
b) $(\mu + 0,2\sigma, \mu + 2,5\sigma)$

3489 Beräkna $P(\mu \pm 10\sigma)$ för ett normalfördelat material. Tolka ditt svar.



3490 Bildäcket AX-1000 har en livslängd som är normalfördelat med medelvärdet 5 500 mil och standardavvikelsen 400 mil.

Beräkna sannolikheten att ett däck av denna typ har en livslängd

- a) mellan 5 000 och 6 000 mil
b) kortare än 5 000 mil
c) längre än 6 000 mil.

3491 Livslängden x år för en radioaktiv isotop med sönderfallskonstanten $\lambda = 0,023$ beskrivs av en exponentialfördelning med $f(x) = 0,023 \cdot e^{-0,023x}$

- a) Beräkna sannolikheten $P(<20 \text{ år})$
b) Beräkna sannolikheten $P(>30 \text{ år})$
c) Ställ upp en funktion som ger $P(< a)$.

3492 En televäxel registrerade under en lång tid alla samtal som var maximalt 60 minuter. Samtalens längd x kan beskrivas med en fördelning med täthetsfunktionen $f(x) = (60 - x)/1800$ för intervallet $0 < x \leq 60$.

- a) Visa att arean under kurvan är 1 för det givna intervallet.
b) Beräkna sannolikheten för att ett slumpvis valt samtal ska pågå mellan 4 och 10 minuter.
c) Ställ upp en funktion som ger sannolikheten för att ett samtal är kortare än k min.

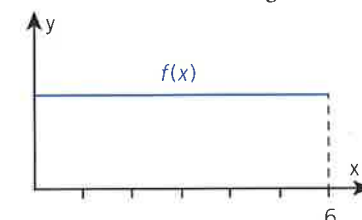
3493 Visa att arean under kurvan $f(x)$ i en exponentialfördelning är 1 för intervallet $(0, \infty)$.

3494 Ett uppladdningsbart batteri räcker vid en viss förbrukning 10 timmar.

Batteriet kan som medelvärde återuppladdas 700 gånger med en standardavvikelse på 50 gånger.

Vilken total livslängd kan man garantera för batteriet om man vill att max 10% av batterierna ska ligga under den garanterade livslängden?

3495 Vilken täthetsfunktion $f(x)$ har sannolikhetsfördelningen nedan?



Aktivitet

LABORERA



Sannolikheter

Materiel: Normalfördelade föremål (100 st) t ex mandlar, stora spikar, kolor eller liknande. Noggrant mätinstrument t ex skjutmått eller våg.



1 a) Mät eller väg dina föremål. Redovisa resultaten i en tabell.

b) Beräkna medelvärdet μ och standardavvikelsen σ .

c) Ställ upp den funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

som beskriver din datamängd.

2 a) Välj slumpvis två mätvärden a och b ($b > a$) från din tabell och beräkna

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

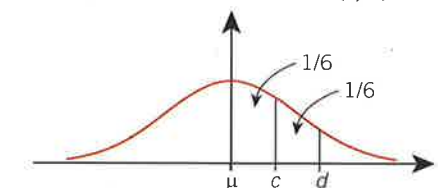
b) Förklara vilken sannolikhet du har beräknat i 2a)

c) Välj slumpvis ett föremål från ditt material och mät eller väg detta. Lägg tillbaka och upprepa 20 gånger. Hur många gånger fick du ett värde inom intervallet $a \leq x \leq b$? Jämför med 2a)

3 Gör en "tärning".

a) Undersök och finn med din räknare ett värde c som ger att $P = 1/6$ för att ett slumpvis val ska ge ett värde inom intervallet (μ, c) .

b) Finn på samma sätt ett värde d som ger $P = 1/6$ för ett värde inom (c, d) .



c) Vad är sannolikheten för ett värde $> d$?

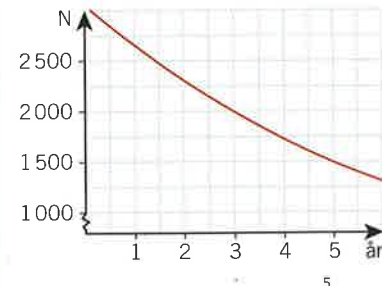
d) Använd kurvans symmetri och gör 6 intervall, vardera med $P = 1/6$.

"Provka din tärning", dvs välj ett värde slumpvis. Hur många gånger får du en "sexa" på 20 "kast"?

3.5 Tillämpningar och problemlösning

3501

Antalet fåglar N i en koloni ändras efter x år enligt grafen



Vilket värde ger detta för $\int_2^5 N'(x) dx$? Tolk ditt svar.

Vi ska beräkna en integral.

Om vi känner till en primitiv funktion till $N'(x)$ kan vi beräkna integralen.

Grafen ger $N(x)$ vars derivata är $N'(x)$, dvs grafen ger en primitiv funktion till $N'(x)$.

$$\int_2^5 N'(x) dx = N(5) - N(2)$$

Avläsning i grafen ger $N(5) - N(2) \approx 1500 - 2300 = -800$

Integralens värde är ca -800 .

Tolkning: $N'(x)$ är en förändringshastighet. Integralens värde är hur N har förändrats över tidsintervallet.

Här innebär det att vi direkt ur grafen kan avläsa att antalet fåglar minskade med ca 800 st under tidsintervallet $t = 2$ år till $t = 5$ år.

Problemlösningstrategi

1. Förstå problemet
2. Gör upp en plan
3. Genomför planen

4. Värdera resultatet

3502 Hastigheten v m/s för en cyklist ges under en begränsad tid av formeln

$$v(t) = \sqrt{t} \quad 0 \leq t \leq 8$$

Beräkna hur långt cyklisten hinner under denna tid.

3503 Beräkna $\int_{-1}^3 f(x) dx$ om $F(x)$ ges av

a) $F(x) = x^2 - 4x$

b)

x	-1	0	1	2	3
$F(x)$	-2	0	2	4	6

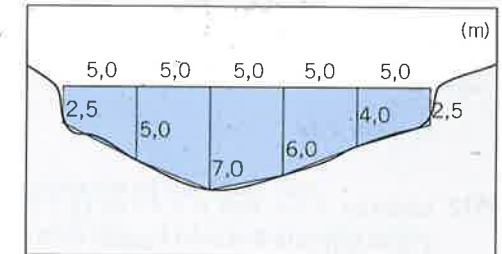
3504 Bestäm $f(x)$ om $f'(x) = x^2 + \sin x$
 $f(0) = 2$.

3505 För ett flygplan som landat på ett hangarfartyg beskrivs hastigheten på landningsbanan av tabellen

Tid (s)	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0
Hastighet (m/s)	90	70	46	27	12	0

Hur långt rör sig planet under själva landningen på fartyget?

3506 För att uppskatta vattenflödet i en flod bestämmer man vattendjupet som figuren visar. Vattnets hastighet är 1,5 m/s. Beräkna vattenflödet i floden uttryckt i m^3/s .



3507 a) Visa att $F(x) = x \sin x + \cos x$ är en primitiv funktion till $f(x) = x \cos x$.

b) Visa att $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$

3508 Bestäm det minsta värde funktionen $y = (e^x + x)^2 + 3$ kan anta. Motivera ditt svar.

3509 Undersök funktionen $y = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

- b)
- a) Rita grafen och förklara dess utseende.
 - b) Avläs med räknaren y -värdet då $x = -1,5$. Är svaret korrekt?

