

4

KOMPLEXA TAL

Centralt innehåll

- * Grundläggande egenskaper hos komplexa tal.
- * Grafiska framställningar av komplexa tal.
- * Komplexa tal på polär form.
- * Användning av de Moivres formel vid ekvationslösning.
- * Lösning av polynomekvationer med komplexa rötter samt reella polynomekvationer av högre grad.
- * Faktorsatsen.
- * Algebrans fundamentalsats.

Inledande aktivitet

När vi försöker lösa ekvationen $x^2 + 1 = 0$ får vi $x = \pm\sqrt{-1}$.

Eftersom "roten ur" inte är definierad för negativa tal säger vi att ekvationen saknar reella lösningar.

I kurs 2c presenterade vi en ny sort av tal som kallas komplexa tal. Detta gjorde vi genom att introducera det imaginära talet $i = \sqrt{-1}$ som har egenskapen att $i^2 = -1$.

Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ får då de komplexa rötterna $x = \pm i$.

1 Undersök vilka av följande ekvationer som saknar reella rötter

- | | |
|------------------|------------------------|
| a) $x^2 - 2 = 0$ | c) $x^2 + 6x + 13 = 0$ |
| b) $x^2 + 5 = 1$ | d) $x^2 + 5x + 6 = 0$ |

2 Lös följande ekvationer genom att använda likheterna $i = \sqrt{-1}$ och $i^2 = -1$.

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| a) $x^2 + 2 = 0$ | c) $x^2 + x + 1 = 0$ |
| b) $x^2 + 10 = -6$ | d) $x^2 + 4x + 5 = 0$ |

238876744
894789475
15343274
7547
55
112
777
482398678567
894789475849

4.1 Räkning med komplexa tal

Inledning

– Vet du vad som ligger nere under matematiken, säger jag. – Nere under matematiken ligger talen. Om någon frågade mig vad som gör mig riktigt lycklig skulle jag svara: Det gör talen. Snö och is och tal. Och vet du varför?

– Därför att talsystemet är som människolivet. Till att börja med har man de naturliga talen. Det är de som är hela och positiva. Det lilla barnets tal. Men det mänskliga medvetandet expanderar. Barnet upptäcker längtan, och vet du vad det matematiska uttrycket för längtan är?

– Det är de negativa talen. Formaliseringen av att man känner att man saknar något. Och medvetandet fortsätter att vidgas, och växer, och barnet upptäcker mellanrummen. Mellan stenarna, mellan mossorna på stenarna, mellan människorna. Och mellan talen. Och vet du vad det leder till? Det leder till bråken. De hela talen plus bråken ger de rationella talen. Och medvetandet stannar inte där. Det vill överskrida förnuftet. Det

tillfogar en så absurd operation som rotutdragning. Och får de irrationella talen.

– Det är ett slags vansinne. För de irrationella talen är oändliga. De kan inte skrivas. De tvingar ut medvetandet i det gränslösa. Och med de irrationella talen lagda till de rationella, har man de reella talen.

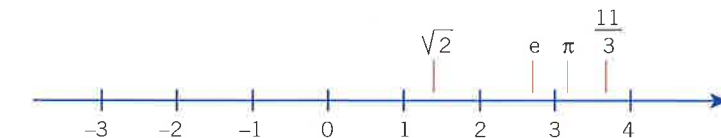
– Det tar inte slut. Det tar aldrig slut. För nu, på fläcken, utvidgar vi de reella talen med de imaginära, kvadratrötter ur negativa tal. Det är tal som vi inte kan föreställa oss, tal som normalmedvetandet inte kan rymma. Och när vi lägger de imaginära talen till de reella talen har vi det komplexa talsystemet. Det första talsystem där det är möjligt att tillfredsställande redogöra för isens kristallbildning. Det är som ett stort, öppet landskap. Horisonterna. Man beger sig mot dem, och de flyttar sig hela tiden. Det är Grönland, det är det jag inte kan vara utan!

Utdrag ur
Fröken Smillas känsla för snö
av Peter Høeg

De reella talen räcker inte

Vi påminner om hur vi kommit fram till de reella talen R .

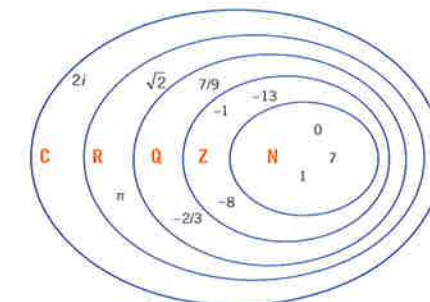
naturliga tal	Utgångspunkten är de naturliga talen N . Med dem kan vi bestämma antal. $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
hela tal	Vill vi kunna lösa ekvationen $x + 3 = 0$, måste vi införa de negativa heltalen. Vi får då de hela talen Z . $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
rationella tal	Vill vi kunna lösa ekvationen $3x = 1$, måste vi utvidga Z till de rationella talen Q . $Q = \{\text{Alla tal } a/b, \text{ där } a \text{ och } b \text{ tillhör } Z \text{ och } b \neq 0\}$
irrationella tal	Vill vi kunna lösa ekvationen $x^2 = 2$, måste vi införa de irrationella talen. Talen $\sqrt{2}$, π och e är exempel på irrationella tal. De kan inte skrivas på formen a/b . Vår talmängd är nu de reella talen R .
reella tal	$R = \{\text{Alla rationella och irrationella tal}\}$ Grafiskt kan vi åskådliggöra de reella talen R på en tallinje.



De reella talen fyller tallinjen helt: Mot varje punkt på tallinjen svarar ett reellt tal och omvänt. Trots detta är det lätt att ställa upp ekvationer som saknar lösning inom det reella talområdet.

Ett exempel är $x^2 = -1$

komplexa tal Vill vi lösa denna ekvation måste vi införa de komplexa talen C , som grafiskt kan illustreras i ett komplext talplan.



Observera att de naturliga talen N ingår som en delmängd i de hela talen Z och att Z ingår som en delmängd i Q osv. De reella talen R ingår som en delmängd i de komplexa talen C .

Repetition

I kurs 2 introducerades de komplexa talen i samband med lösning av andragradsekvationer. I det här kapitlet ska vi lära oss mer om komplexa tal, men vi börjar med en repetition.

imaginära tal

Vid lösning av vissa andragradsekvationer visade det sig att de reella talen inte är tillräckliga. Därför infördes de *imaginära talen*, som utgår från den imaginära enheten i .

Det gäller att

Definition

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Med hjälp av de imaginära talen får ekvationen $x^2 - 2x + 5 = 0$ lösningarna

$$x = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm \sqrt{(-1) \cdot 4} = 1 \pm 2\sqrt{-1} = 1 \pm 2i$$

komplexa rötter

Lösningarna $x = 1 \pm 2i$ kallas de *komplexa rötterna* till ekvationen.

Allmänt brukar man säga att om a och b är reella tal så är $z = a + bi$ ett komplext tal där

realdel och
imaginärdel till z

a kallas *realdelen* till z och betecknas $\operatorname{Re} z = a$
 b kallas *imaginärdelen* till z och betecknas $\operatorname{Im} z = b$.

Om imaginärdelen är noll är talet reellt och om realdelen är noll är talet imaginärt (eller rent imaginärt).

Mängden av alla komplexa tal betecknas C och inkluderar mängden av alla reella tal R .

4101

Bestäm realdelen och imaginärdelen för det komplexa talet

- | | | | |
|--|--|---------|--------|
| a) $-2 + i$ | b) $5 - 4i$ | c) $-i$ | d) 3 |
| a) $\operatorname{Re} z = -2, \operatorname{Im} z = 1$ | c) $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = -1$ | | |
| b) $\operatorname{Re} z = 5, \operatorname{Im} z = -4$ | d) $\operatorname{Re} z = 3, \operatorname{Im} z = 0$ | | |

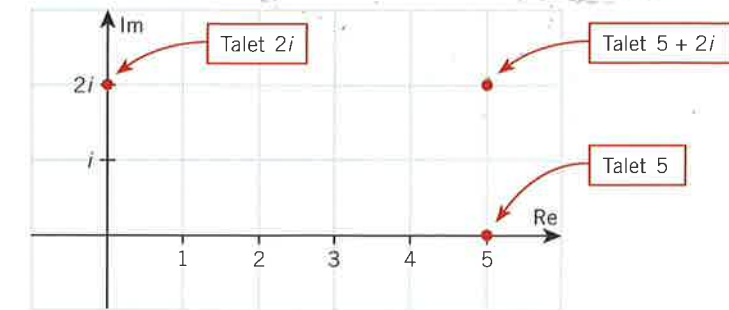
4102

Lös ekvationen

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| a) $z^2 + 10 = 6$ | b) $z^2 - 6z + 25 = 0$ |
| a) $z^2 + 10 = 6$ | b) $z^2 - 6z + 25 = 0$ |
| $z^2 = -4$ | $z = 3 \pm \sqrt{9 - 25}$ |
| $z = \pm \sqrt{-4}$ | $z = 3 \pm \sqrt{-16}$ |
| $z = \pm 2i$ | $z = 3 \pm 4i$ |

det komplexa talplanet

De komplexa talen kan grafiskt representeras som punkter i det *komplexa talplanet* som består av den *reella axeln* och den *imaginära axeln*. De reella talen återfinns på den reella axeln och de rent imaginära talen återfinns på den imaginära axeln.



4103 Bestäm realdel och imaginärdel för följande komplexa tal

- a) $4 + 7i$ d) $-2 + 6i$
b) $2i$ e) 5
c) $1 - i$ f) $2 - \sqrt{2}i$

4108 Markera följande komplexa tal i det komplexa talplanet

- a) $1 + 2i$ c) i
b) -1 d) $-2 - i$

4109 Lös ekvationen

- a) $z^2 = -144$ c) $3 + z^2 = 0$
b) $z^2 + 16 = 0$ d) $24 + z^2 = 88$

4105 Bestäm det komplexa talet z då man vet att

- a) $\operatorname{Re} z = 2$ och $\operatorname{Im} z = 3$
b) $\operatorname{Re} z = -1$ och $\operatorname{Im} z = 4$
c) $\operatorname{Re} z = \pi$ och $\operatorname{Im} z = 0$
d) $\operatorname{Re} z = 0$ och $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}$

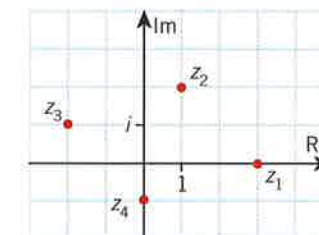
4110 Lös ekvationen och markera lösningen i det komplexa talplanet.

- a) $z^2 + 4z + 5 = 0$
b) $z^2 + 6z + 25 = 0$
c) $2z^2 + 40 = -8z$
d) $2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$

4106 För vilka värden på a och b är det komplexa talet $z = a + bi$

- a) reellt b) rent imaginärt?

4107 Vilka komplexa tal är markerade i det komplexa talplanet?



4111 Lös ekvationen $(x + 1)^2 = (2x - 4)^2 + 18$

b

4112 Visa att $z = -1 + \sqrt{3}i$ är en rot till ekvationen $z^2 + 2z + 4 = 0$.

4113 Anna påstår att andragradsekvationen $x^2 + 4x + a = 0$ saknar reella rötter om $a > 4$. Förklara varför Annas påstående stämmer.

Historik

De komplexa talens historia

Kan vi dela talet 10 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 40?

Cardano, en av de många italienska 1500-talsmatematikerna som sysslade med ekvationslösning, studerade detta problem. Med hjälp av andragradsekvationen $x(10 - x) = 40$ som kan skrivas $x^2 - 10x + 40 = 0$ fann han "lösningarna" $5 + \sqrt{-15}$ och $5 - \sqrt{-15}$. Visserligen, menade Cardano, är dessa lösningar helt meningslösa, men de uppfyller i alla fall kravet att deras summa är 10 och att deras produkt är 40.



Cardanos födelsestad Pavia.



På liknande sätt började olika matematiker av ren nyfikenhet att utforska hur man kan räkna med kvadratroten ur negativa tal.

René Descartes (1596–1650) var motståndare till komplexa rötter och kallade dem 1637 för imaginära tal, dvs inbillade tal, ett uttryck som stannat kvar. Än idag använder vi ordet imaginär för den icke-reella delen av ett komplext tal.

Först under 1800-talet blev de komplexa talen allmänt accepterade och det blev vanligt att tolka dem som punkter i ett plan. Bland andra Carl Friedrich Gauss (1777–1855) använde komplexa tal och såg på dem på ett mer abstrakt sätt, t ex: "Vilka matematiska satser gäller om man definierar $i = \sqrt{-1}$?"

Han var också den förste som bevisade *Algebrans fundamentalsats*: "En icke-konstant polynom-ekvation med komplexa koefficienter har minst en komplex rot."

Idag bryr man sig inte så mycket om ifall tal "finns till". Om de är praktiska att räkna med så använder vi dem!

- 1 Kan vi dela 12 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 45?

a) Formulera problemet som en polynom-ekvation.

b) Lös uppgiften med komplexa tal.
- 2 Kan vi dela 20 i två delar så att produkten av de båda delarna blir 125?

a) Formulera problemet som en polynom-ekvation.

b) Lös uppgiften med komplexa tal.

- 3 Ange en rot till varje polynom-ekvation
- a) $3xi + 5 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 + i = 0$

Aktivitet

UNDERSÖK



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
i^n	i	-1	$-i$													

- 1 Vi vill beräkna i^n där n är ett heltal större än 0, dvs vi vill förenkla i^1, i^2, i^3 osv.

a) Rita av tabellen och fyll i de tomma rutorna.

b) Studera din tabell och beskriv mönstret med ord.
- 2 Beräkna potenserna

a) i^{20} b) i^{27} c) i^{81} d) i^{303}

3 Förenkla så långt som möjligt

a) $i^3 + i^5$ c) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^5}$

b) $i^6 - i^{10}$ d) $i^{803} + i^{97}$

Konjugat, absolutbelopp och de fyra räknesätten

Det går bra att använda de fyra räknesätten vid räkning med komplexa tal. Grundregeln är att sortera real- respektive imaginärdelarna var för sig och komma ihåg att använda regeln $i^2 = -1$.

Exempel 1 Låt $u = 1 - 3i$ och $z = -3 + 2i$. Vi beräknar och skriver följande uttryck på formen $a + bi$.

Addition

$$u + z = (1 - 3i) + (-3 + 2i) = 1 - 3i - 3 + 2i = -2 - i$$

Subtraktion

$$u - z = (1 - 3i) - (-3 + 2i) = 1 - 3i + 3 - 2i = 4 - 5i$$

Multiplikation

$$u \cdot z = (1 - 3i) \cdot (-3 + 2i) = -3 + 2i + 9i - 6i^2 = -3 + 11i - 6 \cdot (-1) = 3 + 11i$$

Kvadrering

$$z^2 = (-3 + 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$$

Innan vi ger oss in på division är det lämpligt att introducera två nya begrepp.

konjugatet till z

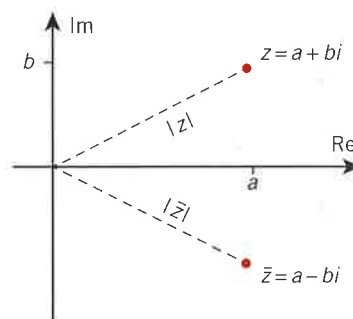
Om $z = a + bi$ är ett komplext tal så kallas $a - bi$ konjugatet till z och betecknas $\bar{z}$.

Skillnaden mellan z och $\bar{z}$ är att imaginärdelarna har olika tecken. Geometriskt kan detta tolkas som en spegling i den reella axeln.

absolutbeloppet av z

Absolutbeloppet $|z|$ är avståndet från z till origo. Ur figuren och med hjälp av

Pythagoras sats ser vi att $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Om $z = a + bi$ är ett komplext tal så gäller det att:

$a - bi$ kallas konjugatet till z och betecknas $\bar{z}$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ kallas absolutbeloppet av z och betecknas $|z|$

Definition

Exempel 2

Om vi multiplicerar $z = 2 - 3i$ med $\bar{z} = 2 + 3i$ kan vi använda konjugatregeln.

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 - 9i^2 = 4 - 9 \cdot (-1) = 4 + 9 = 13$$

För alla komplexa tal z gäller att produkten av z och dess konjugat $\bar{z}$ är ett reellt tal som är större eller lika med noll, dvs $z \cdot \bar{z} \geq 0$.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Med hjälp av denna regel kan vi dividera komplexa tal.

Exempel 3

Låt $z = 3 + i$ och $w = 2 - i$. Vi utför divisionen $\frac{z}{w}$ genom att förlänga bråket med nämnarens konjugat $\bar{w} = 2 + i$.

$$\frac{z}{w} = \frac{(3 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

Genom att förlänga med nämnarens konjugat får vi alltid ett reellt tal i nämnaren.

4114

Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ till

a) $z = 4 + 3i$ b) $z = 1 - i$ c) $z = -2i$ d) $z = 5$

a) $\bar{z} = 4 - 3i$ $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\bar{z} = 1 + i$ $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

c) $\bar{z} = 2i$ $|z| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $\bar{z} = 5$ $|z| = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

4115

Låt $z = 5 - 3i$ och $u = -2 + 4i$ och beräkna, dvs skriv på formen $a + bi$

a) $z + u$ b) $z - u$ c) $z \cdot u$ d) $\frac{z}{u}$

a) $z + u = (5 - 3i) + (-2 + 4i) = 5 - 3i - 2 + 4i = 3 + i$

b) $z - u = (5 - 3i) - (-2 + 4i) = 5 - 3i + 2 - 4i = 7 - 7i$

c) $z \cdot u = (5 - 3i)(-2 + 4i) = -10 + 20i + 6i - 12i^2 = -10 + 26i - 12 \cdot (-1) = 2 + 26i$

d) $\frac{z}{u} = \frac{5 - 3i}{-2 + 4i} = \frac{(5 - 3i)(-2 - 4i)}{(-2 + 4i)(-2 - 4i)} = \frac{-10 - 20i + 6i + 12i^2}{4 - 16i^2} = \frac{-22 - 14i}{20} = -\frac{11}{10} - \frac{7}{10}i = -1,1 - 0,7i$

4116 Beräkna

- a)** a) $(2 + i) + (1 - i)$ c) $i - (4 + 3i)$
b) $(3 - i) + (2i - 4)$ d) $(1 - i) - (4i - 3)$

4117 Talen $z = 3 - 2i$ och $u = -5 + 4i$ är givna. Beräkna

- a) $z + u$ c) $u - z$
b) $z - u$ d) $z \cdot u$

4118 Förenkla uttrycket och skriv resultatet på formen $a + bi$

- a) $(8 + 4i)^2$ d) $(-3 - 2i)^2$
b) $(2 - 5i)^2$ e) $(5 + i)(5 - i)$
c) $(-2 + 3i)^2$ f) $(-2 - i)(-2 + i)$

4119 Förenkla det komplexa talet z och ange även $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$.

- a) $z = (1 + 2i) - (2 + i)$
b) $z = 2i - (3 + 2i)$
c) $z = (1 - 3i)(2 - i)$
d) $z = (2 + i)(2 - i)$

4120 Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ då

- a) $z = 4 + i$ d) $z = 2$
b) $z = 2i - 3$ e) $z = -i$
c) $z = -1 - i$ f) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

4121 Alma har kommit fram till att för vilket komplext tal z som helst kommer z , $-z$, $\bar{z}$ och $-\bar{z}$ utgöra hörnen i en rektangel i det komplexa talplanet. Motivera varför Alma har rätt!