3510 Skissa grafen för hand. Ange eventuella asymptoter. Kontrollera med din räknare.

- a) $y = |1 + 2x|$
- b) $y = \left| \frac{4}{x} \right|$
- c) $y = |4 \sin 2x|$



3511 Bestäm med huvudräkning integralerna

a) $\int_{-6}^6 x^2 dx$ om $\int_0^6 x^2 dx = 72$

b) $\int_{-1}^2 e^x dx$ om $\int_{-2}^1 e^{-x} dx \approx 7$

c) $\int_{-a}^a \sin x dx$

3512 Linjerna $y = x$ och $y = 4 - bx$ ($b > 0$) bildar tillsammans med x -axeln en triangel med area 18 a.e. Bestäm b .

3513 $G(x) = xe^x - e^x$ är en primitiv funktion

till $g(x) = \frac{x}{e^{-x}}$

Bestäm en primitiv funktion till

$f(x) = 3 \cdot \frac{x}{e^{-x}}$

3514 Funktionen f har en sammanhängande graf i intervallet $-4 \leq x \leq 8$ och

$\int_{-4}^8 f(x) dx = 5$

Beräkna $\int_{-4}^8 g(x) dx$ om $g(x) = f(x) + 3$

3515 Undersök om det är möjligt att $f'(0) > 0$ om $g'(0) < 0$ och $h'(0) < 0$ och

a) $f(x) = g(x) + h(x)$

b) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

Motivera.

3516 Längden s för kurvan $y = f(x)$ i intervallet (a, b) kan beräknas med integralen

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Beräkna kurvans längd för

$f(x) = \sin x$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$

3517 Lös ekvationen $\int_0^x (3t^2 - 20t - 25) dt = 0$.
Tolka ditt svar.

3518 Visa utan grafitande verktyg att ekvationen $36 \sin x + 105 \cos x = 3x^2 - 2x + 112$ saknar rötter.

3519 Bestäm det minsta värde som funktionen f , given av

$f(x) = \frac{4x^2 \sin^2 x + 9}{x \sin x}$

antar i intervallet $0 < x < \pi$.

(Skolornas Matematiktävling)



3520 På ett krigsfartyg vill man göra dörrarna så höga att alla utom max 10% av besättningen ska kunna gå raka genom dem. Längden (inkl mössa och skor) av en besättningsman kan antas vara normalfördelad med medelvärde 180 cm och standardavvikelse 8 cm. Hur höga ska dörrarna göras?

3521

Ozzy påstår att arean under kurvan $y = 1/x^2$ är begränsad för intervallet $x \geq 1$. Har han rätt? Motivera.

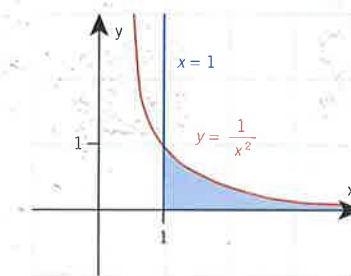
Vi undersöker den generaliserade

integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Om ett ändligt gränsvärde existerar så har Ozzy rätt.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = 0 + 1 = 1$

Ja han har rätt. Motivering: Gränsvärdet är 1, dvs arean närmar sig 1, men kan inte bli större.



3522 En cyklists hastighet $v(x)$ km/h minskar enligt

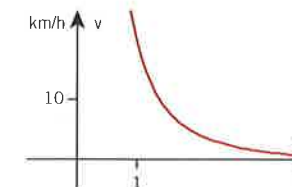
$v(x) = \frac{20}{x^2}$

där $x \geq 1$ h.

Vilken sträcka färdas cyklisten efter den första timmen om han fortsätter att cykla

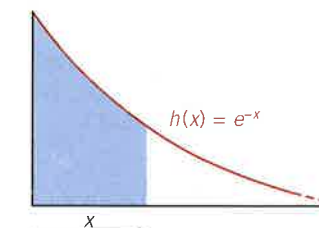
a) 5 h

b) för evigt.



3523 Ola ska måla ena sidan på ett oändligt långt plank. Höjden $h(x) = e^{-x}$ m, där x är avståndet från kanten i meter.

Han har en burk som täcker 2 m^2 . Räcker färgen?



3524 Har integralen ett ändligt värde?

a) $\int_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ c) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.5}} dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x^4} dx$ d) $\int_{-10}^{\infty} e^{-0.5x} dx$

3525 Undersök för vilka positiva tal k som integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx$ har ett ändligt värde

respektive går mot oändligheten.

3526 År 2000 uppskattades den totala mängd olja som fanns kvar till ca 1 000 miljarder fat (1 fat = 159 liter). Världsförbrukningen låg då på cirka 30 000 miljoner fat per år. En forskare påstod då att oljan aldrig tar slut om man minskar årsförbrukningen med 4% varje år. Undersök om detta stämmer.



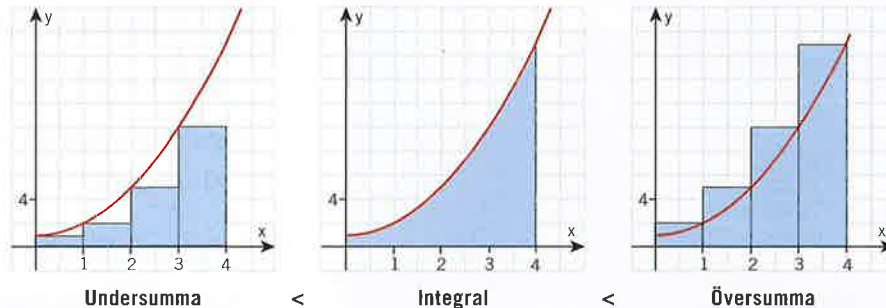
Historik

Riemanns summor och integralens definition

Bernhard Riemann (1826–1866) levde i kungariket Hannover, i dag en del av Tyskland. Han studerade först för att bli präst som sin pappa men bytte sedan bana till matematik. Vid universitetet i Göttingen hade Riemann



den berömde matematikern Gauss som lärare. Riemann uppskattade areor genom att bilda summor av rektanglar, både summor av mittpunktsrektanglar, över- och undersummor och summor av andra rektanglar. Om summan närmade sig ett värde k när han gjorde fler och fler rektanglar, så han att funktionen var integrerbar och att integralen hade värdet k . Den definition av integraler som vi använder i den här boken kommer från Riemann.



Om det finns precis ett tal I som för alla indelningar av intervallet ligger mellan över- och undersumman är $f(x)$ integrerbar och

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Definition av integral

1 Skissa $y = x^2$ i intervallet $0 \leq x \leq 2$.

- Bilda en översumma av fyra rektanglar med likadan bredd. Rita in och beräkna arean för de fyra rektanglarna.
- Rita in och beräkna motsvarande undersumma.
- Beräkna integralen och visa att den ligger mellan över- och undersumman.

2 Skissa återigen $y = x^2$ i intervallet $0 \leq x \leq 2$. Uppskatta integralen på samma sätt som i 1. men bilda fyra mittpunktsrektanglar, dvs rektangelns höjd är på kurvan mitt i rektangeln.

Beräkna arean och jämför med svaren i 1.