4122 Lös ekvationen, om x och y är reella tal.

- a) $2x + y + (x - y)i = 3$
b) $3x + y + (y - 4x)i = 7i$

4123 Skriv följande uttryck på formen $a + bi$

- a) $\frac{1 - i}{3 + 2i}$ c) $\frac{2 + 4i}{1 + 3i}$
b) $\frac{5 - 2i}{3i}$ d) $\frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$

4124 Max vet att talet $z = i$ har konjugatet $\bar{z} = -i$.

Därför tror han att konjugatet till alla komplexa tal z är detsamma som $-z$.

Visa med ett exempel att han har fel.

4125 Bestäm $|z|$ om man vet att $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$ och $\operatorname{Im} z = 3$.

4126 Ange $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ då

- b)** a) $z = \frac{1 + i}{1 - i}$ c) $z = \frac{i}{3 + i}$
b) $z = \frac{-1 + 3i}{2i + 2}$ d) $z = -\frac{2 - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} + 2i}$

4127 Är det sant att ett komplext tal z vars real- och imaginärdel är lika alltid ger en kvot $z/\bar{z}$ som är ett rent imaginärt tal (dvs ett tal med realdelen noll)? Motivera ditt svar.

4128 Bestäm talet $z = x + iy$ om

- a) $3\bar{z} - 2z = 1 - 10i$ c) $3z + \bar{z} = 24 - 12i$
b) $z - 5\bar{z} = 3i$ d) $3z + 2\bar{z} = 4i$

4129 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

- a) $\frac{2 + i}{1 - i} + \frac{2 - i}{1 + i}$ b) $\frac{3 + i}{2 - i} + \frac{3 - i}{2 + i}$

4130 Låt $z = 3 - 4i$, $u = 8 + 15i$ och $w = 5 - 12i$.

Beräkna, dvs skriv på formen $a + bi$

- a) $z \cdot \bar{w}$ b) $(3z + u)/w$

4131 Förenkla $\frac{z^2}{i}$ om $z = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2i}{\sqrt{5}}$

4132

Bevisa att likheten gäller.

a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

a) Vi börjar med att låta $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är

$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Vi vill nu bevisa att vänsterledet (VL) är lika med högerledet (HL):

$$\text{VL} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{HL} = z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$$

$$= a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Vi har visat att både VL och HL är lika med $a^2 + b^2$. Därmed har vi bevisat att likheten är sann.

b) Låt $z = a + bi$ respektive $w = c + di$, där a, b, c och d är reella tal. Då är

$$\bar{z} = a - bi$$

$$\bar{w} = c - di$$

$$z + w = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Vi samlar ihop real- och imaginärdelarna var för sig.

Nu bevisar vi att $\text{VL} = \text{HL}$:

$$\text{VL} = \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$$

$$= a + c - bi - di$$

$$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w} = \text{HL}$$

VS

4133 Bestäm $z \cdot \bar{z} + |z|$ om $z = 8 - 15i$

4134 Låt $z = 5 + 2i$ och $w = 3 - 4i$. Beräkna

- a) $\operatorname{Re}(zw)$ c) $|z + w|$
b) $\operatorname{Im}(z^2)$ d) $|z - w|^2$

4135 Visa att om $z = -1 - 3i$ så är

c) $z^3 + 3z^2 + 12z + 10 = 0$

4136 Låt $z = 2 - i$ och $w = a + bi$, där a och b är reella tal. För vilka värden på a och b är

- a) $z + w$ ett reellt tal större än 0?
b) $z \cdot w$ rent imaginärt?

4137 Låt $z = 3 - 2i$ och $w = 5 - 3i$. Skriv kvoten

$$\frac{z + 2w}{2\bar{z} - z}$$
 på formen $a + bi$.

4138 Låt $z = 2 - 3i$ och visa att

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

4139 Visa att $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ för $z = 5 - 2i$.

Bevisa att likheterna gäller.

4140 a) $\bar{\bar{z}} = z$ c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

b) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

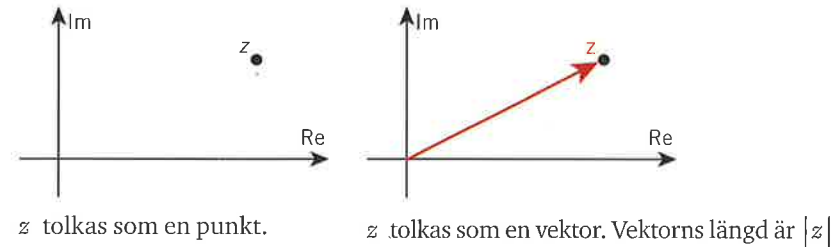
4141 a) $|z| = |\bar{z}|$ c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

b) $|zw| = |z| \cdot |w|$ d) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

4.2 Det komplexa talplanet

Komplexa tal som vektorer

Vi har tidigare tolkat ett komplext tal som en punkt i det komplexa talplanet. Vi ska nu representera ett komplext tal z som en vektor (riktad sträcka) som går från origo till punkten z i det komplexa talplanet. Observera att absolutbeloppet $|z|$ är lika med längden av vektorn z .



Vi ska nu se hur man kan tolka addition och subtraktion av komplexa tal med hjälp av vektorer.

Exempel 1 Vi utgår från de komplexa talen

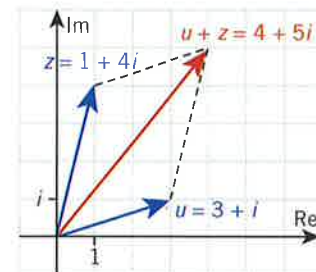
$$u = 3 + i$$

$$z = 1 + 4i$$

Då blir

$$u + z = 3 + i + 1 + 4i = 4 + 5i$$

vektoraddition Geometriskt kan additionen $z + u$ tolkas som *addition av vektorerna* för u och z . Detta innebär att $u + z$ representeras av den ena diagonalen i den parallelogram som bestäms av u och z .



$|u + z|$ motsvaras av diagonalens längd.

$$|u + z| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Vi går vidare till att se hur subtraktion av komplexa tal kan tolkas med hjälp av vektorer.

Exempel 2 Vi utgår från samma komplexa tal u och z som i Exempel 1. Då blir

$$u - z = 3 + i - (1 + 4i) = 2 - 3i$$

Om vi ritar vektorn

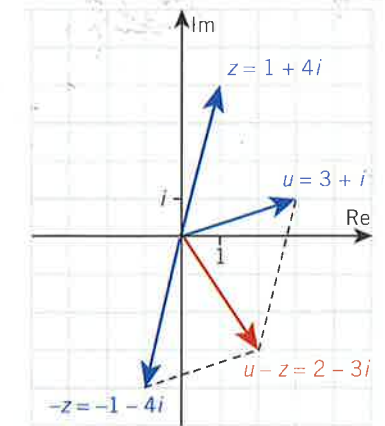
$$-z = -(1 + 4i) = -1 - 4i$$

vektorsubtraktion

så ser vi i figuren att subtraktionen $u - z$ motsvaras av additionen $u + (-z)$, dvs

$$u - z = u + (-z)$$

Ur figuren får vi också att längden av vektorn $u - z$ är lika med avståndet mellan u och z .



avståndet mellan två komplexa tal

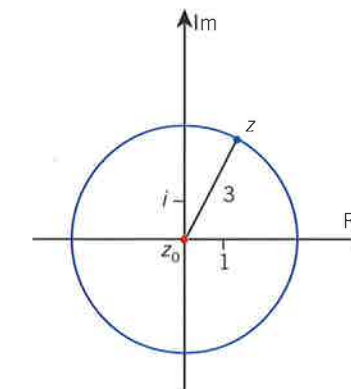
$|u - z|$ motsvaras av avståndet mellan punkterna u och z

$$|u - z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Exempel 3

cirkelns ekvation

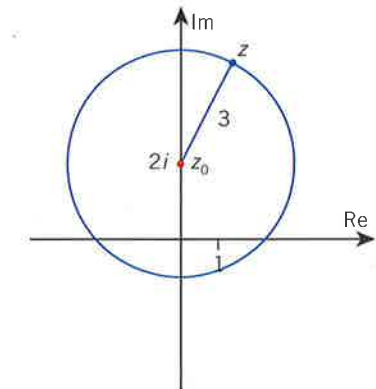
Vi kan nu relativt enkelt beskriva cirklar i det komplexa talplanet eftersom ekvationen $|z - z_0| = r$ innebär att avståndet från z_0 till z är konstant lika med r .



Alla punkter på cirkeln har avståndet 3 till origo.

$$|z| = 3$$

Cirkeln har sin medelpunkt i origo.



Alla punkter på cirkeln har avståndet 3 till punkten $2i$.

$$|z - 2i| = 3$$

Cirkeln har sin medelpunkt i punkten $2i = (0, 2)$

Med hjälp av komplexa tal kan vi även åskådliggöra andra kurvor och ytor. Vi ger här några exempel.

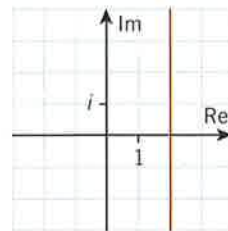
Exempel 4 Vi utgår från följande likheter och olikheter:

$$\operatorname{Re} z = 2 \quad -1 \leq \operatorname{Im} z < 2 \quad |z + i| < 2$$

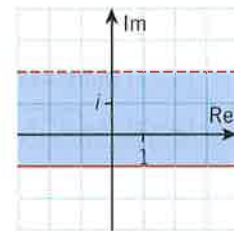
$\operatorname{Re} z = 2$ motsvaras av alla punkter längs den lodräta linjen $x = 2$.

$-1 \leq \operatorname{Im} z < 2$ innebär att $-1 \leq y < 2$, dvs det område som begränsas av de horisontella linjerna $y = 2$ och $y = -1$. Linjen $y = -1$ tillhör området men inte linjen $y = 2$. Vi visar detta genom att strecka den linje som inte tillhör området.

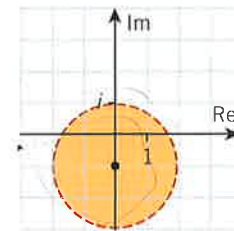
$|z + i| < 2$ skriver vi först om som $|z - (-i)| < 2$. Vi kan nu avläsa att avståndet mellan z och punkten $-i$ är mindre än 2. Detta motsvaras geometriskt av en cirkelskiva med medelpunkt $-i = (0, -1)$ och radien 2. Observera att randen till cirkelskivan inte är med vilket vi visar genom att strecka den.



$\operatorname{Re} z = 2$



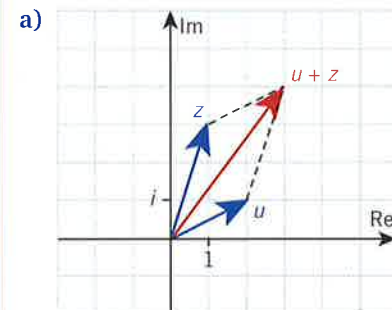
$-1 \leq \operatorname{Im} z < 2$



$|z + i| < 2$

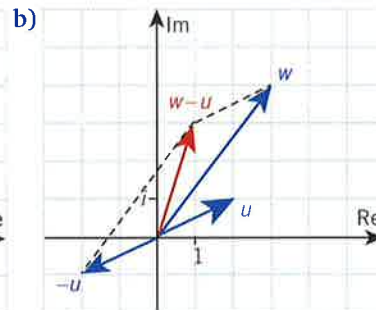
4201

- a) Rita $u = 2 + i$ och $z = 1 + 3i$ som vektorer i det komplexa talplanet. Rita också in $u + z$ och beräkna $|u + z|$.
b) Rita $u = 2 + i$ och $w = 3 + 4i$ som vektorer i det komplexa talplanet. Rita också in $w - u$ och beräkna $|w - u|$.



$$u + z = 3 + 4i$$

$$|u + z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



$$w - u = w + (-u) = 1 + 3i$$

$$|w - u| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

4202 Låt $u = 4 + i$ och $v = -1 + 2i$ och rita som vektorer

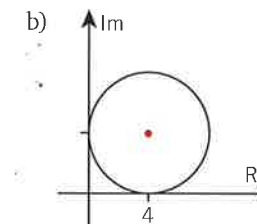
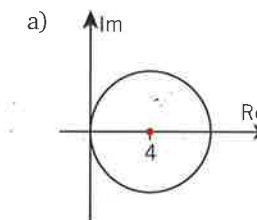
- a) u , v och $u + v$ samt beräkna $|u + v|$
b) u , v och $u - v$ samt beräkna $|u - v|$

4203 Vilhelm säger att talet $u = 10 + 24i$ ligger närmare origo i det komplexa talplanet än talet $z = 20 - 15i$. Har han rätt? Motivera.

4204 Rita z , $\bar{z}$ och $z + \bar{z}$ som vektorer i det komplexa talplanet, om

- a) $z = 1 + 2i$
b) $z = 3 - i$
c) $z = -2 + 2i$
d) Låt $z = a + bi$. Vad är då $z + \bar{z}$?

4205 Beskriv cirkeln med en ekvation.



4206 Lukas säger att cirkeln i uppg 4205 a) beskrivs av $|z + 4| = 4$.

- a) Vad gör han för fel?
b) Rita den cirkel som Lukas beskriver.

4207 Ekvationen $|z| = 10$ beskriver en cirkel i det komplexa talplanet. Ge ett exempel på ett icke-reellt tal z som ligger på cirkeln.

Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter z för vilka

- 4208** a) $|z| = 1$ c) $|z| = 4$
b) $|z| \leq 1$ d) $|z| \geq 4$

- 4209** a) $|z + 2| = 1$ c) $\operatorname{Re} z = -1$
b) $|z - 2i| = 3$ d) $\operatorname{Im} z = -3$

- 4210** a) $\operatorname{Re} z < 3$ c) $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 5$
b) $\operatorname{Im} z \geq -1$ d) $0 \leq \operatorname{Im} z < 5$

4211 Talen 0, $u = 4 + 6i$, $z = 3 - i$ och $w = u + z$ bildar hörnen i en parallelogram i det komplexa talplanet. Beräkna längden av parallelogrammens diagonaler.

4212 De icke-reella talen z och w är markerade i ett komplext talplan. Hur tolkar du olikheten

- a) $z < w$ b) $|z| < |w|$?

4213 Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter för vilka

- a) $2 \leq |z| \leq 4$ b) $\begin{cases} \operatorname{Im} z \geq 0 \\ |z| \leq 3 \end{cases}$

4214 a) Låt $z = 1 + 3i$ och $w = 2 + i$ och visa att $|z + w| < |z| + |w|$

- b) Finns det något komplext tal u sådant att $|z + u| = |z| + |u|$?
Motivera.

4215 Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter z för vilka

- a) $|z - 2i| = |z - 4i|$
b) $|z - i| = |z - 2|$

4216 Ekvationen $|z - 4| + |z + 4| = 10$ beskriver en kurva i det komplexa talplanet.

- a) Ange i ord vad som gäller för en punkt på denna kurva.
b) Rita kurvan. Vad kallas den?

Historik

Argand och det komplexa talplanet

Kring år 1800 gjorde tre matematiker en innovation som kom att leda till en större förståelse och acceptans av de komplexa talen. Caspar Wessel (1745–1818), Jean-Robert Argand (1768–1822) och Carl Friedrich Gauss (1777–1855) presenterade, oberoende av varandra, ett sätt att geometriskt åskådliggöra de komplexa talen som punkter eller vektorer i ett koordinatsystem. Nedan tittar vi lite närmare på Argands konstruktion.

Argand var en schweizisk amatör-matematiker som föddes i Geneve. Han flyttade med sin familj till Paris där han öppnade en bokaffär. År 1806 publicerade han boken "En uppsats om ett sätt att representera de imaginära storheterna med hjälp av geometriska konstruktioner."



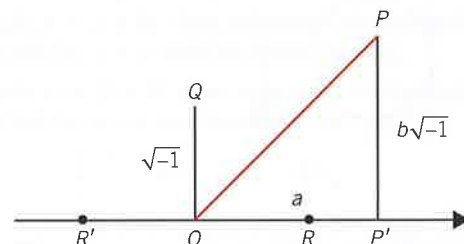
Boken förblev länge okänd eftersom Argand publicerade den privat på egen bekostnad. Dessutom hade Argand inte med sitt eget namn i boken. Sju år senare lät den franske matematikern François Français (1768–1810) publicera en artikel som var baserad på Argands bok. Det hade varit enkelt för Français att ta åt sig all ära för Argands idé men istället avslutade Français sin

artikel med att säga att denna idé var baserad på en bok som skrivits av en okänd matematiker som gärna fick göra sig tillkänna. Argand läste artikeln och skickade ett brev till Français där han talade om vem han var. Argands namn har blivit förevigat då man ibland talar om "Argand-diagram" när man avser det komplexa talplanet.

Argand förklarade sin idé på följande sätt:

Låt R och R' beteckna punkterna $+1$ och -1 på en tallinje där O markerar origo (se figuren nedan). Argand **menade** att om man bildar vektorn $\overrightarrow{OR}$ och **vrider** denna vektor först 90° och sedan 90° till kring origo så övergår den i vektorn $\overrightarrow{OR'}$. På motsvarande sätt får man talet -1 , om man multiplicerar talet $+1$ två gånger med $\sqrt{-1}$.

Enligt Argand kunde man därför tolka resultatet av den första vridningen, vektorn $\overrightarrow{OQ}$, som en motsvarighet till talet $\sqrt{-1}$. Ett godtyckligt komplext tal $a + b\sqrt{-1}$ kunde därmed uppfattas som summan $\overrightarrow{OP}$ av vektorerna $\overrightarrow{OR} = a$ och $\overrightarrow{P'P} = b\sqrt{-1}$.



1 Utgå från vektorn $\overrightarrow{OR}$ i bilden ovan. Vilket tal får man enligt Argands modell om vektorn vrids moturs

- a) 180°
- b) 270°
- c) 360°
- d) 540°
- e) 45°
- f) 120°

2 Rita det komplexa talet som en vektor med hjälp av Argands modell

- a) $1 + \sqrt{-1}$
- b) $-\sqrt{-1}$
- c) $-2 + 2\sqrt{-1}$
- d) $2 - 2\sqrt{-1}$

Komplexa tal på polär form

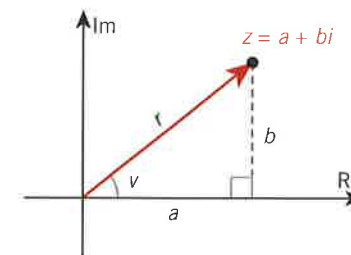
Vi har tidigare beskrivit det komplexa talet $z = a + bi$ som en punkt (a, b) i det komplexa talplanet. Dessa koordinater kallas ibland för *rektangulära koordinater*. I det här avsnittet ska vi istället använda *polära koordinater* för att beskriva ett komplext tal.

Vi utgår från det komplexa talet $z = a + bi$. Vi vet att avståndet från origo till punkten z är lika med absolutbeloppet $|z|$ som vi här kallar r , dvs

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vi låter vinkeln v vara vinkeln mellan positiva reella axeln och vektorn för z . Denna vinkel kallas *argumentet* för z och betecknas

$$v = \arg z$$



Om inte vinkelenheten grader är utskriven så är argumentet angivet i radianer. Observera att vinkeln v inte är entydigt bestämd. Om v är ett argument så är även $v + n \cdot 2\pi$ ett argument för alla heltal n . Vi väljer ofta vinklar v i intervallet $0 \leq v < 2\pi$ (eller ibland $-\pi < v \leq \pi$).

I figuren ovan ser vi att vinkeln v bestäms av

$$\tan v = \frac{b}{a}$$

Enligt definitionerna för de trigonometriska funktionerna sinus och cosinus får vi ur figuren fram sambanden

$$\cos v = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r \cos v$$

$$\sin v = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r \sin v$$

polära koordinater
polär form

(r, v) kallas för *polära koordinater* och vi kan med hjälp av dessa skriva ett komplext tal i *polär form*.

$$z = a + bi = r \cos v + ri \sin v = r(\cos v + i \sin v)$$

Det komplexa talet $z = a + bi$ kan skrivas i polär form

$$z = r(\cos v + i \sin v)$$

där $r = |z|$ och $v = \arg z$ bestäms av $\tan v = b/a$

Definition

4217

Skriv det komplexa talet på polär form, där $0 \leq \arg z < 2\pi$.

a) $z = 2 + 3i$ b) $z = -2$ c) $z = 2 - 2i$

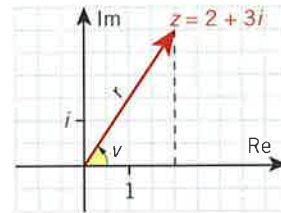
a) $z = 2 + 3i$ ligger i 1:a kvadranten och

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Enligt figuren ser vi att

$$\tan v = \frac{3}{2} \text{ dvs } v \approx 0,983$$

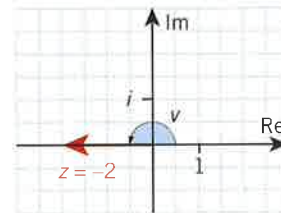
$$\text{Svar: } z = \sqrt{13} (\cos 0,983 + i \sin 0,983)$$

b) $z = -2$ ligger på den reella axeln

Enligt figuren ser vi direkt att

$$r = 2 \text{ och } v = \pi$$

$$\text{Svar: } z = 2 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

c) $z = 2 - 2i$ ligger i 4:e kvadranten och

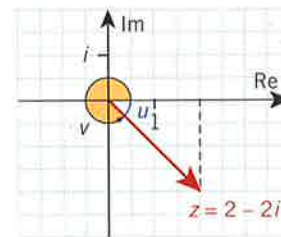
$$r = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

Enligt figuren ser vi att

$$\tan u = \frac{2}{2} = 1 \text{ dvs } u = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Då blir } v = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Svar: } z = \sqrt{8} (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$$



4218

Skriv talet $z = -2 + 4i$ i polär form. Ange argumentet i grader med en decimal, $0^\circ \leq \arg z < 360^\circ$.

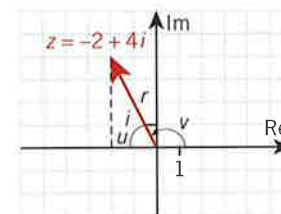
$$z = -2 + 4i$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Enligt figuren är } \tan u = \frac{4}{2} = 2$$

$$u = 63,4^\circ \text{ och } v = 180^\circ - 63,4^\circ = 116,6^\circ$$

$$\text{Svar: } z = \sqrt{20} (\cos 116,6^\circ + i \sin 116,6^\circ)$$



4219

a) Skriv det komplexa talet z på formen $a + bi$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

b) Bestäm $\arg \bar{z}$ om

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

a) Eftersom

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ och } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

får vi att

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\text{Svar: } z = \sqrt{3} + i$$

$$\text{b) } z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

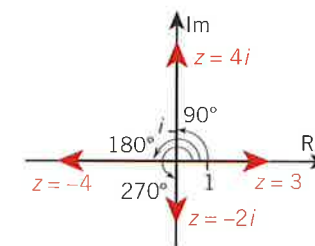
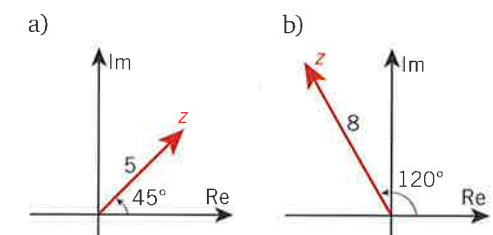
$$\bar{z} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos(-v) = \cos v \\ \sin(-v) = -\sin v$$

$$\text{Svar: } \arg \bar{z} = \frac{\pi}{4}$$

4220 Skriv talet z i polär form. Avläs r och v i figuren.

a) $z = -4$ b) $z = 4i$ c) $z = -2i$ d) $z = 3$

4221 Skriv talet z i polär form efter avläsning i figuren.

4222 Skriv det komplexa talet z på formen $a + bi$. Svara med två decimaler.

- a) $z = 5 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
 b) $z = 4 (\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$
 c) $z = 5 (\cos 325^\circ + i \sin 325^\circ)$
 d) $z = 2 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$

4223 Skriv, utan räknare, talet z på formen $a + bi$.

- a) $z = (\cos \pi + i \sin \pi)$
 b) $z = 3 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$
 c) $z = 2 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$
 d) $z = \sqrt{3} (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
 e) $z = 3 (\cos 0 + i \sin 0)$
 f) $z = (\cos 3\pi + i \sin 3\pi)$

4224 Rita först en enkel figur och skriv sedan talet i polär form med argumentet i grader.

- a) $z = 2 + 2i$ c) $z = \sqrt{3} + i$
 b) $z = 1 + \sqrt{3}i$ d) $z = -3 + 3i$

4225 Beräkna $|z|$ exakt om

- a) $z = 5 + 4i$ c) $z = -1 - 2i$
 b) $z = \frac{2}{5} + \frac{3i}{5}$ d) $z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

4226 Beräkna $\arg z$ i grader och svara med en decimal om

- a) $z = 4 + 3i$ c) $z = -2 - 3i$
 b) $z = -2 + 5i$ d) $z = 2 - 5i$

Rita först en enkel figur.

4227 Theo säger att om $\arg z = \frac{\pi}{2}$ så är

$\arg \bar{z} = -\frac{\pi}{2}$ medan Leo säger att
 $\arg \bar{z} = \frac{3\pi}{2}$ Förklara varför båda har rätt!

4228 Talet $z = 1 - i$ är givet. Ange

- a) $|z|$ c) $\arg z$ i radianer
 b) $|\bar{z}|$ d) $\arg \bar{z}$ i radianer

4229 Skriv z och $\bar{z}$ i polär form med $-\pi < \arg z \leq \pi$.

- a) $z = 2i$
 b) $z = 1 + i$
 c) $z = 3$
 d) $z = -2 - 2i$

4230 Beräkna det exakta värdet av $\arg z$ i radianer om

- a) $z = i$
 b) $z = 3 + 3i$
 c) $z = -1 - i$
 d) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4231 Markera i det komplexa talplanet de punkter z för vilka

b $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4}$

4232 a) Visa att $z = -\frac{2+2i}{i}$ har argumentet $3\pi/4$

b) Vilket argument har $z = -\frac{2}{1-i}$?

4233 Ange talet $-iz$ på formen $a + bi$, om $|z| = 1$ och $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

4234 Man vet att $|z| = 1$ och $\arg z = \frac{\pi}{4}$ Ange

- c** a) $\arg(iz)$ b) $\arg(-iz)$

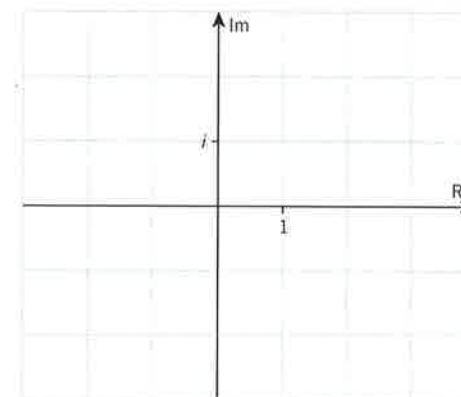
4235 Förklara varför sambandet $\arg \bar{z} = -\arg z$ gäller för alla $z = a + bi$.

Aktivitet

UNDERSÖK

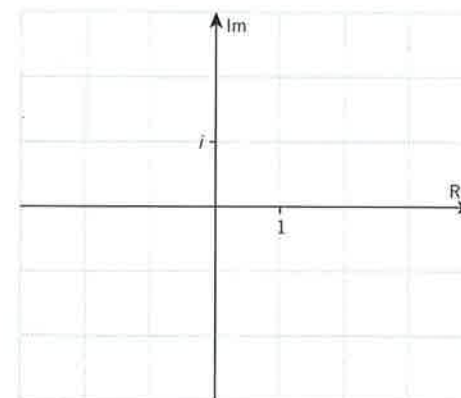
Multiplitera med i

- 1** a) Rita talen $z = 3$ och $w = -2i$ som vektorer i det komplexa talplanet.
 b) Multiplicera talen z och w med i . Rita iz och iw i talplanet.

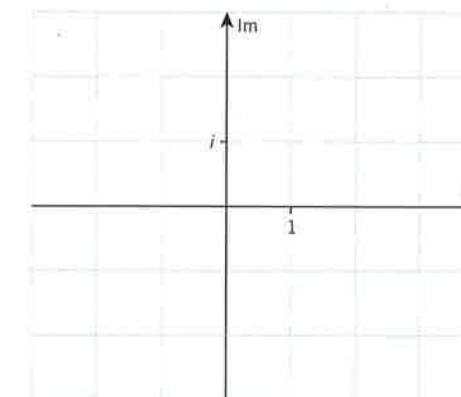


- 2** a) Rita talen $z = 1 + 2i$ och $w = -3 + i$ som vektorer i det komplexa talplanet.

- b) Multiplicera talen z och w med i . Rita iz och iw i talplanet.



- 3** Låt $z = 2 + i$ och $u = iz$ och $w = iu$. Rita talen z , u och w som vektorer.

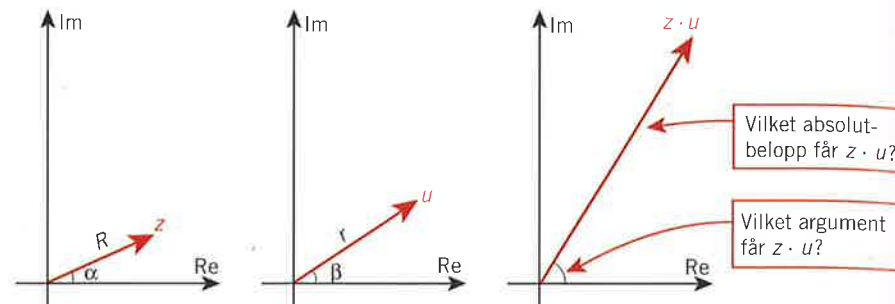


- 4** Formulera en regel om vad som händer med absolutbeloppet och argumentet när man multiplicerar ett tal med i .

Multiplikation och division i polär form

Vi ska nu multiplicera respektive dividera två komplexa tal z och u där båda är skrivna på polär form.

Exempel 1 Geometriskt ser multiplikationen ut på följande sätt:



$$z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad u = r(\cos \beta + i \sin \beta)$$

Vi måste ta reda på vilket belopp och vilket argument som produkten $z \cdot u$ får. Detta härleder vi med hjälp av additionssatserna för sinus och cosinus.

$$\begin{aligned} z \cdot u &= R(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot r(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= Rr(\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= Rr \left(\underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha + \beta)} \right) = \\ &= Rr(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

multiplikation i polär form

Därmed har vi fått fram att absolutbeloppen multipliceras och argumenten adderas vid multiplikation med komplexa tal på polär form.

Exempel 2 Vi ska nu dividera de komplexa talen z och u med varandra. Vi gör ett knep och utgår från multiplikationen

$$z = \frac{z}{u} \cdot u$$

Eftersom vi vet reglerna för multiplikation av komplexa tal på polär form får vi

$$|z| = \left| \frac{z}{u} \right| \cdot |u| \Leftrightarrow \left| \frac{z}{u} \right| = \frac{|z|}{|u|}$$

Vi gör motsvarande knep för argumenten och får enligt reglerna för multiplikation av komplexa tal på polär form

$$\arg z = \arg \left(\frac{z}{u} \cdot u \right) = \arg \frac{z}{u} + \arg u \Leftrightarrow \arg \frac{z}{u} = \arg z - \arg u$$

division i polär form

Vi ser att vid division av komplexa tal skrivna på polär form dividerar man absolutbeloppen och subtraherar argumenten.

Sammanfattning

Ett komplext tal på polär form kan skrivas $z = r(\cos v + i \sin v)$, där $r = |z|$ och $v = \arg z$.

Vid multiplikation av komplexa tal på polär form multiplicerar man absolutbeloppen och adderar argumenten.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$$

Vid division av komplexa tal på polär form dividerar man absolutbeloppen och subtraherar argumenten.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$$

4236

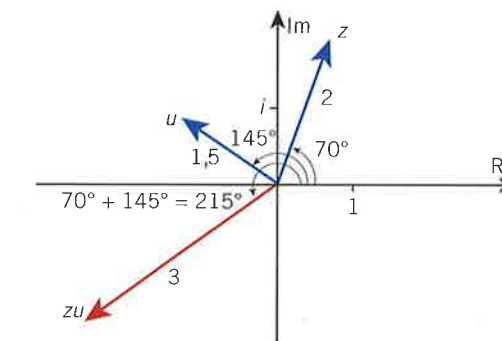
Låt $z = 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ och $u = 1,5(\cos 145^\circ + i \sin 145^\circ)$.

a) Beräkna $z \cdot u$ och tolka resultatet grafiskt.

b) Beräkna $z \cdot \bar{z}$

a) Beloppen multipliceras och argumenten adderas.

$$\begin{aligned} z \cdot u &= 2 \cdot 1,5 (\cos(70^\circ + 145^\circ) + i \sin(70^\circ + 145^\circ)) = \\ &= 3(\cos 215^\circ + i \sin 215^\circ) \end{aligned}$$



b) $z = 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$

$$\bar{z} = 2(\cos(-70^\circ) + i \sin(-70^\circ)) = 2(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ)$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= 2 \cdot 2 (\cos(70^\circ + 290^\circ) + i \sin(70^\circ + 290^\circ)) = \\ &= 4(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \end{aligned}$$

4237

Beräkna kvoten $\frac{z_1}{z_2}$ respektive $\frac{z_2}{z_1}$ då

a) $z_1 = 4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$ ($0 \leq \arg z \leq 360^\circ$)

b) $z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ($-\pi \leq \arg z \leq \pi$)

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)}{2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)} = \frac{4}{2}(\cos(80^\circ - 35^\circ) + i \sin(80^\circ - 35^\circ)) = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)}{4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)} = \frac{2}{4}(\cos(35^\circ - 80^\circ) + i \sin(35^\circ - 80^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

4238

Skriv $z = (\sqrt{3} + i)(2 + 2i)$ på polär form, utan att först skriva z på formen $a + bi$

Enligt regeln för multiplikation av absolutbelopp blir

$$|z| = |\sqrt{3} + i| \cdot |2 + 2i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$

$\arg(\sqrt{3} + i)$ får vi fram genom $\tan v = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{6}$

$\arg(2 + 2i)$ får vi fram genom $\tan v = \frac{2}{2} \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{4}$

Enligt regeln för multiplikation av argument blir $\arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

Svar: $z = 2\sqrt{8}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$

Obs! Rita gärna i det komplexa talplanet för att få fram argumenten.

4239 Talen $z_1 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ och $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ är givna. Bestäm

a) $|z_1 \cdot z_2|$ c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

b) $\arg(z_1 \cdot z_2)$ d) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

4240 Talen $z_1 = 12\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ och

$z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ är givna. Bestäm

a) $|z_1 \cdot z_2|$ c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

b) $\arg(z_1 \cdot z_2)$ d) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

4241 Beräkna produkten av de komplexa talen

$z = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ och

$u = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

Svara på polär form.