3 Teo påstår att för en rät linje är mittpunktsrektanglarnas area lika med integralens. Har Teo rätt? Motivera.

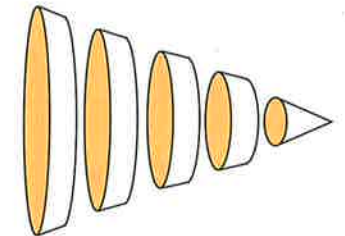
3.6 Rotationsvolymer

Skivmetoden

Hur kan vi beräkna volymen av en kropp med hjälp av en integral?

Exempel Vi visar ett exempel med en kon där volymen också kan beräknas med formeln $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

Vi börjar med att dela upp konen i ett antal skivor enligt figuren. Tvärsnittsareorna är då cirklar.



Volymen av en skiva kan approximeras till en cylindervolym med tvärsnittsarean $A(x_i)$ och höjden Δx_i .

Volymen av en cylindervolym ges av $\Delta V = A(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Vi får ett ungefärligt värde på konens volym om vi summerar skivornas volymer

$$V \approx \sum_{i=1}^5 A(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Om vi låter antalet skivor öka obegränsat så går Δx mot noll och vi kan beräkna konens volym med en integral

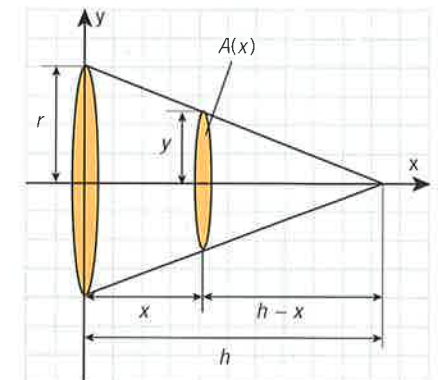
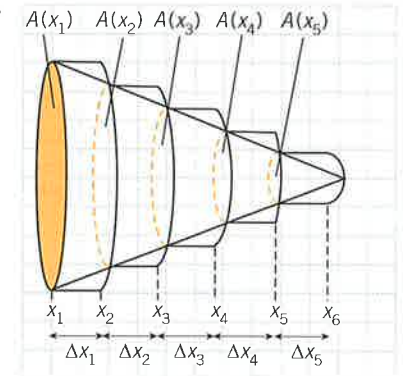
$$V = \int_0^h A(x) dx$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean som beror av x och h är konens höjd.

Med hjälp av likformighet kan vi skriva en formel för hur konens tvärsnittsarea A beror av x .

$$\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow y = \frac{r(h-x)}{h}$$

$$A(x) = \pi y^2 = \pi \left(\frac{r(h-x)}{h} \right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2$$



Volymen kan sedan beräknas med integralen

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h-x)^2 dx = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hx + x^2) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[h^2x - hx^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

Volymen $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ överensstämmer med den välkända formeln för volymen av en kon.

Volymen av en kropp kan beräknas med integralen

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean vinkelrätt mot x -axeln.
 a och b är gränserna i x -led.

Sammanfattning

rotationsvolym En *rotationsvolym* uppstår då en kurva roterar runt x -axeln eller runt y -axeln. Då kurvan roterar runt koordinataxeln blir de vinkelräta tvärsnittsareorna cirkulära. Volymen av rotationskroppen kan beräknas med *skivmetoden*.

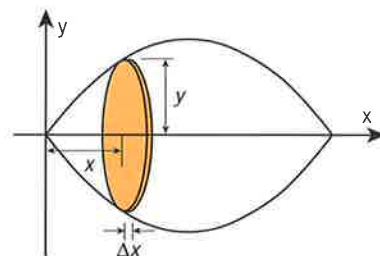
Rotation kring x -axeln:

Tvärsnittsarea: $A(x) = \pi \cdot y^2$

$$\Delta V = \pi y^2 \cdot \Delta x$$

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

där a och b är gränserna i x -led.



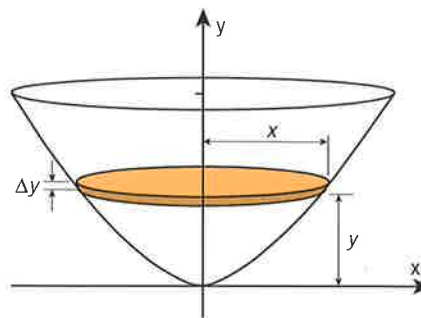
Rotation kring y -axeln:

Tvärsnittsarea: $A(y) = \pi \cdot x^2$

$$\Delta V = \pi x^2 \cdot \Delta y$$

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

där a och b är gränserna i y -led.



3601

Beräkna det exakta värdet av rotationskroppens volym för det område som begränsas av kurvan $y = 4 - x^2$ och koordinataxlarna när det roterar runt

a) x -axeln b) y -axeln

a) Den övre integrationsgränsen ges av skärningen med x -axeln, $x = 2$.

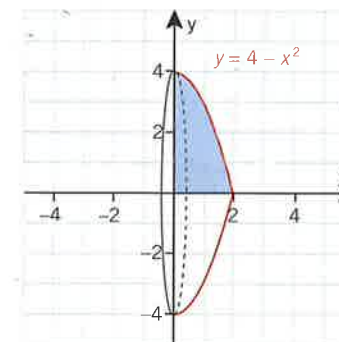
Tvärsnittsarean för en cirkulär skiva är πy^2 .

Volymen av en skiva
 $\Delta V = \pi y^2 \Delta x = \pi (4 - x^2)^2 \Delta x$

Hela kroppens volym

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi (4 - x^2)^2 dx = \\ &= \int_0^2 \pi (16 - 8x^2 + x^4) dx = \\ &= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{256\pi}{15} \approx 53,6 \end{aligned}$$

Svar: Kroppens volym är $\frac{256\pi}{15}$ volymenheter.



b) Den övre integrationsgränsen ges av skärningen med y -axeln, $y = 4$.

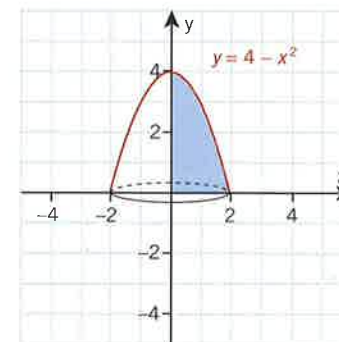
Tvärsnittsarean för en cirkulär skiva är πx^2 .
 $y = 4 - x^2$ ger att $x = \sqrt{4 - y}$

Volymen av en skiva
 $\Delta V = \pi x^2 \Delta y = \pi (\sqrt{4 - y})^2 \Delta y$

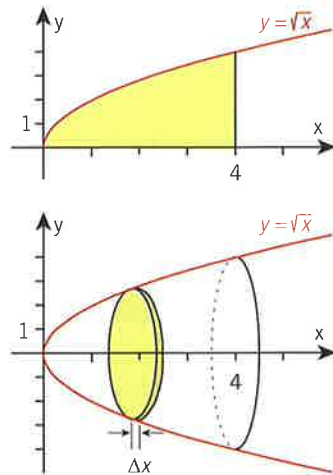
Hela kroppens volym

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi (\sqrt{4 - y})^2 dy = \\ &= \int_0^4 \pi (4 - y) dy = \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(16 - \frac{16}{2} \right) = 8\pi \approx 25,1 \end{aligned}$$

Svar: Kroppens volym är 8π volymenheter.