4242 Talen $z = 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ och

$u = 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ är givna.

Bestäm kvoterna $\frac{z}{u}$ och $\frac{u}{z}$

4243 Utför multiplikationen och svara i polär form.

a) $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

b) $5\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

4244 Utför multiplikationen och svara på formen $a + bi$.

a) $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

b) $5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

4245 Beräkna och svara i polär form

$$\frac{\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ}{\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ}$$

4246 Talen z och w har absolutbeloppen 3

respektive 2 och argumenten

$\frac{2\pi}{3}$ respektive $\frac{\pi}{3}$

Beräkna absolutbelopp och argument till

a) $z \cdot w$ b) $\frac{z}{w}$ c) $z^2 \cdot w$

4247 Talen $z = 5(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ och $u = 2(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ är givna.

Beräkna kvoten och svara i polär form

a) $\frac{1}{z}$ b) $\frac{1}{u}$ c) $\frac{z}{u}$ d) $\frac{z}{z}$

4248 Man vet att $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$

Beräkna

a) z^2 b) z^3 c) z^4 d) z^5

4249 Man vet att $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

Beräkna och svara på formen $a + bi$

a) z^2 b) z^4 c) z^6 d) z^8

4250 Skriv talet $\frac{(2+2i)(1+\sqrt{3}i)}{3i(\sqrt{12}-2i)}$ på polär form.

4251 Vilket är det minsta positiva heltal n för

vilket z^n är reellt, om

a) $z = 4(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

b) $z = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

c) $z = 2(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$

4252 Bestäm det reella talet k så att

$z = \frac{2-3i}{1+ki}$ har $\arg z = 0$

4253 Bestäm $\arg\left(\frac{i}{1 + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{1+i}}\right)$

Avläsa och rita i det komplexa talplanet

För talet i gäller $|i| = 1$ och $\arg i = \frac{\pi}{2}$

I polär form kan talet i skrivas

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

Exempel 1 Vi multiplicerar $z = \cos v + i \sin v$ med i .

$$iz = \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)$$

multiplikation med i

Multipliceras ett tal z med talet i blir

absolutbeloppet oförändrat och argumentet ökar med $\frac{\pi}{2}$. Grafiskt innebär det att vektorn z vrids 90° i positiv riktning.

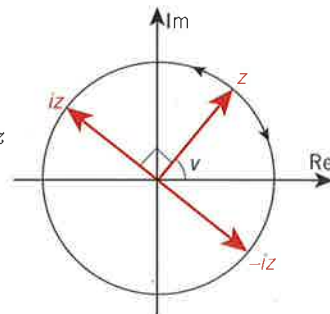
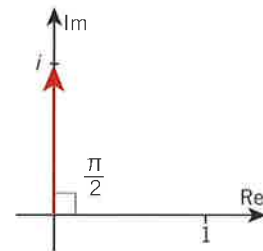
Exempel 2 Vi dividerar $z = \cos v + i \sin v$ med i .

$$\frac{z}{i} = \frac{i \cdot z}{i \cdot i} = \frac{iz}{i^2} = -iz = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$$

Obs! Division med i ger samma resultat som multiplikation med $-i$.

division med i

Divideras ett tal z med talet i blir absolutbeloppet oförändrat och argumentet minskar med $\frac{\pi}{2}$. Grafiskt innebär det att vektorn z vrids 90° i negativ riktning.



4254 Figuren visar det komplexa talet z .

a) Bestäm $w_1 = iz$

b) Bestäm $w_2 = iz + 5 + 4i$

c) Markera z , w_1 och w_2 i ett talplan.

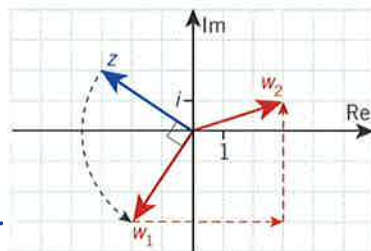
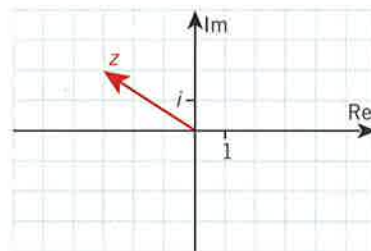
a) $z = -3 + 2i$ (ur figuren)

$$w_1 = iz = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$$

b) $w_2 = -2 - 3i + 5 + 4i = 3 + i$

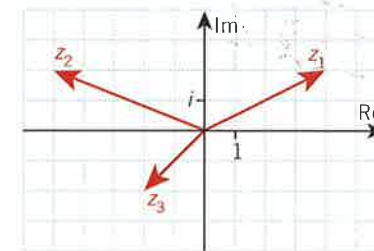
c) Se figur.

Vektorn w_1 får vi genom att vrida z 90° i positiv riktning. Vektorn w_2 får vi genom att utgå från w_1 och gå 5 enheter åt höger i x-led och 4 enheter uppåt i y-led.



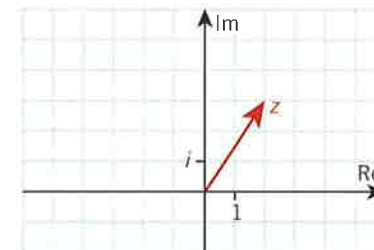
4255 Skriv talen z_1 , z_2 och z_3 på formen $a + bi$.

a

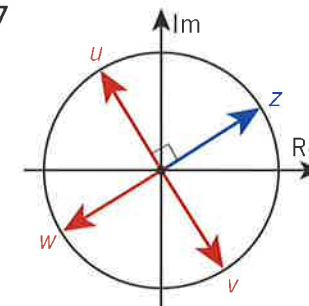


4256 Figuren visar det komplexa talet z . Rita av figuren och markera de komplexa talen

$$w_1 = z + 3 - 2i \text{ och } w_2 = iz - 2 + 3i$$



4257



Vilken vektor i figuren kan skrivas

a) iz b) z/i c) $-iz$ d) i^2z ?

Motivera.

4258 Rita i det komplexa talplanet talen

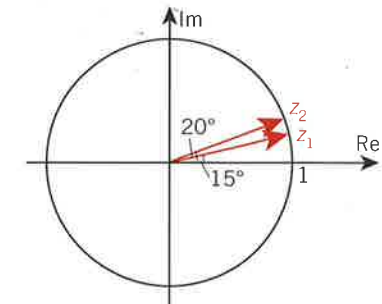
$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = z_1 \cdot i$$

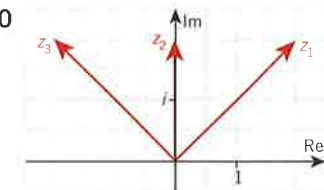
$$z_3 = \frac{z_1}{i}$$

4259 Talen z_1 och z_2 ligger på enhetscirkeln som figuren visar. Vinkeln mellan motsvarande vektorer är 5° . Bestäm vinkeln mellan de vektorer som svarar mot $f(z_1)$ och $f(z_2)$ om

a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = z^5$

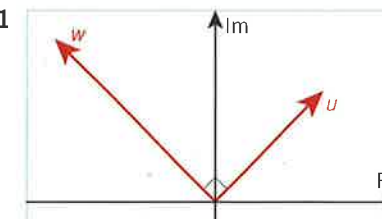


4260



Figuren visar tre komplexa tal. Rita en ny figur och markera där $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ och $w_3 = f(z_3)$, om $f(z) = z^2$

4261



Bestäm z så att $z \cdot u = w$, om $|u| = 2$ och $|w| = 3$ och vinkeln mellan vektorerna u och w är rät.

4262 a) Skriv talet $9i$ på polär form.

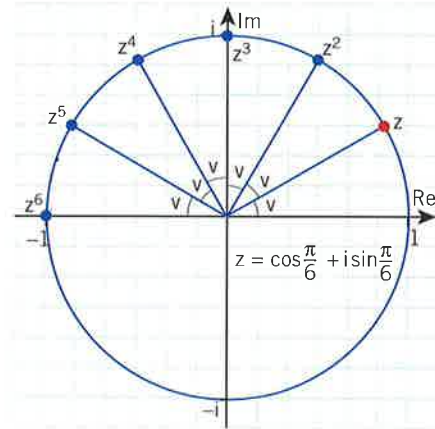
b

Rita figur och bestäm geometriskt de tal z som är sådana att $z \cdot z = 9i$

4263 Markera i ett komplext talplan de tal z för vilka gäller att $|z| = \operatorname{Im} z + 1$

4.3 Komplexa tal i potensform

de Moivres formel



Vi vet att ett komplext tal z som har absolutbeloppet 1 kan skrivas

$$z = \cos v + i \sin v$$

För att beräkna potenserna $z^2, z^3, z^4, z^5 \dots$

använder vi formeln för multiplikation av komplexa tal i polär form.

Argumenten adderas vid multiplikation.

$$z^2 = (\cos v + i \sin v)^2 = (\cos v + i \sin v)(\cos v + i \sin v) = \cos 2v + i \sin 2v$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (\cos 2v + i \sin 2v)(\cos v + i \sin v) = \cos 3v + i \sin 3v$$

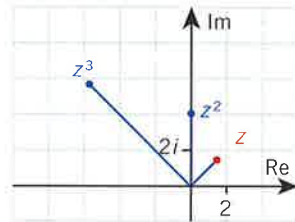
$$z^4 = \cos 4v + i \sin 4v$$

$$z^5 = \cos 5v + i \sin 5v$$

...

$$z^n = \cos nv + i \sin nv \text{ för } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Exempel Vi beräknar z^2 och z^3 om $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$



$$z^2 = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2^2\left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$z^3 = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = 2^3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

Med hjälp av formeln för multiplikation av komplexa tal i polär form har vi härlett följande viktiga formel

För ett komplext tal $z = r(\cos v + i \sin v)$, där $r = |z|$ och $v = \arg z$ gäller

$$z^n = (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n (\cos nv + i \sin nv)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

de Moivres formel



Matematikern Abraham de Moivre (1667–1754) från Frankrike kände till denna formel som bär hans namn redan 1707.

4301

Förenkla $(1 + i\sqrt{3})^{15}$ med de Moivres formel.

Vi går över till polär form.

$$1 + i\sqrt{3} = r(\cos v + i \sin v)$$

$$\tan v = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow v = 60^\circ$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

de Moivres formel ger:

$$(1 + i\sqrt{3})^{15} = (2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ))^{15} = 2^{15}(\cos 900^\circ + i \sin 900^\circ) = 32768(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -32768$$

$$\text{Svar: } (1 + i\sqrt{3})^{15} = -32768$$

$$15 \cdot 60^\circ = 900^\circ$$

$$900^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

4302

Skriv det komplexa talet $z = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^8$ på formen $a + bi$. Svara exakt.

de Moivres formel ger

$$z = 2^8\left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}\right) = 256\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 256\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 128(-1 + i\sqrt{3})$$

$$\text{Svar: } z = 128(-1 + i\sqrt{3})$$

Vi skriver om till en vinkel i intervallet 0 till 2π . $\frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

4303

Utveckla $(\cos y + i \sin y)^2$ dels med de Moivres formel, dels med kvadreringsregeln. Vilken formel ger detta för

a) $\cos 2y$ b) $\sin 2y$?

$$\text{de Moivres formel ger } (\cos y + i \sin y)^2 = \cos 2y + i \sin 2y$$

$$\text{Kvadreringsregeln ger } (\cos y + i \sin y)^2 = \cos^2 y + 2i \sin y \cos y - \sin^2 y$$

$$\text{Vi får } \cos 2y + i \sin 2y = \cos^2 y + 2i \sin y \cos y - \sin^2 y$$

a) Realdelen i VL = realdelen i HL, vilket ger

$$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$$

b) Imaginärdelen i VL = imaginärdelen i HL, vilket ger

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y$$

4304 Bestäm z^4 på formen $a + bi$, om

a a) $z = 5 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

b) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

4305 Talet $z = -1 + \sqrt{3}i$ är givet.

a) Skriv z i polär form.

b) Bestäm z^5 i polär form.

c) Bestäm z^5 på formen $a + bi$.
Svara exakt.

4306 Beräkna $(2 + 2\sqrt{3}i)^4$ genom att

a) utveckla $((2 + 2\sqrt{3}i)^2)^2$

b) använda de Moivres formel.

4307 Förenkla med de Moivres formel

a) $(\sqrt{3} - i)^6$ b) $(2 - 2i)^5$

4308 Rita i ett komplext talplan potenserna

$z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$ och z^7 om

a) $z = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$

b) $z = \cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right)$

4309 Bestäm ett komplext tal z så att

b $z^4 = 16 (\cos \pi + i \sin \pi)$

4310 Beräkna $z = (1 + i)^n + (1 - i)^n$ för

a) $n = 1$ c) $n = 3$

b) $n = 2$ d) $n = 4$

4311 Ekvationen $z^6 = w$ har en lösning

$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Bestäm det komplexa talet w .

4312 Bestäm absolutbeloppet och argumentet i radianer för det komplexa talet z .

a) $z = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^6}{(1 - i)^9}$ b) $z = \frac{(1 + 2i)^{12}}{(1 - 2i)^9}$

4313 Bestäm det minsta positiva heltal n sådant att uttrycket är reellt

a) $(-1 + i)^n$ b) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^n$

4314 Rita i ett komplext talplan potenserna

$z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$ och z^7 om

a) $z = 1,1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

b) $z = 0,9 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

4315 Härled en formel för

c a) $\sin 3v$ uttryckt i $\sin v$

b) $\cos 3v$ uttryckt i $\cos v$

4316 Härled en formel för

a) $\sin 5v$ uttryckt i $\sin v$

b) $\cos 5v$ uttryckt i $\cos v$

4317 Låt $z = \cos v + i \sin v$ och förenkla

uttrycket $w = z^n + \frac{1}{z^n}$

Ekvationen $z^n = a$

Vi ska nu behandla ekvationen $z^n = a$, där n är ett positivt heltal och a är ett givet komplext tal. Att lösa en sådan ekvation innebär att bestämma alla n :te rötter ur a . För att lösa ekvationen kommer vi att utnyttja den polära representationen av komplexa tal och de Moivres formel.

4318

a) Lös ekvationen $z^3 = 8i$. Svara på formen $a + bi$.

b) Rita in rötterna i ett komplext talplan.

a) $z^3 = 8i$

Vi skriver ekvationens båda led på polär form.

$z = r (\cos v + i \sin v)$

VL: $z^3 = r^3 (\cos 3v + i \sin 3v)$ de Moivres formel

HL: $8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

Ekvationen kan skrivas

$r^3 (\cos 3v + i \sin 3v) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

De båda leden är lika, om

$r^3 = 8$ och $3v = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, dvs om

$r = 2$ och $v = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

De tre sökta rötterna får vi för $n = 0$, $n = 1$ och $n = 2$.

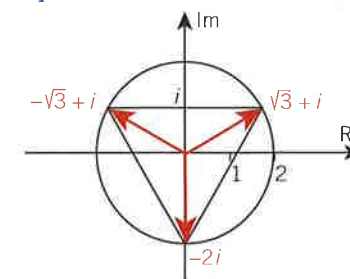
$n = 0$ ger $v = \frac{\pi}{6}$ och $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i$

$n = 1$ ger $v = \frac{5\pi}{6}$ och $z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$

$n = 2$ ger $v = \frac{3\pi}{2}$ och $z_3 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$

(Sätter vi $n = 3$ får vi åter roten z_1 , osv)

Svar: $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \\ z_3 = -2i \end{cases}$



Rötterna ligger på en cirkel med radien 2. De delar omkretsen i tre lika stora delar och utgör hörnen i en liksidig triangel.

Geometrisk tolkning

Rötterna till ekvationen $z^n = w$ i det komplexa talplanet utgör hörn i en regelbunden n -hörning med medelpunkten i origo.

4319 Ekvationen $z^5 = -32$ är given.

- a) Skriv om ekvationen på polär form.
b) Formulera villkoren för att de båda leden är lika.
c) Ange ekvationens rötter.
d) Rita in rötterna i ett komplext talplan.

4320 Bestäm samtliga tredjerötter ur

- a) 64, dvs lös ekvationen $z^3 = 64$
b) $-27i$, dvs lös ekvationen $z^3 = -27i$
(Svara på formen $a + bi$)

4321 Ekvationen $z^3 = w$ har en rot $z_1 = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

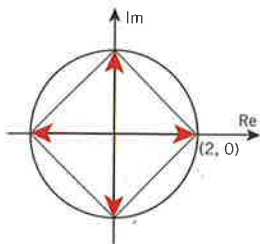
- a) Bestäm w .
b) Beskriv och motivera hur du får övriga rötter.
c) Vilka är övriga rötter?
d) Rita in rötterna i ett komplext talplan.

4322 Ekvationen $z^4 = w$ har en rot

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

Vilka är de övriga rötterna?

4323 Figuren visar rötterna till en ekvation $z^n = w$.



- a) Vilka är rötterna?
b) Vilken ekvation är det?
Motivera ditt svar.

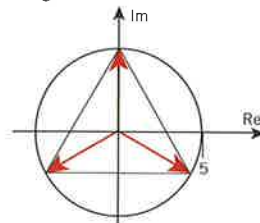
4324 Lös ekvationen och svara i polär form med argumentet i radianer.

- a) $z^3 = 1$ d) $z^6 = 729$
b) $z^5 = -1$ e) $z^4 + 16 = 0$
c) $z^4 = i$ f) $z^3 = (1 + i)^2$

4325 a) Skriv talet $4i$ i polär form med argumentet i grader.

- b) Lös ekvationen $z^2 = 4i$.
c) Åskådliggör grafiskt talet $4i$ och de båda rötterna.

4326 Rötterna till ekvationen $z^n = w$ visas i figuren. Vilken är ekvationen?



4327 Hur många reella och hur många icke-reella rötter har ekvationen

- a) $z^4 = 16$ c) $z^9 = -4$
b) $z^5 = 32$ d) $z^{100} = 1000$

(Ekvationerna ska inte lösas.)

4328 Skriv en potensekvation av typen $z^n = w$ som har 10 rötter, varav en är $z = -i$.

4329 Lös ekvationen $z^2 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} - i}$

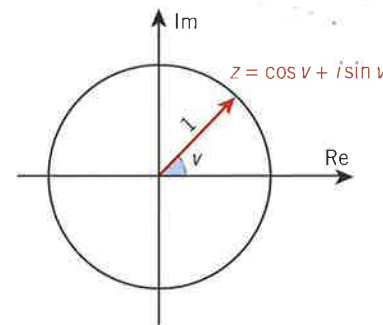
4330 Betrakta ekvationen $z^{17} = 1$

- a) Hur många komplexa rötter har den?
b) Hur många av rötterna ligger i andra kvadranten?

4331 Skriv en formel som ger samtliga n rötter till ekvationen $z^n = 5i$.

Eulers formel

Ett komplext tal z som ligger på en cirkel med medelpunkten i origo och radien 1 kan skrivas $z = \cos v + i \sin v$.



Det visar sig att uttrycket $\cos v + i \sin v$ kan skrivas på ett kompakt och något förvånande sätt!

Vi antar att vanliga deriveringsregler gäller.

$$z = \cos v + i \sin v \quad (1)$$

$$z' = -\sin v + i \cos v = i \cos v + (-1) \sin v = i \cos v + i^2 \sin v = i(\cos v + i \sin v) = iz$$

$$z' = iz$$

$$\text{Denna differentialekvation har lösningen } z = C \cdot e^{iv} \quad (2)$$

Vi kontrollerar lösningen:

$$z = C \cdot e^{iv}$$

$$z' = iC \cdot e^{iv} = iz$$

$$z(0) = 1 \text{ ger } C = 1$$

$v = 0$ insatt i ekvation (1) ger $z(0) = 1$, vilket insatt i ekvation (2) ger $C = 1$

$$z = e^{iv}$$

Sambandet upptäcktes på 1700-talet av matematikern Leonard Euler och kallas *Eulers formel*:

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

Eulers formel

Den polära formen kan nu om vi så vill skrivas lite kortare

$$z = r(\cos v + i \sin v) = re^{iv}$$

Om $z = x + iy$ så är

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

4332 Skriv på formen $a + bi$

a) $e^{\frac{3\pi}{4}i}$ b) e^{2-3i}

Definitionen $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ger

a) $e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $e^{2-3i} = e^2 \cdot e^{-3i} = e^2 (\cos(-3) + i \sin(-3)) = e^2 (\cos 3 - i \sin 3) = e^2 \cos 3 - i e^2 \sin 3 \approx -7,32 - 1,04i$

4333 Finn något värde på z sådant att $e^z = -2$.

Med $z = x + iy$ kan ekvationen skrivas $e^x \cdot e^{iy} = 2 \cdot e^{i\pi}$

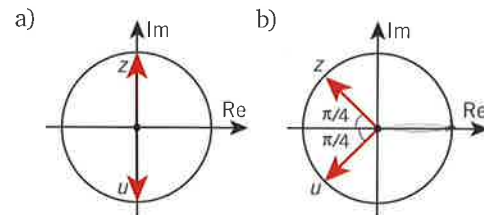
De båda leden är lika om $e^x = 2$ och $y = \pi + n \cdot 2\pi$

$e^x = 2$ ger $x = \ln 2$ och $n = 0$ ger $y = \pi$

En lösning till ekvationen är $z = \ln 2 + \pi i$

4334 Figuren visar en cirkel med radien 5.

a) Skriv talen z och u på formen $r \cdot e^{iv}$, $0 \leq v < 2\pi$



4335 Skriv med Eulers formel

a) i b) -2 c) $-3i$ d) $1 + i$

4336 Skriv på formen $a + bi$

a) $e^{\pi i}$ b) $e^{2\pi i}$ c) $e^{-3+\frac{\pi}{3}i}$ d) e^{1+i}

4337 Bestäm $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ om

$z = 6 \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}$

4338 Ekvationen $z^3 = -i$ har en rot $z = i$.

a) Verifiera detta.

b) Ange samtliga rötter på formen $r \cdot e^{iv}$

4339 Skriv talet $\sqrt{3} + i$ på formen

b) a) re^{iy} b) e^z

4340 Undersök om din räknare kan räkna med komplexa tal på formen $r \cdot e^{iv}$. Beräkna sedan

a) $3e^{i\pi/3} \cdot 5e^{i\pi/5}$ b) $(7e^{i\pi/4})^{12}$

4341 Exponentialfunktionen e^z skrivs ofta $\exp(z)$. Visa att

a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$

b) $\exp\left(\frac{2 + \pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}} (1 + i)$

4342 Bestäm alla z sådana att

a) $e^z = i$ b) $e^z = 1 + i$

4343 Bevisa följande formler av Euler, där v är ett reellt tal.

a) $\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \cos v$ b) $\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \sin v$

Historik

Euler – en produktiv matematiker

Leonard Euler (1707–1783) var en matematiker från Schweiz som var mycket produktiv. Han skrev över 900 artiklar och trots att han under de senaste 17 åren av sitt liv var blind fortsatte han att producera ny matematik. Euler var elev till Johann Bernoulli (1667–1748), som är en annan känd matematiker från Schweiz.

Ett av Eulers mest kända verk heter "Introductio in analysin infinitorum" som utkom 1748. I detta verk definierar Euler begreppet funktion av en variabel och introducerar många beteckningar inom matematiken som används fortfarande idag, t ex e , π , $\sin$ och $\cos$. Det var även Euler som införde beteckningen i för $\sqrt{-1}$, men det var inte förrän 1777.

Vi har på sidan 209 presenterat Eulers formel

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

som är ett samband mellan de trigonometriska funktionerna och exponentialfunktionen. Vi vet sedan tidigare att argumenten för komplexa tal adderas vid multiplikation och subtraheras vid division. Detta gäller även för komplexa tal uttryckta som exponentialuttryck:

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha-i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$(e^{i\alpha})^n = e^{ina}$$



Den sista formeln känner vi igen som de Moivres formel (n är ett heltal).

Ur Eulers formel följer en av de mest berömda formlerna inom matematiken

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

som i en omröstning i en matematisk tidskrift blev utsedd till världens vackraste formel. Det fantastiska med formeln är att den inkluderar så många olika delar av matematiken: e från analysen, π från geometrin, i från komplexa talen och 1 från aritmetiken.

Euler levde under en tid då matematiken ännu inte var helt rigorös, t ex var inte alla begrepp inom analysen klart definierade. Definitionerna av vissa begrepp kunde vara vaga och ibland skilja sig åt mellan olika matematiker. Analysens grundvalar behövde en upprustning men det skulle dröja en bit in på 1800-talet innan man fick ordning på detta. Dessförinnan kunde man råka ut för problem när man räknade, exempelvis kom Euler fram till följande "bevis" när han försökte få förståelse för de komplexa talen

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Idag kan vi förklara felet med detta "bevis", kan du det?

1 Förklara felet ovan där man "bevisat" att $-1 = 1$.

2 Förklara varför $e^{i\pi} + 1 = 0$ är en följd av Eulers formel.

3 Om $u = 4e^{i\pi/6}$ och $v = 2e^{i\pi/3}$, beräkna

a) $u \cdot v$ b) $\frac{u}{v}$ c) u^2

4 Om $z = e^{i\pi/4}$ rita z , z^2 , z^3 och z^8 i det komplexa talplanet.

5 Om $z = 2e^{i\pi/3}$ och $u = 3e^{i\pi/6}$, vad är då

a) $z\bar{u}$ b) $\frac{u^3}{z^2}$?

6 Förenkla och skriv på formen $a + bi$

a) $e^{1-i} \cdot e^{2+2i}$ b) $\frac{e^{2+\pi i/2}}{e^{1-\pi i/4}}$

7 Visa att $e^{2+\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}e^2(1 + i\sqrt{3})$

8 Hur kan man ge ett rimligt värde åt

a) $\cos i$ b) $\sin i$ c) $\ln i$ d) i^i ?

4.4 Polynomekvationer

Andragradsekvationer

De andragradsekvationer som vi hittills har löst har varit på formen $z^2 + pz + q = 0$ där p och q har varit reella tal.

Ekvationens lösning är $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Om uttrycket under rottecknet är negativt är rötterna komplexa tal.
Rötterna är *konjugerade tal*, dvs om $z_1 = a + bi$ är den ena roten så är $z_2 = a - bi$ den andra.

Vi ska nu titta närmare på andragradsekvationer där p och q kan vara komplexa tal.

Exempel 1 Hur löser vi ekvationen $z^2 + 4iz + 5 = 0$?

I det här fallet är p ett komplext tal och q ett reellt tal.

Detta är det enklaste fallet där vi kan använda pq -formeln "som vanligt".

$$z = -2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 5} = -2i \pm \sqrt{-4 - 5}$$

$$z = -2i \pm 3i$$

$$z_1 = i \quad z_2 = -5i$$

Exempel 2 Hur löser vi ekvationen $z^2 = 5i$?

I det här fallet är $p = 0$ och q ett komplext tal.

Vi får inte en lösning genom att dra kvadratroten ur båda leden, eftersom detta ger $z = \pm \sqrt{5i}$ och rotlagarna inte gäller för icke-reella tal. Vi visar två olika metoder för att lösa ekvationen.

Metod 1

$$z^2 = 5i$$

Vi skriver båda leden på polär form och använder de Moivres formel.

$$VL = z^2 = r^2 (\cos \nu + i \sin \nu) = r^2 (\cos 2\nu + i \sin 2\nu)$$

$$HL = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$VL = HL \text{ ger } r^2 = 5 \text{ och } 2\nu = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$r = \sqrt{5} \ (r > 0) \text{ och } \nu = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Vi får rötterna genom att sätta $n = 0$ och $n = 1$

$$z_1 = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} (1 + i)$$

$$z_2 = \sqrt{5} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{5} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{\frac{5}{2}} (1 + i)$$

Metod 2

$$z^2 = 5i$$

Antag att $z = a + bi$ där a och b är reella tal.

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

Ekvationen $z^2 = 5i$ kan nu skrivas

$$a^2 - b^2 + 2iab = 5i$$

Vi identifierar realdelar och imaginärdelar i VL och HL och får då ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = 5 & (2) \end{cases}$$

Vi löser ekvationssystemet på följande sätt:

Ur (2) löser vi ut $b = \frac{5}{2a}$ och sätter in i (1):

Detta går bra eftersom (2) ger att $a \neq 0$

$$a^2 - \frac{25}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow 4a^4 - 25 = 0 \Leftrightarrow a^4 = \frac{25}{4}$$

Vi skriver om den sista ekvationen som

$$(a^2)^2 = \frac{25}{4}$$

vilket ger

$$a^2 = \pm \frac{5}{2}$$

Här gäller inte minustecknet eftersom a är ett reellt tal.

$$\text{Vi får } a = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Vi använder nu att $b^2 = a^2$ och $ab > 0$ (enligt (2)) och får

$$a = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ ger } b = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ ger } b = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

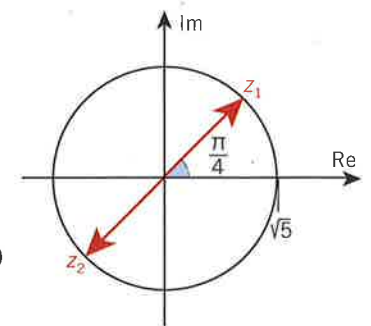
Rötterna är

$$z_1 = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} (1 + i)$$

$$z_2 = \sqrt{5} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{\frac{5}{2}} (1 + i)$$

Observera att $z_1 = -z_2$

Rötterna ligger på en cirkel med radien $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$
De delar omkretsen i två lika stora delar.



Vi sammanfattar:

Andragradsekvationen $z^2 + pz + q = 0$ löses på följande sätt om

- q och p är reella tal och rötterna är icke-reella tal

$$\text{T ex } x^2 - 4x + 5 = 0$$

Använd pq -formeln och $i^2 = -1$

Rötterna är konjugerade tal: $z_2 = \bar{z}_1$

- q är ett reellt tal och p är ett komplext tal

$$\text{T ex } z^2 + 2iz + 7 = 0$$

Använd pq -formel och $i^2 = -1$

- q är ett icke-reellt tal och $p = 0$

$$\text{T ex } z^2 = 2i$$

Skriv om på polär form och använd de Moivres formel eller skriv $z = a + bi$ och identifiera real- respektive imaginärdelar.

För rötterna gäller: $z_2 = -z_1$

- q är ett icke-reellt tal och p är ett komplext tal

$$\text{T ex } z^2 + 2iz - 4i = 0 \text{ och } z^2 + 2z - 4i = 0$$

Dessa fall kan vi inte helt bemästra ännu, men i vissa fall fungerar det att kvadratkomplettera under rotuttrycket.

4401

Lös ekvationen

$$\text{a) } x^2 - 8x + 17 = 0$$

$$\text{b) } x^2 + 4ix + 5 = 0$$

$$\text{a) } x^2 - 8x + 17 = 0$$

$$\text{b) } x^2 + 4ix + 5 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 17}$$

$$x = -2i \pm \sqrt{-4 - 5}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{-1}$$

$$x = -2i \pm 3i$$

$$x = 4 \pm i$$

$$x_1 = i \quad x_2 = -5i$$

4402

Skriv en andragradsekvation med reella koefficienter som har en rot $3 + i$.

Rötterna är konjugerade tal. Den andra roten är $3 - i$.

Rötterna $3 + i$ och $3 - i$ ger oss ekvationen

$$(z - (3 + i))(z - (3 - i)) = 0$$

$$z^2 - z(3 - i) - z(3 + i) + (3 + i)(3 - i) = 0$$

$$z^2 - 3z + zi - 3z - zi + 3^2 - i^2 = 0$$

$$z^2 - 6z + 10 = 0$$

Lös följande ekvationer

$$\text{4403 a) } x^2 = 25 \quad \text{d) } x^2 = 50$$

$$\text{a) } x^2 = -25 \quad \text{e) } x^2 = 4$$

$$\text{c) } x^2 = -50 \quad \text{f) } x^2 + 4 = 0$$

$$\text{4404 a) } x^2 - 8x + 25 = 0 \quad \text{c) } x^2 - 10x + 29 = 0$$

$$\text{b) } x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \text{d) } x^2 + 4x + 29 = 0$$

4405 Skriv en andragradsekvation som har rötterna 3 och $3i$.

4406 Lös ekvationen

$$\text{a) } x^2 + 2ix + 3 = 0 \quad \text{c) } 2x^2 + 3ix + 2 = 0$$

$$\text{b) } x^2 + ix + 2 = 0 \quad \text{d) } 2x^2 + 8ix + 24 = 0$$

4407 Ekvationen $z^2 - 2z + 26 = 0$ har en rot $z = 1 + 5i$. Vilken är den andra roten?

4408 Per och Stina ska lösa ekvationen $z^2 + 4iz + 5 = 0$. De vet att ekvationen har en rot $z = -5i$. Per säger direkt: Den andra roten är $5i$. Stina säger efter en stund: Den andra roten är i . Vad säger du?

4409 Bestäm i polär form de båda kvadrat-rötterna ur det komplexa talet w , om

$$\text{a) } w = 16 e^{i\pi/2}$$

$$\text{b) } w = 25 (\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$$

$$\text{c) } w = 10 (\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$$

$$\text{d) } w = 9 e^{i2\pi/3}$$

4410 Skriv en andragradsekvation med reella koefficienter som har en rot $5 + 2i$.

4411 Låt $p(z) = z^2 - 8z + q$, där q är ett reellt tal.

a) Vilket är det minsta heltal q för vilket ekvationen har icke-reella rötter?

b) Vilka rötter ger talet q i a)?

4412 Lös ekvationen på två olika sätt och svara på formen $a + bi$

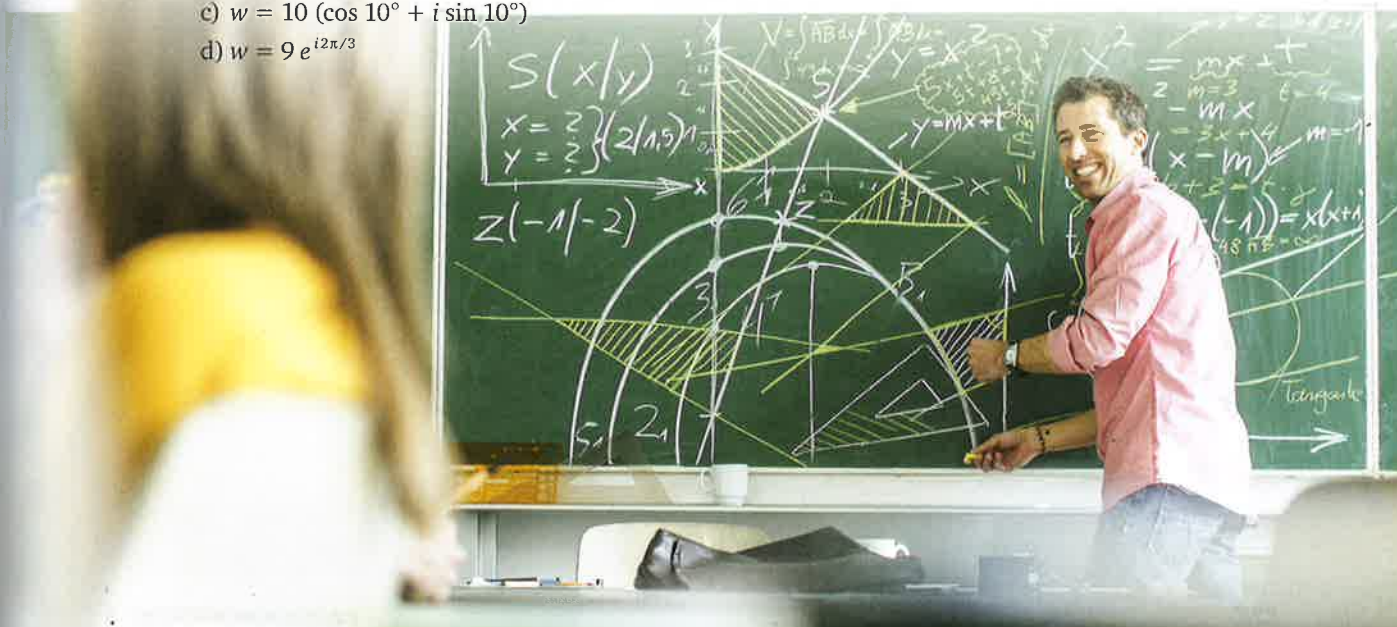
$$\text{a) } z^2 = 2i \quad \text{b) } z^2 = -4i$$

4413 Lös ekvationen $z^2 + (4 - 2i)z - 8i = 0$ med pq -formeln genom att kvadratkomplettera under rotuttrycket.

4414 a) Lös ekvationen $z^2 - 20z + 109 = 0$ och beräkna rötternas summa och produkt.

b) Lös ekvationen $z^2 + pz + q = 0$ och beräkna rötternas summa och produkt.