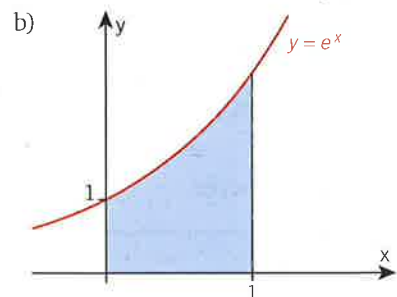
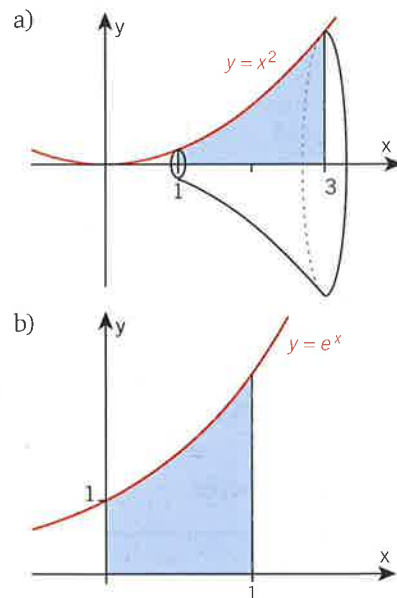


- 3602** Det färgade området får rotera kring x -axeln.

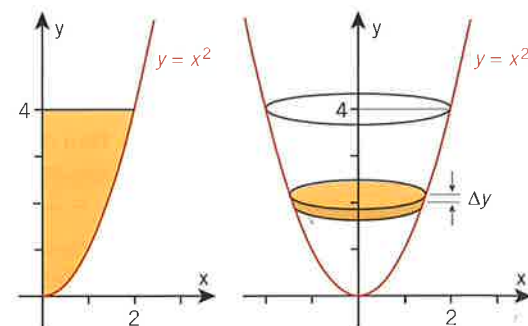


- Ställ upp ett uttryck för volymen av en skiva i rotationskroppen som funktion av x .
- Ställ upp en integral för beräkning av rotationskroppens volym.
- Beräkna volymen.

- 3603** Det färgade området roterar kring x -axeln. Beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.

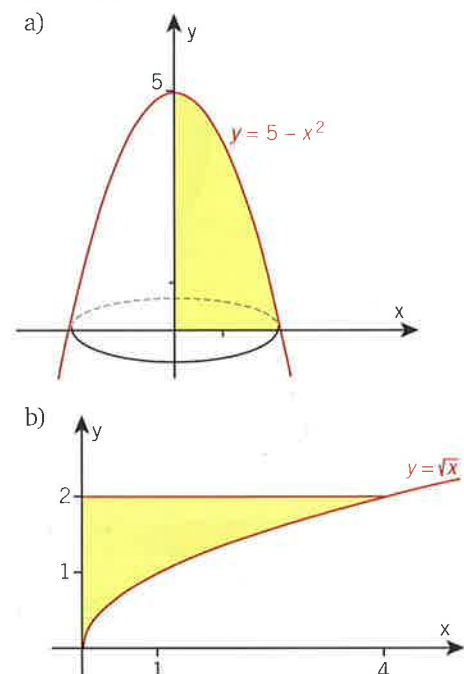


- 3604** Det färgade området får rotera kring y -axeln.



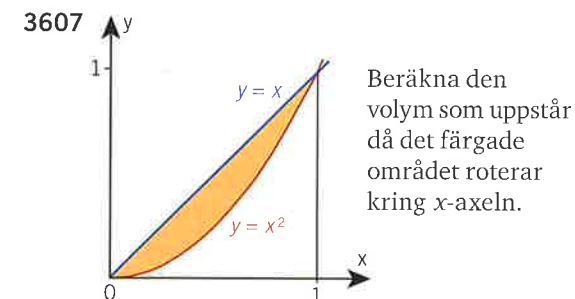
- Ställ upp ett uttryck för volymen av en skiva i rotationskroppen som funktion av y .
- Ställ upp en integral för beräkning av rotationskroppens volym.
- Beräkna volymen.

- 3605** Det färgade området roterar kring y -axeln. Beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.



- 3606** Följande områden roterar kring x -axeln. Rita en skiss och beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.

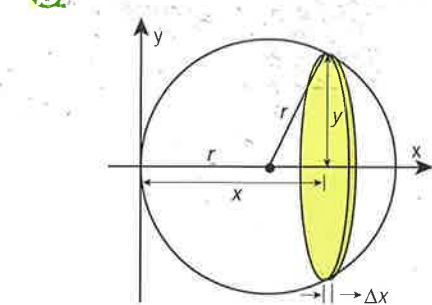
- $y = 5 - x$, x -axeln, linjerna $x = 1$ och $x = 4$
- $y = x^2$, x -axeln, linjerna $x = 1$ och $x = 2$
- $y = 2x - x^2$ och x -axeln



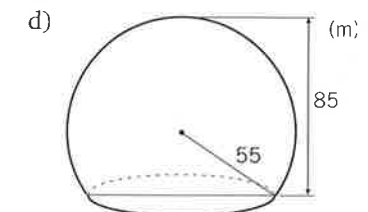
- 3608** Kurvan $y = x^2 - 1$ innesluter i 4:e kvadranten ett område tillsammans med koordinataxlarna.

Beräkna den volym som uppstår då detta område roterar kring y -axeln.

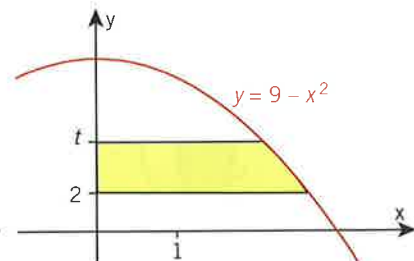
- 3609** Volymen av ett klot kan beräknas genom att klotet delas upp i "cirkulära skivor".



- Uttryck y i r och x och ställ upp ett uttryck för volymen ΔV av en skiva.
- Ställ upp en integral för beräkning av klotets volym V .
- Beräkna integralen.

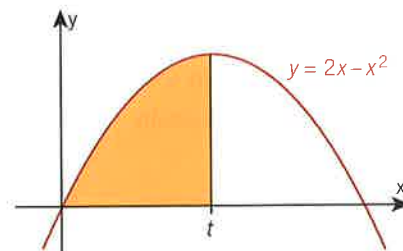


- 3610** Det färgade området i figuren alstrar vid rotation kring y -axeln en kropp med volymen 12π volymenheter. Bestäm talet t .



- 3611** Det område som begränsas av kurvan $y = x^{-2}$ samt linjerna $y = 1$ och $y = e$ får rotera kring y -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3612** Kurvan $y = 9 - x^2$ roterar kring x -axeln. Bestäm volymen av den ändliga kropp som då uppkommer. Svara exakt.
- 3613** Kurvan $y = \frac{12}{x}$ begränsar tillsammans med linjerna $x = 2$ och $y = 2$ ett ändligt område i första kvadranten. Detta område får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3614** Det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och kurvan $y = \sqrt{9 - 2x^2}$ får rotera kring y -axeln. Beräkna rotationskroppens volym.
- 3615** Kurvan $y = 3x^2 - x^3$ begränsar tillsammans med x -axeln ett område som får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3616** Låt det område som begränsas av kurvan $y = \ln x$, linjen $x = e$ samt x -axeln rotera kring y -axeln. Bestäm volymen av den uppkomna rotationskroppen.

- 3617** Det färgade området i figuren alstrar vid rotation kring x -axeln en kropp med volymen 2 volymenheter. Bestäm talet t med två decimaler.



- 3618** Det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och kurvan $y = \sin x + \cos x$ får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3619** Betrakta det ändliga område som begränsas av x -axeln och kurvan $y = a^2 - x^2$. Man låter området rotera, dels kring x -axeln, dels kring y -axeln. Bestäm den positiva konstanten a så att de två rotationskropparna får lika stor volym.
- 3620** Ett område i xy -planet begränsas av x -axeln, linjen $x = 1$ och kurvan $y = \sqrt{ax - a^2}$ där a är en konstant sådan att $0 < a < 1$. Låt området rotera kring x -axeln och bestäm a så att rotationskroppens volym blir maximal.
- 3621** Ställ upp en integral med vars hjälp följande område kan beräknas:
- Den volym som alstras då det område som begränsas av kurvan $y = x^2 + 1$ och linjen $y = 5$ får rotera kring $y = 5$.
 - Den volym som alstras då det område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{8x}$ x -axeln och linjen $x = 2$ får rotera kring $x = 2$.

Aktivitet

Sant eller falskt?

Diskutera i par eller grupp.
Sant eller falskt? Motivera svaret.

- En summa kan vi derivera term för term och en produkt kan vi derivera faktor för faktor.
- Kvoten $y = \frac{\tan x}{e^{2x}}$ kan skrivas om till produkten $y = \tan x \cdot e^{-2x}$.
- x -axeln är en asymptot till kurvan $y = 2 \sin x$.
- Differentialekvationen $y'' - y' = e^x$ har lösningen $y = xe^x$.
- Funktionen $y = \sin x$ har oändligt många primitiva funktioner.
- Värdet på en integral är alltid ett positivt tal.
- Förstaderivatan är en primitiv funktion till andraderivatan.
- Arean som bildas mellan x -axeln och grafen till $y = x^2 - 2x - 3$ kan beräknas genom $A = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx$.
- Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) = \sqrt{x}$ så är $F(4) - F(1) > 0$.
- Funktionerna $y = \ln x$ och $y = \ln 3x$ har samma derivata.
- Arean mellan kurvorna $y = 2x - x^2$ och $y = 2x^2 - 4x$ kan beräknas med integralen $\int_0^2 (6x - 3x^2) dx$.

DISKUTERA



- Kurvan $y = 4 - x^2$ innesluter tillsammans med x -axeln ett område. Volymen som uppstår då detta område roterar kring x -axeln kan beräknas med $\int_{-2}^2 \pi(4 - x^2)^2 dx$.
- Ett normalfördelat material har medelvärde 50 och standardavvikelsen 6. Sannolikheten att finna en slumpmässigt valt värde mellan 50 och 59 kan beräknas med integralen $\int_0^{1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx$.
- Om b är en konstant skild från noll, så har $\int_0^b 2 \sin bx$ alltid värdet noll.
- Om $k^3 = \frac{3k^2 - 1}{2}$ så har integralen $\int_1^k (x^2 - x) dx$ värdet noll.

Sammanfattning 3

Deriveringsregler

Kedjeregeln

Den sammansatta funktionen $y = f(g(x))$ har derivatan

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

y' = yttre derivatan $\times$ inre derivatan

Exempel:

$$y = \sin 5x \text{ ger } y' = \cos 5x \cdot 5$$

Om $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ och r är en funktion av t , så är

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Produktregeln

$y = f(x) \cdot g(x)$ ger

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

Exempel:

$$y = e^{2x} \cdot (x^3 + 1)$$

$$y' = e^{2x} \cdot 3x^2 + e^{2x} \cdot 2 \cdot (x^3 + 1)$$

Kvotregeln

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0) \text{ ger}$$

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Exempel:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Derivatan av $y = \ln x$

$$y = \ln x \text{ har derivatan } y' = \frac{1}{x}$$

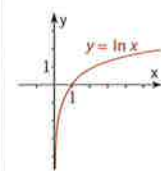
Exempel:

$$y = \ln 7x \text{ ger } y' = \frac{1}{7x} \cdot 7 = \frac{1}{x}$$

Grafer

Olika typer av grafer

Exempel:



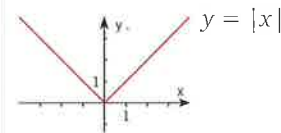
$y = \ln x$ har

Definitionsmängd: $x > 0$

Värdemängd: Alla reella tal y

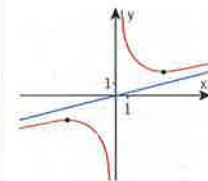
Absolutbeloppet av x definieras

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$



Kurvor och asymptoter

En asymptot är en rät linje som en graf närmar sig när avståndet till origo ökar.



$y = 0,25x + 4/x$ är inte definierad för $x = 0$ samt har asymptoterna $y = 0,25x$ och y -axeln.

Differentialekvationer

En ekvation som innehåller derivator kallas en differentialekvation.

Om ekvationen innehåller y'' men inga högre derivator är ekvationen av andra ordningen.

En lösning till en differentialekvation är funktion.

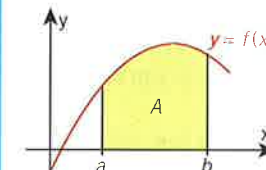
Att en given funktion är en lösning kan avgöras genom prövning, dvs undersöka om VL = HL.

Integraler

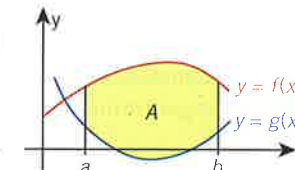
$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.

Areaberäkning

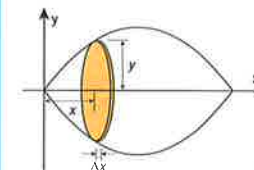


$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

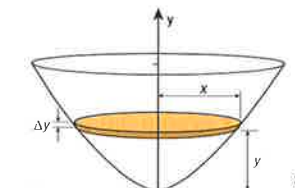
Volymberäkning



Rotation kring x -axeln

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

a, b gränser i x -led



Rotation kring y -axeln

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

a, b gränser i y -led

Grafiska metoder

En integrals värde kan uppskattas grafiskt som en area under en kurva.

Rektangelmetoden:

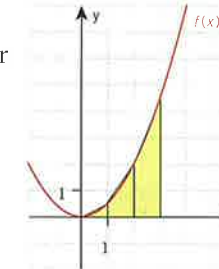
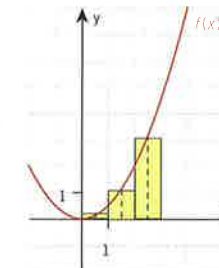
Uppskatta arean t ex med en eller flera mitterpunktsrektanglar.

Parallelltrapetsmetoden:

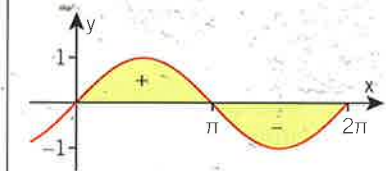
Uppskatta arean med en eller flera parallelltrapetser.

Över- och undersumma:

En integrals värde ligger inom ett intervall bildat av en för stor och en för liten area.



En integral är ett tal utan enhet som kan anta både positiva och negativa värden.