4415 Lös ekvationen $z^2 = 5 - 12i$ utan att använda de Moivres formel.



Polynomdivision

Ekvationen $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$ kan vi lösa med kända metoder.
Faktorisering: $x(x^2 + 4x - 5) = 0$
Nollproduktmetoden och pq -formeln:
 $x_1 = 0$ och $x^2 + 4x - 5 = 0$ ger $x_2 = -5$ $x_3 = 1$

Andra polynomekvationer av tredje graden kan vi lösa om vi "hittar" en rot
tex genom prövning.

Exempel 1 Ekvationen $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ har en rot, $x = 1$.
Vi kan finna denna rot genom prövning.
Ekvationen kan skrivas $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$.
Kontrollera detta genom att utföra multiplikationen.
Men hur hittar vi faktorn $(x^2 - 4)$?

Sambandet $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1) \cdot (x^2 + 4)$ kan skrivas

$$\frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x - 1} = x^2 + 4$$

Vi ser att $x^2 + 4$ är resultatet av en division, men hur utför vi en
polynomdivision?

Vi visar en metod för division som brukar kallas "liggande stolen", först
med två tal och sedan med två polynom.

Exempel 2 Vid divisionen $\frac{74}{3}$ skrivs talen på följande sätt $74 \overline{) 3}$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 74 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 14 \\ -12 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2 \cdot 3 = 6) \\ (4 \cdot 3 = 12) \end{array}$$

Resultatet kan skrivas på olika sätt

$$\frac{74}{3} = 24 \frac{2}{3} = 24 + \frac{2}{3}$$

Kvot Rest

$$74 = 3 \cdot 24 + 2$$

Exempel 3 Vi utför divisionen $\frac{2x^3 - 3x^2 - 27}{x - 3}$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 9 \\ 2x^3 - 3x^2 + 0x - 27 \overline{) x - 3} \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline 3x^2 + 0x - 27 \\ -(3x^2 - 9x) \\ \hline 9x - 27 \\ -(9x - 27) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2$$

$$3x \cdot (x - 3) = 3x^2 - 9x$$

$$9 \cdot (x - 3) = 9x - 27$$

Resultatet kan skrivas på två olika sätt

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 27}{x - 3} = 2x^2 + 3x + 9$$

Kvot

Resten är noll i detta fall.

$$2x^3 - 3x^2 - 27 = (x - 3)(2x^2 + 3x + 9)$$

4416

Utför divisionen $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 9}{x - 2}$

Ange kvoten och en eventuell rest.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^3 + 3x^2 - 4x - 9 \overline{) x - 2} \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 5x^2 - 4x - 9 \\ -(5x^2 - 10x) \\ \hline 6x - 9 \\ -(6x - 12) \\ \hline 3 \end{array}$$

Kvoten är $x^2 + 5x + 6$ och resten är 3.

4417 Utför divisionen med "liggande stolen"

a) $\frac{261}{3}$ b) $\frac{1\,169}{7}$

4418 Utför divisionen för hand.

Ange kvoten och en eventuell rest.

a) $\frac{563}{9}$ b) $\frac{8\,252}{7}$

4419 Utför polynomdivisionen

a) $\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x + 2}$

b) $\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x + 1}$

4420 Dividera polynomet med $x - 1$ samt ange kvoten och resten.

a) $7x^2 + x - 8$ b) $4x^3 - 3x^2 - 7$

4421 Utför divisionen för hand samt ange kvoten och resten.

a) $(x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x) / (x^2 + 3)$

b) $(x^6 + x^5 + 3x^2 + 1) / (x^2 + x)$

4422 a) Vilket tal ger kvoten 5 och resten 2 när det divideras med 3?

b) Vilket polynom har kvoten $x - 2$ och resten noll när polynomet divideras med $x + 2$?

c) Vilket polynom har kvoten $x^2 + 3$ och resten $x^2 + x$ vid division med $x^3 + 2$?

4423 Bestäm talet k så att resten blir noll då polynomet divideras med $(x + 2)$.

a) $x^2 + 8x + k$ c) $x^4 - 4x^2 - 2x + k$

b) $x^3 + 2x^2 - 3x + k$ d) $x^5 + 4x + k$

4424 Dividera $z^3 + iz + 1 + i$ med $z - i$.



4425 Ekvationen $x^3 - x^2 - 10x - 8$ har en rot $x = 4$. Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ fullständigt.

4426 Ett polynom divideras med $x^3 + 1$. Vilken är den högsta grad resten kan ha? Motivera.

Faktorsatsen

Exempel

I uppgift 4416 visade vi att då polynomet $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 9$ divideras med $x - 2$ blir kvoten $x^2 + 5x + 6$ och resten 3.

Detta kan skrivas

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 9}{x - 2} = x^2 + 5x + 6 + \frac{3}{x - 2}$$

Kvot Rest

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 9 = (x - 2)(x^2 + 5x + 6) + 3$$

Allmänt gäller:

Om polynomet $f(x)$ divideras med $(x - a)$ får vi kvoten $q(x)$ och resten r .

Detta kan skrivas

$$\frac{f(x)}{x - a} = q(x) + \frac{r}{x - a}$$

Kvot Rest

$$f(x) = (x - a)q(x) + r$$

Om vi i den sista likheten sätter $x = a$ får vi

$$f(a) = (a - a)q(a) + r$$

$$f(a) = r$$

Detta resultat formuleras i följande sats

Restsatsen

Om ett polynom $f(x)$ divideras med $x - a$, så blir resten $f(a)$.

När $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 9$ dividerades med $x - 2$ fick vi resten 3.

Restsatsen kan ge oss detta resultat utan en polynomdivision.

$$\text{Resten} = f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 9 = 3$$

Om resten $f(a) = 0$ i ekvationen $f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$ får vi

$f(x) = (x - a)q(x)$, vilket innebär att $(x - a)$ är en faktor i $f(x)$.

Detta resultat formuleras i följande sats

Faktorsatsen

Polynomet $f(x)$ har faktorn $(x - a) \Leftrightarrow x = a$ är en rot till $f(x) = 0$



4427

Visa att polynomet

- a) $f(x) = x^3 + 3x - 14$ har en faktor $x - 2$
 b) $g(x) = x^5 + 32$ har en faktor $x + 2$
 c) $h(x) = x^3 - 20x + 35$ ger resten 10 vid division med $x + 5$
- a) $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 0$ och $f(x)$ har en faktor $x - 2$ enligt faktorsatsen.
 b) Lägg märke till att $x + 2 = x - (-2)$
 $g(-2) = (-2)^5 + 32 = 0$ och $g(x)$ har en faktor $x - (-2) = x + 2$ enligt faktorsatsen.
 c) $h(-5) = (-5)^3 - 20 \cdot (-5) + 35 = 10$
 Resten är alltså 10 enligt restsatsen.

4428

Vilket tredjegradspolynom $g(x)$ beskriver kurvan?

Vi avläser funktionens nollställen

 $x = 0$, $x = 3$ och $x = 6$.

Polynomet kan skrivas

$$g(x) = k(x - 0)(x - 3)(x - 6)$$

Vi bestämmer k med hjälp av punkten $(1, 5)$

$$g(1) = k \cdot 1 \cdot (1 - 3)(1 - 6) = 5$$

$$k \cdot 10 = 5$$

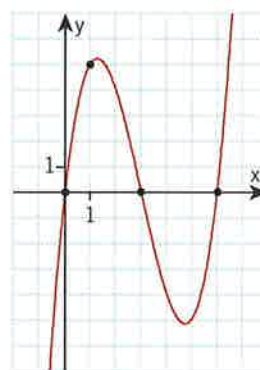
$$k = 0,5$$

Polynomet är

$$g(x) = 0,5x(x - 3)(x - 6)$$

som också kan skrivas

$$g(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 9x$$



4429 a) Vilka rötter har ekvationen

$$(x + 4)(x - 2)(x - 5) = 0?$$

- b) Ställ upp en tredjegradsekvation som har en rot $x = -3$ och en dubbelrot $x = 6$.

4430 Polynomet $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ är givet.

- a) Ange en faktor om $p(1) = 0$.
 b) Ange ett nollställe om $x + 4$ är en faktor.

4431 Sant eller falskt?

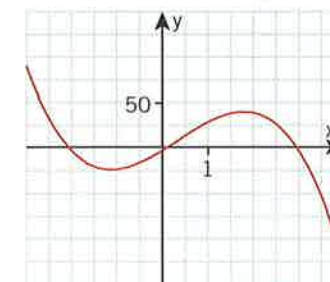
- a) $x^3 - 3x - 2$ är delbart med $x - 2$
 b) $x^3 + x - 2$ har en faktor $x + 1$
 c) Polynomet $f(x) = x^5 + 5x - 1$ ger resten 5 vid division med $x - 1$
 d) Polynomet $g(x) = 3x^4 + 100x^2 + 4000x$ ger resten 0 vid division med $x + 10$

4432 Beräkna resten då polynomet $f(x) = x^3 + x - 2$ delas med

- a) $x - 2$ c) $x + 1$
 b) $x - 1$ d) $x - i$

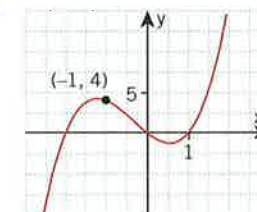
4433 Visa att polynomet

- a) $f(x) = x^5 + 4x - 5$ har en faktor $x - 1$
 b) $g(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + x + 3$ har en faktor $x + 1$
 c) $p(x) = x^7 - 128$ har en faktor $x - 2$
 d) $h(x) = x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 36x + 45$ har en faktor $x + 3$

4434 Är $(x - 3)$ en faktor i polynomet $f(x)$ som beskrivs av kurvan? Motivera.

4435 Vilket tredjegradspolynom beskriver kurvan?

b

4436 a) Beskriv hur man kan använda faktorsatsen för att avgöra om ett polynom är delbart med $x^2 - 4$.b) Vilka av följande polynom är delbara med $x^2 - 4$?

$$p(x) = 2x^3 - 4x$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

$$g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

$$h(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

4437 Visa att polynomet

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ är delbart med $x - 3$ b) $p(x) = x^{47} - 5x^{73} + 4x^{11}$ är delbart med $x + 1$ c) $h(x) = x^2 + 4$ är delbart med $x - 2i$ och $x + 2i$ d) $g(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 34x + 12$ är delbart med minst en av faktorerna $x + 5$, $x - 2$ och $x - 3$ 4438 Bestäm talet k så att polynometa) $3x^3 + x^2 + 2kx + 4$ blir delbart med $x - 1$ b) $x^3 + kx^2 - kx + 9$ får en faktor $x + 3$ c) $x^3 + k^2x^2 - 2kx - 16$ blir delbart med $x - 2$ d) $x^2 - 7x + 12$ får en faktor $x - k$ 4439 För vilka värden på a är $(x - a)$

en faktor till polynomet

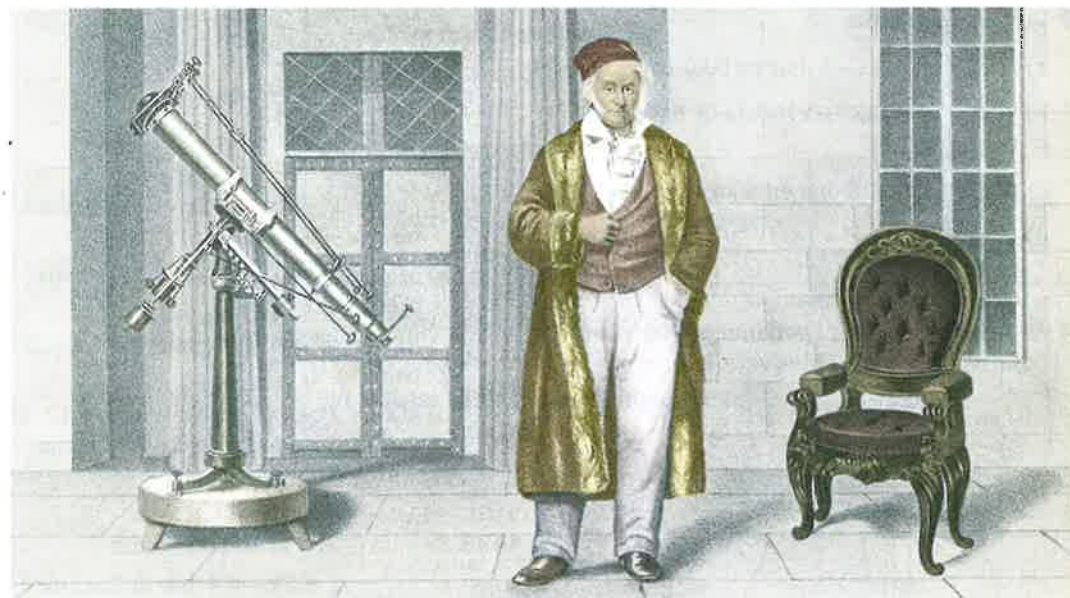
$$a) x^2 - 2ax + 4$$

$$b) x^3 - 6ax^2 + 8a^2x - 3a^3?$$

4440 Vilket tredjegradspolynom ger resten 4 och kvoten $x^2 + 3x + 5$ vid division med $x - 3$?

Historik

Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauss (1777–1855), ofta kallad matematikernas konung, införde benämningen komplexa tal. Han var också en av de första som utvecklade idén med det komplexa talplanet.

Gauss, som var professor i astronomi i Göttingen, gjorde banbrytande insatser inom praktiskt taget alla dåtida områden av ren och tillämpad matematik. Redan som 15-åring upptäckte Gauss att antalet primtal mindre än x är approximativt lika med $x/\ln x$ för stora x . Det dröjde ungefär 100 år innan någon lyckades bevisa detta påstående!

Mest berömd är kanske Gauss för *Algebrans fundamentalsats*:

Varje polynom med komplexa koefficienter har minst en komplex rot.

Tillsammans med faktorsatsen följer att ett polynom med komplexa rötter av grad n har exakt n komplexa rötter (några av rötterna kan vara lika).

T ex har ekvationen $5iz^{10} - z + 3 + 4i = 0$ 10 lösningar och vi behöver inte gå utanför de komplexa talen för att finna dessa lösningar.

- 1 Hur många komplexa rötter har $x^5 + 2ix^2 + 3 = 0$?
(Du behöver inte bestämma rötterna.)
- 2 Rita samtliga rötter till ekvationen $x^{10} + 1 = 0$ i det komplexa talplanet.

- 3 Försök förklara hur algebrans fundamentalsats tillsammans med faktorsatsen kan ge att ett polynom av grad n med komplexa koefficienter har precis n rötter.

Polynomekvationer av högre grad

Vi påminner om att de komplexa talen innefattar de reella talen. T ex $z = 3$ är både ett reellt tal och ett komplext tal med imaginärdelen noll. Vi vet att varje andragradsekvation har precis två komplexa rötter. Men hur är det med ekvationer av högre grad?

Frågan besvaras av följande sats, som bevisades första gången av Gauss år 1799.

Algebrans fundamentalsats

Varje polynom av grad minst 1 har minst ett komplext nollställe.

Detta betyder att till ett godtyckligt polynom $f(z)$ finns det minst ett komplext tal c så att $f(c) = 0$. Beviset av satsen hör hemma i högre kurser i matematik. Denna sats tillsammans med faktorsatsen leder till att:

Varje polynomekvation av grad n med komplexa koefficienter har exakt n komplexa rötter. Två eller flera rötter kan vara lika.

multipla nollställen

Man brukar då säga att polynomet har *multipla nollställen*.

För polynomekvationer av högre grad gäller att:

Icke-reella rötter till polynomekvationer med reella koefficienter förekommer alltid i konjugerade par.

4441

Vi har polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Ekvationen $f(x) = 0$ har en rot $x = 2$. Lös ekvationen $f(x) = 0$ fullständigt och kontrollera ditt svar grafiskt.

Enligt faktorsatsen är $x^3 - 2x^2 + x - 2$ delbart med $x - 2$. Vi utför divisionen

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ 0 + x - 2 \\ \underline{-(x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

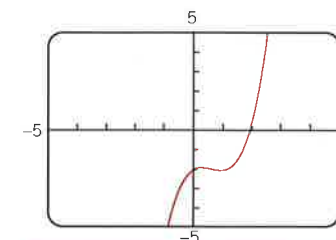
Kvoten $(x^2 + 1)$ ger att ekvationen kan skrivas

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0$$

Ekvationens lösning är

$$\begin{array}{ll} x - 2 = 0 & x^2 + 1 = 0 \\ x = 2 & x^2 = -1 \\ & x = \pm i \end{array}$$

Svar: $x_1 = 2$, $x_2 = i$ och $x_3 = -i$



Vi ser att grafen till $f(x)$ har ett reellt nollställe.

4442

Vi har polynomet $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2$

- Visa att $z = i$ är ett nollställe till $p(z)$.
- Bestäm samtliga nollställena till $p(z)$.
- Skär grafen till $y = p(z)$ x -axeln? Motivera ditt svar.
- Skissa grafen $y = p(z)$.

$$a) p(i) = i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$$

b) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter. Då gäller:

Om $z = i$ är ett nollställe så är det konjugerade talet $\bar{z} = -i$ också ett nollställe.

Detta betyder att polynomet $p(z)$ är delbart med $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$

$$\begin{array}{r} z^2 + 2z + 2 \\ z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 \quad | \quad z^2 + 1 \\ - (z^4 \quad + z^2) \\ \hline 2z^3 + 2z^2 + 2z + 2 \\ - (2z^3 \quad + 2z) \\ \hline 2z^2 \quad + 2 \\ - (2z^2 \quad + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Polynomet kan skrivas $p(z) = (z - i)(z + i)(z^2 + 2z + 2)$
De återstående nollställena får vi ur ekvationen

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$z = -1 \pm \sqrt{1 - 2}$$

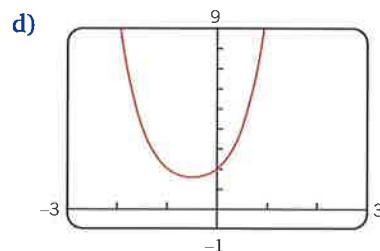
$$z = -1 \pm i$$

Svar: Polynomet $p(z)$ har nollställena i , $-i$, $-1 + i$ och $-1 - i$

c) Grafen skär inte x -axeln.

Motivering:

Eftersom polynomet är av grad 4 vet vi att det har exakt 4 komplexa nollställena. Enligt b) har polynomet 4 icke-reella nollställena och kan därför inte ha fler nollställena.



Grafen $y = p(z)$ skär aldrig x -axeln. Polynomet $p(z)$ saknar därför reella nollställena.

En metod som ibland kan fungera för att lösa polynomekvationer av högre grad är att gissa en rot. Detta förutsätter förstås att det finns en relativt "enkel" rot till ekvationen.

4443

Lös ekvationen $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$.

Vi hoppas att en rot är ett heltal. Prövning ger att $x = 1$ är rot till ekvationen:

$$p(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 5 = 0$$

Enligt faktorsatsen är polynomet delbart med $x - 1$.

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x - 1} = x^2 + 4x - 5$$

Ekvationen kan skrivas $(x - 1)(x^2 + 4x - 5) = 0$

Ekvationens lösning är

$$x_1 = 1 \text{ och } x^2 + 4x - 5 = 0 \text{ som ger } x_2 = 1 \text{ och } x_3 = -5$$

Svar: $x = 1$ (dubbelrot) och $x = -5$

4444 Hur många rötter har $z^{30} + 3iz + 7 = 0$?

a

4445 Ekvationen $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$ har en rot $x = 1$. Lös ekvationen.

4446 Ekvationen $x^3 + 5x^2 + x + 5 = 0$ har en rot $x = -5$. Lös ekvationen.

4447 För polynomet $p(x)$ med reella koefficienter gäller att $p(2 + 5i) = 0$. Bestäm $p(2 - 5i)$.

4448 Lös ekvationen $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$

4449 a) Hur många rötter har ekvationen $(x^2 + 9)(x^2 - 2x + 1) = 0$?
b) Lös ekvationen i a).

4450 Ett femtegradspolynom med reella koefficienter har nollställena 4, $6i$ och $4 - i$. Vilka ytterligare nollställena har polynomet?

4451 Ekvationen $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ har en rot $x = -2$. Bestäm alla rötterna till ekvationen.

b

4452 Ekvationen $z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6 = 0$ har en rot $z = i$. Verifiera detta och bestäm därefter samtliga rötter till ekvationen.

4453 Bestäm det värde på konstanten a för vilket ekvationen $x^3 + 2x^2 + ax + 6 = 0$ får $x = -1$ som en rot. Lös därefter ekvationen fullständigt för detta värde på a .

4454 Polynomet $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3$ har minst ett heltalsnollställe. Bestäm $p(x)$ samtliga nollställena.

4455 Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ genom att först gissa en rot.

4456 Ekvationen $z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$ har en rot $z = 1 + i$. Bestäm ekvationens övriga rötter.

4457 Ekvationen $z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 18z + 30 = 0$ har en rot som är rent imaginär (dvs realdelen är 0). Lös ekvationen.

*Samband mellan rötter och koefficienter hos ekvationer av högre grad

Du har tidigare fått lära dig sambandet mellan en andragradsekvations rötter och koefficienter. Vi ska nu se efter om det finns något motsvarande samband för ekvationer av högre grad och utgår därför från tredjegradspolynomet

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

där koefficienterna a, b, c är rationella tal. Vi vet att tredjegradspolynom har tre nollställan. Dessa kallar vi för p_1, p_2 och p_3 .

Vi faktoreriserar nu $f(x)$ och multiplicerar sedan ihop faktorerna.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - p_1) \cdot (x - p_2) \cdot (x - p_3) = (x^2 - (p_1 + p_2)x + p_1 \cdot p_2) \cdot (x - p_3) \\ &= x^3 - (p_1 + p_2 + p_3)x^2 + (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3)x - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

Om vi jämför det uttryck av $f(x)$ vi nu fick fram med det ursprungliga uttrycket av $f(x)$ får vi fram följande samband:

Samband

$$a = -(p_1 + p_2 + p_3) \quad b = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 \quad c = -p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

Vi kan alltså bl a utläsa att för en polynomekvation av grad tre gäller det att konstanttermen är lika med produkten av rötterna med ombytt tecken och att koefficienten framför x^2 är summan av rötterna med ombytt tecken.

Man kan visa att motsvarande samband gäller mellan rötter och koefficienter för polynomekvationer med högre gradtal än 3 (där koefficienten framför termen med högst gradtal är 1). Koefficienten framför termen med näst högst gradtal är summan av rötterna med omvänt tecken. För polynomekvationer med jämnt gradtal gäller att konstanttermen är lika med produkten av rötterna och för udda gradtal är konstanttermen lika med produkten av rötterna med ombytt tecken.

4458 Kontrollera att tredjegradsekvationen $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ har rötterna $-3, 2$ och 4 .

4459 Kontrollera att tredjegradsekvationen $4x^3 - x^2 - 12x + 3 = 0$ har rötterna $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ och $\frac{1}{4}$.

4460 Skriv ner en formel för sambandet mellan rötterna och konstanttermen samt rötterna och koefficienten framför x^{n-1} för en polynomekvation av grad n där koefficienterna är rationella tal. Utgå från att koefficienten för högstgradstermen är 1.

4461 Bestäm (utan att lösa ekvationen) den ekvation vars rötter är kvadraterna på rötterna till $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

*4.5 Växelström

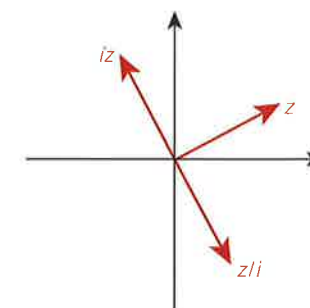
Med växelström menar vi ström där spänningen kan beskrivas av en cosinuskurva (eller sinuskurva). Spolar och kondensatorer fasvrider växelströmmen med $\pm \frac{\pi}{2}$ radianer (90°) i förhållande till spänningen.

Det passar bra att räkna med komplexa funktioner eftersom om

$$z = r(\cos v + i \sin v) \text{ så är}$$

$$iz = r\left(\cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{z}{i} = r\left(\cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$



Med komplexa funktioner blir beräkningarna enklare.

Spänningen U för växelström kan beskrivas av

$U = \operatorname{Re}\{U_0 e^{i\omega t}\} = U_0 \cos(\omega t)$ där U_0 är den maximala amplituden och ω är vinkelfrekvensen. Vinkelfrekvensen anger hur fort vinkeln ändras per sekund.

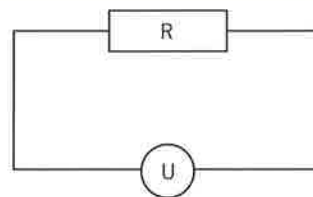
$\omega = 2\pi f$ där f är den vanliga frekvensen, dvs antal perioder per sekund. Ju större ω , desto fortare oscillerar spänningen.

I ett vanligt vägguttag är $\underline{U} = \operatorname{Re}\{325 e^{i50 \cdot 2\pi t}\}$

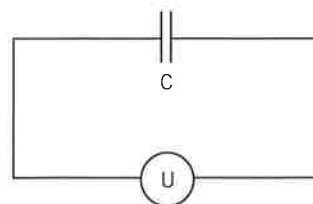
Vi inför symbolen $\underline{U} = U_0 e^{i\omega t}$ för den komplexa spänningen och $\underline{I}$ för den komplexa strömmen. Det är vanligt att man inom ellära använder j som imaginär enhet för att inte förväxla den med variabeln I för ström, men vi behåller i som imaginär enhet.

Räkneregler

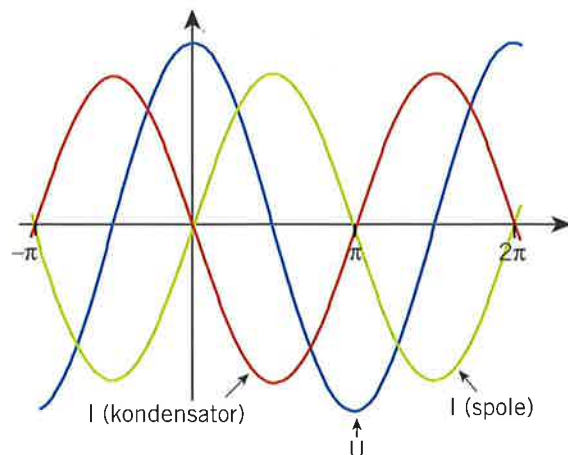
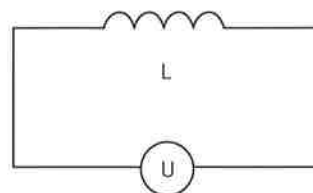
Strömmen I genom ett motstånd med resistansen R är $I = U/R$



En kondensator fasförskjuter strömmen med $\pi/2$ radianer. Strömmen I över en kondensator med kapacitansen C är $I = i\omega CU$ där $\frac{1}{i\omega C}$ är kondensatorns imaginära reaktans.



En spole fasförskjuter strömmen med $-\pi/2$ radianer. Strömmen I över en spole med induktansen L är $I = \frac{U}{i\omega L}$ där $i\omega L$ är spolens imaginära reaktans.



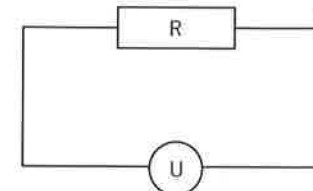
Om spänningen varierar enligt den blå kurvan, varierar strömmen genom en spole enligt gröna kurvan och över en kondensator enligt röda kurvan.

4501

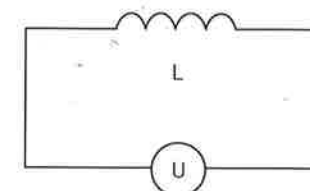
Spänningen $U = 20 \cos(100\pi t)$

Vad är strömmen

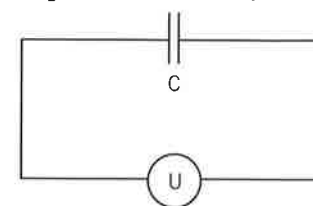
a) genom ett motstånd med resistansen $R = 5 \Omega$?



c) över en spole med induktansen $L = 0,002 \text{ H}$?



b) över en kondensator med kapacitansen $C = 0,001 \text{ F}$?



a) Motstånd fasvrider inte strömmen, men vi använder ändå komplexa funktioner för att förtydliga hur man gör.

Vi översätter spänningen till den komplexa spänningen $\underline{U} = 20e^{i100\pi t}$

Den komplexa strömmen får vi av sambandet

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{20e^{i100\pi t}}{5} = 4e^{i100\pi t}$$

Slutligen tar vi realdelen av $\underline{I}$ för att få strömmen

$$I = \text{Re}\{\underline{I}\} = \text{Re}\{4e^{i100\pi t}\} = 4 \cos(100\pi t)$$

dvs strömmen ligger helt i fas med spänningen.

b) Vi har redan den komplexa spänningen $\underline{U} = 20e^{i100\pi t}$, där $\omega = 100\pi$

Den komplexa strömmen får vi av sambandet

$$\underline{I} = i\omega C \underline{U} = i100\pi \cdot 0,001 \cdot 20e^{i100\pi t} = 2\pi e^{i(100\pi t + \pi/2)}$$

$$I = \text{Re}\{\underline{I}\} = 2\pi \cos(100\pi t + \pi/2) \approx 6,3 \cos(100\pi t + \pi/2)$$

dvs strömmen har amplituden 6,3 och är fasvriden $\pi/2$ radianer.

c) Den komplexa strömmen får vi av sambandet

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{i\omega L} = \frac{20e^{i100\pi t}}{i100\pi \cdot 0,002} = \frac{100}{\pi} e^{i(100\pi t - \pi/2)}$$

$$I = \text{Re}\{\underline{I}\} = \frac{100}{\pi} \cos(100\pi t - \pi/2) \approx 31,8 \cos(100\pi t - \pi/2)$$

Strömmen har amplituden 31,8 och är fasvriden $-\pi/2$ radianer.

4502 En spänningskälla har amplituden 15 V och vinkelfrekvensen $\omega = 50\pi$. Hur kan man beskriva spänningen med en komplex funktion?

4503 I ett vanligt vägguttag är spänningen $U = \operatorname{Re}\{325 e^{i50 \cdot 2\pi t}\}$

a) Vad är frekvensen?

b) Varför säger man att spänningen är 230 V och inte 325 V?

4504 Spänningen $U = \operatorname{Re}\{30 e^{i10\pi t}\}$

Vad är strömmen genom ett motstånd på 3Ω ?

4505 Spänningen $U = \operatorname{Re}\{10 e^{i20\pi t}\}$

Vad är strömmen över en kapacitans med $C = 0,003 \text{ F}$?

Skissa strömmen och spänningen som funktioner av tiden i ett vanligt talplan.

4506 Spänningen $U = \operatorname{Re}\{15 e^{i100\pi t}\}$

Vad är strömmen genom en spole med $L = 0,005 \text{ H}$?

Skissa strömmen och spänningen som funktioner av tiden i ett vanligt talplan.

4507 Stefan kan inget om ellära men ser av sambandet $\underline{I} = i\omega C \underline{U}$ att strömmen över en kondensator ligger $\frac{\pi}{2}$ radianer före spänningen.

Hur kan han veta det?

4508 Erik har en spänningskälla där

b $U = 50 \cos 50\pi t$

Han vill bygga en krets där strömmen fasvrids $\pi/2$ radianer och får amplituden 5 A. Hur ska kretsen se ut?

4509 Emilia har en spänningskälla där

$U = \operatorname{Re}\{30 e^{i10\pi t}\}$

Hon vill bygga en krets där strömmen fasvrids $-\pi/2$ radianer och får amplituden 1 A. Hur ska kretsen se ut?

4510 Spänningen är $U = Ae^{i\omega t}$. Visa att om $\underline{I} = i\underline{U}$ så är $\underline{I} = Ae^{i(\omega t + \pi/2)}$

4511 Från fysiken vet vi att spänningen U över

c en spole är $U = L \cdot \frac{dI}{dt}$

Sambandet gäller även för den komplexa spänningen och strömmen.

Härled formeln $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{iL\omega}$ genom att derivera den komplexa strömmen $\underline{I} = I_0 e^{i\omega t}$

Aktivitet

DISKUTERA



1 Det gäller att $i^5 = i$.

2 Alla reella tal är också komplexa tal.

3 Det komplexa talet $-3 - 2i$ ligger i fjärde kvadranten i det komplexa talplanet.

4 $1 - 2i$ är konjugatet till $-1 + 2i$.

5 Geometriskt kan z och $\bar{z}$ tolkas som en spegling i reella axeln.

6 Absolutbeloppet till $z = 3 - i$ är lika med $\sqrt{10}$.

7 Geometriskt kan addition av två komplexa tal $u + z$ representeras av diagonalen i ett parallelogram.

8 $\sqrt{3} + i$ och $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ är två olika representationer av samma komplexa tal.

9 Vid multiplikation av komplexa tal på polär form multiplicerar man argumenten.

10 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ och $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ är två olika representationer av samma komplexa tal.

11 Om den ena roten till en given andragradsekvation är $2 - i$ så är den andra roten $-2 + i$.

12 En andragradsekvation kan ha en reell rot och en icke-reell rot.

13 Ett sjundegradspolynom dividerat med ett andragradspolynom är alltid ett femtegradspolynom.

14 $x^n + 1$ är alltid delbart med $x + 1$.

Sammanfattning 4

Komplexa tal

Några definitioner

Ett komplext tal z kan skrivas på formen $z = a + bi$, där a och b är reella tal.

Om $z = a + bi$, så gäller:

a är realdelen av z $\text{Re } z = a$

b är imaginärdelen av z $\text{Im } z = b$

i är den imaginära enheten $i^2 = -1$

$|z|$ är absolutbeloppet av z $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\bar{z}$ är konjugatet till z $\bar{z} = a - bi$

Räkning med komplexa tal

För räkning med komplexa tal på formen $a + bi$ gäller de vanliga räkneregler för de fyra räknesätten samt att $i^2 = -1$.

Exempel

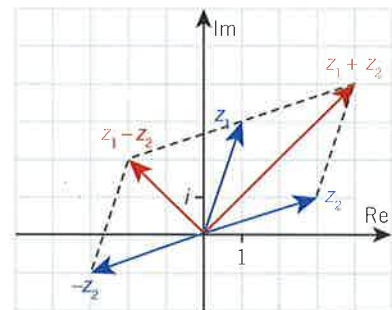
$$(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

Vid division förlänger man med nämnarens konjugat:

$$\frac{3}{2-i} = \frac{3(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i}{4-i^2} = \frac{6+3i}{5} = \frac{6}{5} + \frac{3i}{5}$$

Det komplexa talplanet

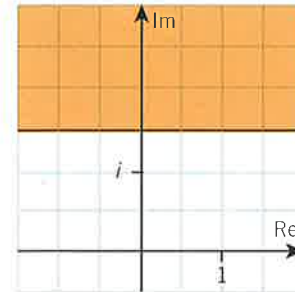
Komplexa tal kan tolkas som vektorer i det komplexa talplanet.



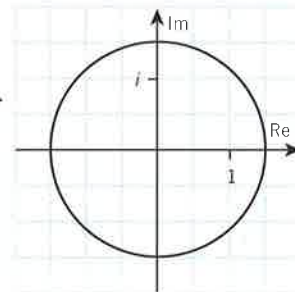
Kurvor och ytor i det komplexa talplanet kan beskrivas med likheter eller olikheter.

Exempel

$\text{Im } z \geq 1,5$ motsvaras av det område där alla punkter har imaginärdelen större eller lika med 1,5.