Värdet på $\int_a^b f(x) dx$ kan tolkas som

"arean över x -axeln" - "arean under x -axeln"

Många storheter kan beräknas med integraler, t ex

$$E = P \cdot t \text{ ger att } \int_1^3 P(t) dt = \text{Energiåtgång för } t=1 \text{ till } t=3.$$

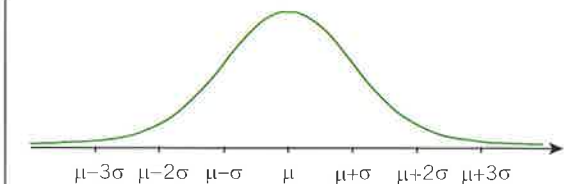
Sannolikhetsfördelning

I en normalfördelning ges sannolikheten för ett värde inom (a, b) av

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

μ = medelvärde
 σ = standardavvikelse.

Sannolikheten motsvaras av arean under kurvan



Om $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ ges sannolikheten av

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Standardiserad normalfördelning

Normalfördelningen är ett exempel på en sannolikhetsfördelning.

Arean under fördelningens täthetsfunktion $f(x)$ ger sannolikheten för ett visst intervall.

En annan sannolikhetsfördelning är exponentialfördelningen med $f(x) = \beta e^{-\beta x}$.

Är intervallet oändligt, t ex $\int_{10}^{\infty} f(x) dx$ måste

vi approximera eller beräkna ett gränsvärde.

Kan du det här? 3

Moment	Begrepp som du ska kunna använda och beskriva	Du ska ha strategier för att kunna
Derivator och deriveringsregler	Produktregeln Kvotregeln Kedjeregeln på olika former	derivera produkter, kvoter, sammansatta funktioner, $y = \tan x$ och logaritmfunktioner.
Grafer	Kontinuerlig, deriverbar Absolutbelopp Asymptot	skissa olika typer av grafer inklusive asymptoter, med och utan hjälp av derivata och/eller digitala hjälpmedel.
Differentialekvationer	Differentialekvation Första och andra ordningen Begynnelsevillkor	- tolka enkla differentialekvationer - avgöra om en funktion är en lösning.
Integraler	Integral Rektangelmetoden Parallelltrapetsmetoden Översumma, undersumma Normalfördelningskurva Sannolikhetsfördelning Täthetsfunktion Standardiserad normalfördelning Exponentialfördelning	- bestämma integraler med algebraiska och grafiska metoder inklusive beräkning av storheter - beräkna sannolikheter med integraler och då även över oändliga intervall.
Tillämpningar och problemlösning		lösa olika matematiska problem och tillämpningar.
Rotationsvolym	Rotationsvolym Skivmetoden	bestämma rotationsvolym med skivmetoden.

Diagnos 3

Derivator och deriveringsregler

1 Derivera

a) $y = x^3 \cdot \sin x$ c) $y = \ln x^2$

b) $y = \frac{\ln x}{x+1}$ d) $y = \sqrt{2x+1}$

2 Bestäm a så att $f'(a) = 1$ om $f(x) = \frac{2 \ln 3x}{3}$

3 $f(x) = \frac{1}{2x} + 1$. Har derivatan något nollställe? Motivera.

Grafer

4 Lös ekvationen $|3 - 2x| = 2$ grafiskt.

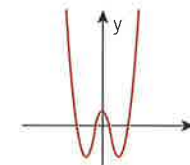
5 Visa att $y = e^{-x} \cdot x$ har största värdet $1/e$. Kontrollera grafiskt.

6 Avgör, utan hjälp av räknare eller derivata, vilken av funktionerna som kan ha grafen nedan. Motivera.

A $y = -x^4 - 4x^2 + 1$

B $y = x^4 - 4x^2 + 1$

C $y = x^4 + 4x^2 + 1$



7 Fille påstår att funktionen $y = e^{-x} + 2x$ har asymptoten $y = 2x$. Har han rätt? Motivera.

Differentialekvationer

8 En bils värde y kr ändras efter x år enligt differentialekvationen $y' = -0,12y$. Tolka ekvationen.

9 Bestäm talet k så att funktionen $y = 4e^{kx}$ blir en lösning till differentialekvationen $2y' - y = 0$.

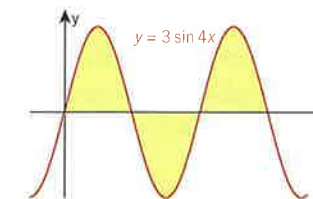
Integraler

10 Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = x^2 + 3$ samt linjerna $y = x$, $x = 1$ och $x = 2$.

11 En motors effekt P (J/s) efter t sekunder ges av $P = 25 \cdot \cos 50t + 400$.

Beräkna och tolka $\int_0^{60} (25 \cos 50t + 400) dt$.

12 Figuren visar grafen till $y = 3 \sin 4x$. Beräkna den markerade arean



13 Beräkna med huvudräkning integralen

a) $\int_1^3 (-5) dt$ b) $\int_0^4 x dt$

14 För ett normalfördelat material är $\mu = 5,00$ kg och $\sigma = 80$ gram. Beräkna sannolikheten att ett slumpvis valt värde ligger i intervallet $(4,90 - 5,00)$ kg.

Tillämpningar och problemlösning

15 $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och

$\int_1^3 f(x) dx = 4$. $G(x) = F(x) + 3$.

Bestäm $G(3) - G(1)$.

16 Har funktionen $y = 4 + \frac{1}{\sin^2 x + 1}$ något största värde? Motivera.

Rotationsvolym

17 Beräkna den volym som uppstår då kurvan $y = 2\sqrt{x}$ roterar kring x -axeln mellan $x = 1$ och $x = 3$.

Om du behöver repetera kan du fortsätta med *Repetitionsuppgifter* på sidan 252.

Blandade övningar kapitel 3

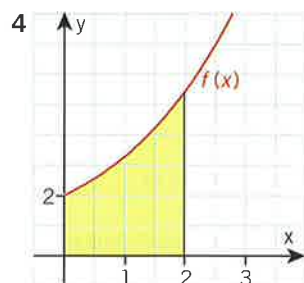
Del I Utan räknare

1 Derivera

- a) $y = 3 \sin 2x$ c) $y = \ln x \cdot e^{2x}$
 b) $y = (5 - 2x)^3$ d) $y = \frac{x^2 + x}{x}$

2 Visa att $y = 200 e^{3x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 3y = 0$

3 Beräkna $30 - 2 \cdot \int_1^2 (6x^2 - 1) dx$



Andy påstår att figuren visar att $\int_0^2 f(x) dt < 7,5$. Har han rätt? Motivera.

5 Bestäm en funktion f sådan att $f'(x) = x - \sin x$ och $f(0) = 3$.

6 Lös ekvationen $|0,1x - 5| = 2$

7 Lös ekvationen $y' = 0$ om $y = \frac{x^2}{e^{2x}}$

b

8 Skissa grafen till $y = 3x + 2/x$ och ange eventuella asymptoter.

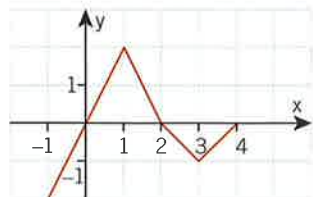
9 Derivera

- a) $y = (\ln 0,1x + 4)^2$ b) $y = 2^{3x}$

10 Bestäm talet a så att $\int_1^4 (3\sqrt{x} + a) dx = 26$

11 Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$.

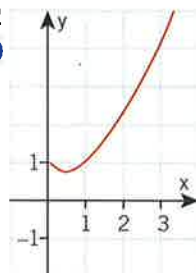
Beräkna värdet av integralen $\int_0^3 f(x) dx$



(NP)

12

c



Ovanstående diagram visar grafen till en funktion $f(x)$ vars derivata är $1 + \ln x$. Beräkna med hjälp av diagrammet

$$\int_1^3 (1 + \ln x) dx$$

(NP)

13 Visa att derivatan till $y = \tan x$ är $y' = 1 + \tan^2 x$.

14 Funktionerna f och g är deriverbara.

Man bildar en ny funktion

$$h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$$

För funktionerna f och g gäller

- $f(0) = 2$ och $g(0) = 1$
 • $f'(x) = g(x)$ och $g'(x) = -f(x)$

Bestäm $h'(x)$ och använd resultatet till att visa att $h(x) = 5$ för alla x .

(NP)

Del II Med räknare

15 Beräkna $\int_2^3 2(x + 4) dx$ med primitiv

a

funktion. Kontrollera med räknare.

16 Från en oljetanker läcker det ut olja med hastigheten $4e^{-0,2t} \text{ m}^3/\text{h}$, där t är tiden i timmar.

- a) Med vilken hastighet läcker oljan ut efter 5 timmar?
 b) Beräkna med hjälp av en integral hur mycket olja som har läckt ut efter 10 timmar.

17 Om en människa hamnar i nollgradigt vatten avtar kroppstemperaturen $y^\circ\text{C}$ enligt differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0,013y \quad y(0) = 37$$

där t är tiden i minuter som personen varit i vattnet.

- a) Vad betyder det att $y(0) = 37$?
 b) Visa att $y = 37 \cdot e^{-0,013t}$ är en lösning till differentialekvationen.
 c) Lös ekvationen $37 \cdot e^{-0,013t} = 30$ och tolka resultatet.
 d) Beräkna och tolka $y'(5)$.



18 Visa att $y = 2xe^x$ har ett lokalt min för $x = -1$

- a) grafiskt b) med derivata.

19 Längden på mandlar i ett visst parti är normalfördelade med $\mu = 20 \text{ mm}$ och $\sigma = 1,5 \text{ mm}$.

- a) Ungefär hur många av 200 slumpvis valda mandlar har en längd i intervallet (19-20) mm?
 b) Undersök grafiskt. Hur ändras normalfördelningskurvan om μ eller σ ändras?

20 Vilken volym är störst?

- I Området som begränsas av $y = 0,5x^2$, x -axeln och $x = 2$ roterar kring x -axeln.
 II Området som begränsas av $y = 0,5x^2$, y -axeln och $y = 2$ roterar kring y -axeln.

21 I ett samhälle förbrukas vatten med

b hastigheten $y \text{ m}^3/\text{h}$, där

$$y = 600 - 300 \cos \frac{\pi t}{12}$$

och t är tiden i timmar räknat från midnatt.

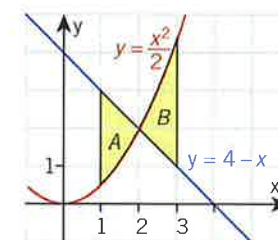
Beräkna och tolka

- a) $y(18)$ b) $y'(18)$ c) $\int_0^{12} y(t) dt$

22 Ange ett exempel på en funktion som har asymptoten

- a) $x = 1$ b) $y = 1$

23 Beräkna arean av område A respektive B i figuren.



24 Hur stor är sannolikheten att en radioaktiv isotop sönderfaller inom 1 år om isotopen har $\lambda = 0,16$ och sannolikhetsfördelningen över x år har täthetsfunktionen $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$?

25 En oljefläck på en sjö har radien 1,00 m och ökar sin radie med 5,0 cm/s. Hur snabbt ökar oljefläckens area vid detta tillfälle?

26 Bestäm arean under kurvan $y = 4^{0,5x}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$

- med räknare
- exakt med primitiv funktion

27 Låt $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

a) Tolka med en figur vad $g(3)$ kan betyda.

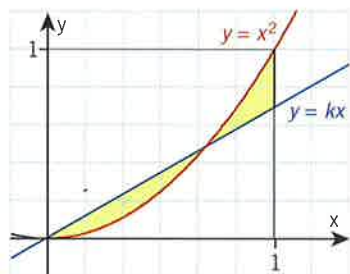
b) Bestäm med hjälp av din räknare ett närmevärde till $g(3)$.

(NP)

28 Kurvan $y = x + \sqrt{x}$ och kurvans tangent

c) då $x = 1$ begränsar tillsammans med y -axeln ett område. Beräkna områdets area.

29 De två färgade områdena har samma area A . Beräkna A .



30 En maskin tillverkar spik. Spikarnas längder är normalfördelade med medelvärde 70 mm och standardavvikelsen 2,0 mm. Ange ett symmetriskt intervall kring medelvärdet sådant att 90% av spikarna har en längd i detta intervall.

31 Anta att vi slumpvis väljer två tal x och y så att $0 < x < 4$ och $0 < y < 2$. Bestäm geometriskt sannolikheten att $y < \sqrt{x}$.

Utredande uppgifter @ b c

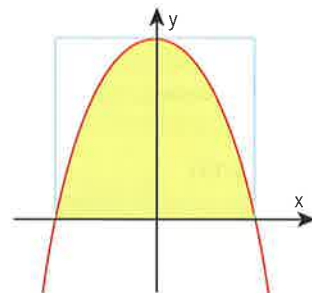
Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- vilka slutsatser du har kommit fram till
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

32 Du ska undersöka några funktioner av typen $y = ax \cdot e^{ax}$

- På grafen till $y = 2x \cdot e^{2x}$ finns en punkt där derivatan är noll. Bestäm koordinaterna för denna punkt.
- Funktionen $y = \frac{x}{4} \cdot e^{\frac{x}{4}}$ har ett minimivärde. Bestäm detta värde exakt.
- Visa att $y = ax \cdot e^{ax}$ har ett minimivärde som är detsamma vilket värde på a vi än väljer ($a \neq 0$).

32 En parabel ges av $y = b - ax^2$ där a och b är positiva tal



Du ska bestämma förhållandet mellan arean under kurvan och den rektangelarea som bildas av kurvans nollställen och maximipunkt, se fig.

- Beräkna förhållandet mellan arean under kurvan och rektangelarean om $b = 9$ och $a = 1$, dvs $y = 9 - x^2$.
- Välj själv värden på a och b . Beräkna förhållandet mellan areorna. Slutsats?
- Visa att din slutsats gäller för alla värden på a och b .