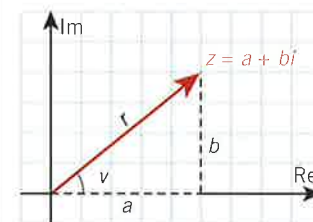


$|z| = 1,5$ motsvaras av alla punkter med avståndet 1,5 till origo.



Komplexa tal på polär form

$$z = a + bi = r \cos v + r \sin v \cdot i = r(\cos v + i \sin v)$$



Absolutbeloppet av z :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumentet av z :

$$\arg z = v \text{ där } \tan v = \frac{b}{a}$$

Räknelagar för komplexa tal på polär form

$$z_1 = r_1(\cos v_1 + i \sin v_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos v_2 + i \sin v_2)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$$

Exempel

$$z_1 = 24(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

$$z_2 = 8(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$= 24 \cdot 8(\cos(150^\circ + 20^\circ) + i \sin(150^\circ + 20^\circ)) = 192(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$$

Exempel

$$z_1 = 24(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

$$z_2 = 8(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$$

$$z_1 / z_2 =$$

$$= 24/8(\cos(150^\circ - 20^\circ) + i \sin(150^\circ - 20^\circ)) = 3(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$$

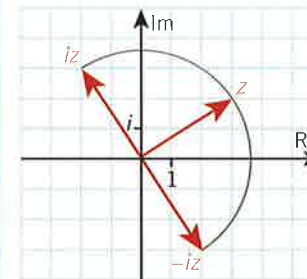
Grafisk tolkning

Talet i skrivs i polär form

$$i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

Vektorn z vrids 90° moturs då z multipliceras med talet i .

Multiplikation med talet $-i$ ger en vridning 90° medurs.



Komplexa tal i potensform

de Moivres formel

$$z^n = (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n(\cos nv + i \sin nv)$$

Exempel

$$\begin{aligned} (1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^{10} = \\ &= 2^5(\cos 2,5\pi + i \sin 2,5\pi) = 32(0 + i \cdot 1) = \\ &= 32i \end{aligned}$$

Ekvationer av typen $z^5 = 32$ kan lösas med hjälp av de Moivres formel. Man börjar då med att sätta $z = r(\cos v + i \sin v)$ och skriva talet 32 i polär form.

$$z^5 = 32$$

$$(r(\cos v + i \sin v))^5 = 32(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$r^5(\cos 5v + i \sin 5v) = 32(\cos 0 + i \sin 0)$$

som ger

$$r^5 = 32 \text{ och } 5v = 0 + n \cdot 2\pi$$

dvs $r = 2$ och $v = n \cdot 2\pi/5$ vilket för $n = 0, 1, \dots, 4$ ger de 5 sökta rötterna.

Eulers formel

Om x och y är reella tal, gäller

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Exempel

$$e^{3\pi i/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Exempel

$$z = 6e^{\pi i/4} \text{ och } u = 2e^{\pi i/2}$$

$$z \cdot u = 6e^{\pi i/4} \cdot 2e^{\pi i/2} = 12e^{\pi i/4 + \pi i/2} = 12e^{3\pi i/4}$$

Polynomekvationer

Ekvationer av första och andra graden

Exempel

Lös ekvationen

$$z + 2\bar{z} = 6 + 3i$$

Sätt $z = x + iy$, då blir $\bar{z} = x - iy$

$$x + iy + 2x - 2iy = 6 + 3i$$

$$3x - iy = 6 + 3i$$

$$3x = 6 \quad (\text{realdelarna lika})$$

$$-y = 3 \quad (\text{imaginärdelarna lika})$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$z = 2 - 3i$$

Andragradsekvationen $z^2 + pz + q = 0$ löses på följande sätt om

• q är ett reellt tal och p är ett komplext tal

$$\text{T ex } z^2 + 2iz + 7 = 0$$

Använd pq -formeln och $i^2 = -1$

• q är ett icke-reellt tal och $p = 0$

$$\text{T ex } z^2 = 2i$$

Skriv om på polär form och använd de Moivres formel eller skriv $z = a + bi$ och identifiera real- respektive imaginärdelar.

För rötterna gäller: $z_2 = -z_1$

Faktorsatsen

Ett polynom $f(x)$ har en faktor $x - a$, om och endast om $f(a) = 0$

Exempel

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

$f(2) = 0$ betyder att

• $f(x)$ har en faktor $x - 2$

• $x = 2$ är en rot till $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

• divisionen $\frac{f(x)}{x-2}$ går jämnt upp

$f(1) = 8$ betyder att

• $x - 1$ är inte en faktor i $f(x)$

• $x = 1$ är inte en rot till $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

• divisionen $\frac{f(x)}{x-1}$ ger resten 8

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x - 2 & \\ x^3 - 6x^2 + 3x + 10 & x - 1 \\ \hline x^3 - & x^2 \\ \hline - 5x^2 + 3x & \\ - 5x^2 + 5x & \\ \hline - 2x + 10 & \\ - 2x + 2 & \\ \hline 8 & \text{Rest} \end{array}$$

Polynomekvationer av högre grad

Varje polynomekvation av graden n och med komplexa koefficienter har n komplexa rötter.

Icke-reella rötter till polynomekvationer med reella koefficienter förekommer alltid i konjugerade par, dvs om $z = a + bi$ är en rot så är $\bar{z} = a - bi$ också en rot.

Exempel

Ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ har rötterna $x_1 = 2i$ och $x_2 = -2i$

$f(x)$ är alltså delbart med

$$(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$$

$$\frac{f(x)}{x^2 + 4} = x - 3 \quad \text{och den tredje roten är } x = 3$$

Kan du det här? 4

	Begrepp som du ska kunna använda och beskriva	Du ska ha strategier för att kunna
Räkning med komplexa tal	Imaginära tal och imaginära enheten Komplexa rötter Real- och imaginärdel Konjugat Absolutbelopp	- lösa enkla andragradsekvationer med komplexa rötter - addera, subtrahera, multiplicera och dividera komplexa tal - bestämma konjugatet respektive absolutbeloppet till ett givet komplext tal - representera komplexa tal som punkter i det komplexa talplanet.
Det komplexa talplanet	Komplexa tal på vektorform Komplexa tal på polär form Argument	- grafiskt representera addition, subtraktion och avståndet mellan två komplexa tal - beskriva cirklar och andra kurvor samt ytor i det komplexa talplanet - skriva ett godtyckligt komplext tal $z = a + bi$ på polär form - multipliera och dividera komplexa tal på polär form.
Komplexa tal i potensform	de Moivres formel Ekvationen $z^n = a$ Eulers formel	- bestämma potenser av komplexa tal med hjälp av de Moivres formel - lösa ekvationer av typen $z^n = a$ med hjälp av de Moivres formel - beskriva komplexa tal med hjälp av Eulers formel.
Polynomekvationer	Andragradsekvationer med komplexa koefficienter Restsatsen Faktorsatsen Polynomdivision Algebrans fundamentalsats Konjugerade tal	- lösa andragradsekvationer där koefficienterna är komplexa tal - förstå innebörden av restsatsen, factorsatsen och algebrans fundamentalsats samt tillämpa satserna vid lösning av polynomekvationer av högre grad - utföra polynomdivisioner vid lösning av polynomekvationer av högre grad - lösa polynomekvationer med reella koefficienter utifrån att man vet en komplex rot - lösa polynomekvationer med heltalskoefficienter där det är möjligt att gissa en heltalsrot.

Diagnos 4

Räkning med komplexa tal

1 Låt $z_1 = 2 + 5i$ och $z_2 = 3 - 4i$. Bestäm

- a) $\operatorname{Re} z_1$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e) $z_1 \cdot z_2$
b) $\operatorname{Im} z_2$ d) $|z_2|$ f) $z_1 \cdot \bar{z}_2$

2 Ange på formen $a + bi$

- a) $\frac{1}{3-i}$ b) $\frac{3}{2+5i}$ c) $\frac{3-4i}{6+i}$

3 Vad menas med att två komplexa tal är konjugerade tal?

4 Beräkna utan räknare

- a) i^3 b) i^8 c) i^{25}

Det komplexa talplanet

5 Talen $z_1 = 4 + 2i$ och $z_2 = -2 + 3i$ är givna.

- a) Markera i det komplexa talplanet de mot z_1 och z_2 svarande punkterna.
b) Beräkna i exakt form $|z_1|$, $|z_2|$ och $|z_1 - z_2|$

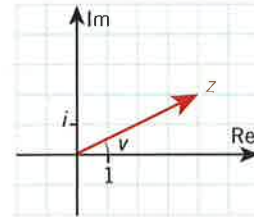
6 Tolka geometriskt sambanden

- a) $|z| = 3$ c) $-3 \leq \operatorname{Re} z < -1$
b) $\operatorname{Im} z < -2$ d) $\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$

7 Skriv det komplexa talet z i polär form. Ange argumentet i grader (med en decimal) och i radianer (med tre decimaler). Rita figur.

- a) $z = 3 + 4i$ c) $z = -2 + 4i$
b) $z = -12 - 5i$ d) $z = 5 - 2i$

8 Figuren visar det komplexa talet z . Rita av figuren och markera de komplexa talen iz , $-z$ och $\bar{z}$



Komplexa tal i potensform

9 a) Beskriv kortfattat i punktform hur du löser ekvationer av typen $z^n = a$, där a är ett komplext tal.

b) Använd din metod för att bestämma den fullständiga lösningen till ekvationen $z^3 = -8$ dels i polär form, dels på formen $a + bi$. Svara i radianer.

10 Lös ekvationen och svara i polär form i radianer

- a) $z^3 = 8$ b) $z^4 = -i$

11 Skriv exakt i polär form

- a) $e^{\pi i}$ b) $e^{2 + \pi i/3}$ c) e^{1-2i}

Polynomekvationer

12 Lös ekvationen $3z + \bar{z} = 12 + 2i$

13 Lös ekvationen

- a) $x^2 - x + 1 = 0$
b) $2x^2 = 12ix - 14$
c) $x^2 = i$

14 Bestäm resten då $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ divideras med

- a) $x - 1$ b) $x + 2$

15 Ekvationen $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ har en rot $x = -1$. Bestäm samtliga rötter.

Blandade övningar kapitel 4

Del I Utan räknare

1 Skriv på formen $a + bi$

- a) $(7 + 5i) - (2 - 4i)$ c) $2i^2 - (-i)^2$
b) $i(2 - i) + 2(4 - 3i)$ d) $(4 - 2i)^2$

2 Vilka av följande tal är komplexa tal? Motivera.

- $-i$ 7 $3 + 5i$ $\frac{2}{5}$

3 Ge exempel på ett komplext tal z för vilket gäller $\operatorname{Re} z = 3 \cdot \operatorname{Im} z$ ($z \neq 0$)

4 Skriv uttrycket på formen $x + yi$

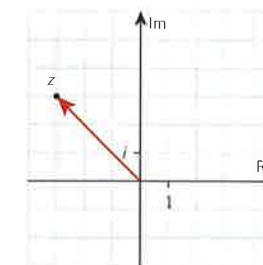
- a) $\frac{2 + 4i}{3 - i}$ b) $\frac{(5 + i)(5 - i)}{1 + 5i}$

5 z är ett komplext tal. Förklara och visa med ett eget exempel vad som menas med

- a) $\bar{z}$ b) $|z|$

6 Lös ekvationen $z^3 + 4z^2 + 13z = 0$

7 Skriv det komplexa talet z på tre olika sätt.



8 Ange en andragradsekvation som

- a) saknar reella rötter
b) har två reella rötter

9 Går divisionen $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1)/(x - 1)$ jämnt ut?

10 Zuhair påstår att man får samma resultat om man dividerar ett komplext tal med i som när man multiplicerar talet med $-i$. Stämmer det? Motivera.

11 Ett komplext tal på polär form kan skrivas $z = r(\cos v + i \sin v)$

Skriv på polär form

- a) $\bar{z}$ c) z^2
b) $-z$ d) $z \cdot \bar{z}$

12 Ge exempel på två olika icke-reella tal vars produkt är

- a) 2 b) $-5 + 5i$

13 Robin påstår att potensen i^{102} kan beräknas utan räknare och dessutom relativt enkelt. Har han rätt? Förklara.

14 Bestäm det komplexa talet z så att

$$2z + 4\bar{z} = 3 + 8i$$

15 Ekvationen $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ har en rot $x = 2$. Lös ekvationen fullständigt.

16 För vilket värde på det reella talet t blir $z = (1 + t)(1 + i) - t(1 - 2i)$ reellt?

17 Visa att $\frac{6e^{-i\pi/3}}{3e^{i\pi/3}} = -1 - i\sqrt{3}$

18 Visa att $\operatorname{Re} z = 0$ om

$$z = \frac{a + bi}{a - bi} - \frac{a - bi}{a + bi}$$

19 Visa att produkten $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ där a , b , c och d är heltal, kan skrivas som kvadratsumman $u^2 + v^2$, där u och v är heltal.

Om du behöver repetera kan du fortsätta med *Repetitionsuppgifter* på sidan 254.

Del II Med räknare

20 Lös ekvationen $\frac{z^2}{2} - 29z + 505 = 0$

a

21 Ange absolutbeloppet och argumentet i grader till

- a) $\sqrt{3} + i$ c) $-5i$
b) $(\sqrt{3} + i)^2$ d) $(-5i)^3$

22 Talen $z = 3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ och $u = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ är givna. Bestäm i polär form

- a) $z \cdot u$ b) z/u

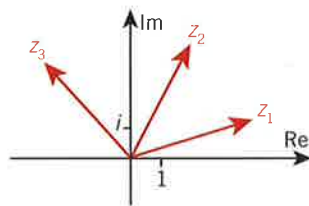
23 Visa att $x^4 - 4x^2 + 9x - 18$ har en faktor $(x + 3)$.

24 Du studerar tillsammans med en kompis lösningar till andragradsekvationer av typen $ax^2 + bx + c = 0$ där a , b och c är reella koefficienter. Visa och förklara med ett exempel varför två icke-reella lösningar är konjugerande tal.

25 Lös ekvationen, svara i polär form och skissa lösningarna i ett komplext talplan.

- a) $z^3 = 27$ b) $z^4 = -i$

26 Elna har fått lösningarna z_1 , z_2 och z_3 till en ekvation av typen $z^3 = w$. Hilda ser direkt att hon har räknat fel. Hur vet hon det? Förklara.



27 Polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ kan faktoriseras till $(x - 1)(x + 3)(x - 3)$
a) För vilka värden på x gäller att $p(x) = 0$?
b) Vilka polynom delar $p(x)$?

28 a) Rita ett komplext talplan och markera talet

b $z_1 = -4 + 3i$

- b) Punkterna som representerar z_1 och $\bar{z}_1$ utgör tillsammans med origo hörn i en triangel. Bestäm triangelns area.
c) Ge ett allmänt uttryck i a och b för arean hos den triangel som bildas av z , $\bar{z}$ och origo om $z = a + bi$ (NP)

29 Förklara hur man på två olika sätt kan avgöra om $(x - 3)$ är en delare till polynomet $p(x)$

30 Skriv $z = 1 + i$ som en potens av e .

31 Ekvationen $z^4 = w$ har en lösning

$z_1 = 1 + i$
Vilka är de andra lösningarna?

32 Bestäm samtliga tredjerötter ur det komplexa talet $\sqrt{32} + \sqrt{32}i$

33 För vilka heltal n är $z = (n + i)^4$ reellt?

34 Förenkla uttrycket $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$

c

35 Polynomet $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$ är givet. Ekvationen $f(x) = 0$ har en dubbelrot $x = 4$. Lös ekvationen $f(x) = 0$ fullständigt och skissa grafen $y = f(x)$

36 Visa att $f(x) = (x - 1)^{20} - x^{20} + 2x - 1$ är delbart med $x^3 - 1,5x^2 + 0,5x$

Utredande uppgifter **a** **b** **c**

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

37 I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med

A , B , C , D , E , F , G och H .

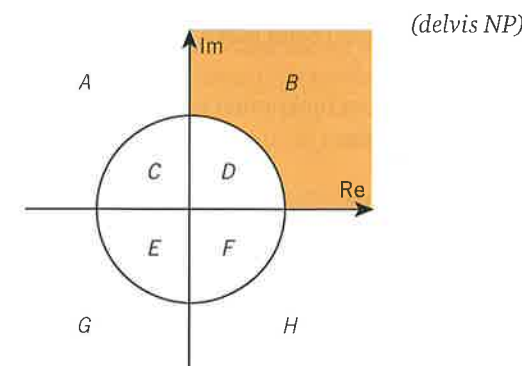
Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.

a) Det komplexa talet $z = -0,4 + 0,1i$ ligger

i område C. I vilket område ligger $\frac{1}{z}$?

b) I vilket eller vilka områden kan talet $\frac{1}{z}$ ligga om z ligger i B?

c) I vilket eller vilka områden kan talet $\frac{1}{z}$ ligga om z ligger i B?



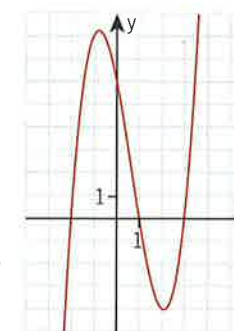
(delvis NP)

38 En tredjegradsfunktion kan skrivas på formen

$$y = ax^3 + bx^2 + c \text{ eller } y = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

där a , b , c , k är reella konstanter och x_1 , x_2 , x_3 är rötter (dvs nollställen) till $f(x) = 0$

- a) Hur många reella resp. icke-reella lösningar har ekvationen $y = 0$ om $y = f(x)$ har en graf enligt figuren?



b) Utnyttja de olika skrivsätten enligt ovan till att finna ett eget exempel på en tredjegradsfunktion $y = ax^3 + bx^2 + c$ som har ett reellt nollställe.

c) Hur många reella nollställen kan en tredjegradsfunktion ha?

39 a) Martin påstår att likheten

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

gäller för **alla** komplexa tal z_1 och z_2 .

Ge argument för varför det måste vara falskt.

b) Viktor påstår att det finns minst **två** komplexa tal z_1 och z_2 , båda skilda från noll, för vilka likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller.

Ge argument för varför det måste vara sant.

c) Gustav inser dessutom att det går att finna många sådana par av komplexa tal z_1 och z_2 .

Undersök och beskriv hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

ska gälla.

Motivera dina slutsatser.

(NP)