Blandade övningar kapitel 1-3

Del I  Utan räknare

1 Derivera

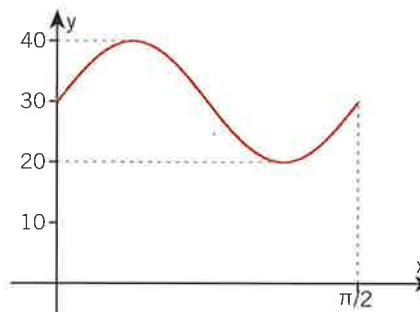
- $y = \cos 2x$
- $y = \ln 2x$
- $y = 5^x - x^5$
- $y = x \cdot \sin x$

2 Omvandla 40° till radianer.

3 $f(x) = 3 \sin 2x - \cos(x/2)$. Bestäm

- $f(\pi)$
- $f'(\pi)$

4 Bestäm talen A , b och C så att funktionen $y = A \sin bx + C$ ger grafen



5 Beräkna $\int_0^{\pi/3} \sin 3x dx$

6 Ange en differentialekvation som har lösningen $y = e^{-3x}$

7 Skissa i stora drag grafen till $y = x^3 - 3x + 1$

8 Beräkna den volym som uppstår då linjen $y = 2 + x$ roterar kring x -axeln mellan linjerna $x = -1$ och $x = 1$.

9 Visa med ett motsägelsebevis att

b) $4 + 3 \sin 2x \leq 7$

10 Visa att grafen till $y = \tan x$ har en tangent med lutningen 4 om $x = \pi/3$.

11 Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos(2x - \pi/3) = 0,5$

12 Kurvan $y = \sqrt{x}$ och $y = x$ bildar ett slutet område i första kvadranten. Beräkna områdets area.

13 Bestäm det positiva talet a så att $\int_2^a \frac{1}{x} dx = 1$

14 Visa att $F(x) = \frac{2x - \sin 2x}{4}$ är en primitiv

c) funktion till $f(x) = \sin^2 x$.

15 Bestäm exakt det minsta värde som inte-

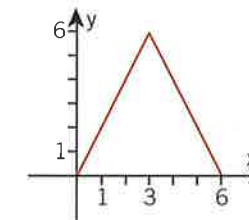
gralen $\int_0^t \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx$ antar då t varierar i intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$.

16 Grafen till en styckvis linjär funktion f som går genom punkterna $(0, 0)$, $(3, 6)$ och $(6, 0)$ är given enligt figur.

Bestäm talen a och b exakt så att

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_b^6 f(x) dx$$

där $0 < a < b < 6$



Del II Med räknare

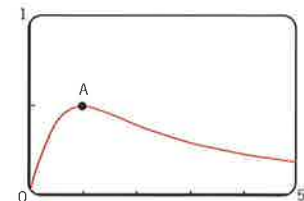
- 17 Lös ekvationen fullständigt.
a Svara i radianer med två decimaler.
 a) $\sin 2x = 0,45$
 b) $\tan 0,5x - 1 = 2$
- 18 Nederbörden y mm/dygn på en plats kan beskrivas med funktionen
 $y = 12,5 - 10 \cos 0,0172t$
 där t är tiden i dygn räknat från årsskiftet. Beräkna med hjälp av en integral nederbörden under årets första 90 dygn.
- 19 Vilka värden kan $\cos x$ anta om $\sin x = 0,5$?
- 20 Ge ett eget exempel på en trigonometrisk funktion som har ett lokalt max för $x = 30^\circ$.
- 21 Enligt Kalle från Göteborg kan dagens längd y h beräknas med modellen
 $y = 5,6 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 80)\right) + 12$
 där $x = 1$ svarar mot den 1 januari.
 a) Beräkna dagens längd den 15 januari.
 b) Beräkna och tolka $y'(80)$.
 c) Bestäm grafiskt längden på årets längsta respektive kortaste dag samt när de inträffar.



- 22 Kurvan $y = 2 \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, skärs av
b linjen $y = 1$ i två punkter. Kurvan och linjen innesluter ett område. Beräkna dess area
 a) med tre värdesiffror
 b) i exakt form.

- 23 Lös ekvationen $5 \sin 2x = \cos 2x$ i intervallet $200^\circ < x < 400^\circ$.

- 24 Figuren visar grafen till $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x > 0$



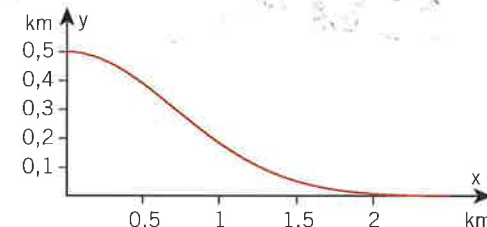
Bestäm med derivata koordinaterna för den markerade maximipunkten A.

- 25 Kurvan $y = e^{2x}$ roterar kring x -axeln mellan linjerna $x = 0$ och $x = a > 0$.
 Bestäm värdet på a så att rotationsvolymen blir exakt π v.e.
- 26 Motivera varför alla primitiva funktioner till $f(x) = 1/x$ ges av $F(x) = \ln |x| + C$.
- 27 Omforma uttrycket $\cos x \sin 2x$ med lämpliga trigonometriska formler så att det bara innehåller $\sin x$.
- 28 Kurvorna $y = e^{0,2x}$ och $y = x^2$ innesluter tillsammans med y -axeln ett område i första kvadranten. Teckna integralen för områdets area samt bestäm denna area med minst tre värdesiffror.

(NP)

- 29 En skidbacke har fallhöjden 500 meter.

- c** Banprofilen ser du i bilden nedan.



Höjden y km är en funktion av sträckan x km. Sambandet mellan y och x ges av $y = 0,5e^{-x^2}$, $0 \leq x \leq 2,5$

- a) Bestäm backens lutning för $x = 0,8$.

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen

$$y = 0,5e^{-ax^2}, \quad 0 \leq x \leq 2,5$$

där a är en positiv konstant.

- b) Ställ upp en ekvation för bestämning av x -värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

- c) Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1,0$.

(NP)

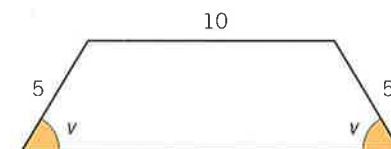
- 30 Funktionen $f(x) = \int_{-2}^x e^{-t/a} dt$ är given.

Det positiva talet a är sådant att $f(2) = \frac{3a}{2}$

- a) Bestäm talet a .

- b) Visa att för det bestämda värdet på a är $f'(1) = 1/\sqrt{2}$

- 31 Vilken vinkel v ger störst area på parallelltrapsetet?



- 32 Bestäm $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(1+h) - \sin 1}{h}$
 exakt och med två decimaler.

Utredande uppgifter @ b c

- 33 För vilka värden på n är n :te derivatan till $y = \sin x + \cos x$ lika med y ?

- 34 Undersök för vilka värden på a och b ekvationen $\sin ax = bx$ har

- a) en lösning b) tre lösningar,
 om x är givet i radianer.

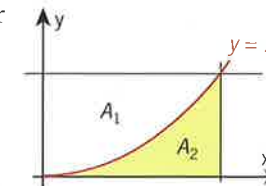
- 35 Figuren föreställer grafen till en funktion

$$y = x^n, \quad x \geq 0,$$

där n är ett reellt tal större än noll.

Från den punkt på

kurvan där x -koordinaten är c (c är en positiv konstant), dras linjer parallellt med de båda koordinataxlarna. Dessa linjer avgränsar tillsammans med koordinataxlarna och grafen två områden med areorna A_1 respektive A_2 .



- I a) Sätt $n = 2$ och undersök för några olika värden på c vad kvoten $\frac{A_1}{A_2}$ blir. Formulera en slutsats.

- b) Visa att din slutsats gäller för alla värden på c när $n = 2$.

- II a) Sätt $c = 1$ och undersök för några olika värden på n vad kvoten $\frac{A_1}{A_2}$ blir. Formulera en slutsats.

- b) Visa att din slutsats gäller för alla värden på n när $c = 1$.

- III Låt nu både c och n variera. Formulera en slutsats om kvoten $\frac{A_1}{A_2}$ och visa att din slutsats gäller för alla värden på c och n .
 (NP)