SVAR, LEDTRÅDAR OCH LÖSNINGAR

Svaren står med svart text. Ledtrådar och lösningar med blå text.

1

1103 a) $\sin v = 0{,}829$, $\cos v = 0{,}559$
$\tan v = 0{,}829/0{,}559 \approx 1{,}48$

b) $\sin v = 0{,}94$, $\cos v = 0{,}34$
$\tan v \approx 2{,}8$

1104 a) $x \approx 34°$ och $x \approx 146°$
Ledtråd:
$x = \sin^{-1}(0{,}56)$ och
$\sin(180° - x) = \sin x$

b) $x \approx 83°$

c) Ingen lösning i intervallet.

d) $x \approx 153°$

1105 $h \approx 16$ m
Ledtråd:
$\tan 37° = \dfrac{h}{19 + 2{,}5}$

1106 a) Ca 40 cm^2

b) 38 cm^2
Ledtråd:
Använd areasatsen två gånger.

c) 9,2 cm
Ledtråd:
Använd cosinussatsen.

1107 Sant.
Motivering:
Trianglars vinklar ligger i intervallet $0° < v < 180°$.
I detta intervall finns två olika vinklar som har samma sinusvärde men bara en vinkel till varje cosinusvärde.

1108 a) 20 cm
Ledtråd:
$\sin 56{,}4° = h/24$

b) 180 cm^2

c) 63 cm
Kommentar:
Sidan *BC* beräknas med cosinussatsen.

1109 a) $v = 56°$ och $v = 124°$
Motivering:
$\sin v = \sin(180° - v)$

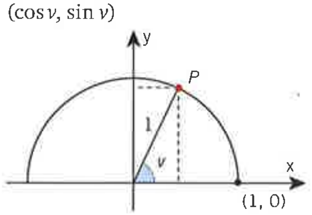
b) $v = 140°$
Motivering:
$\cos v = -\cos(180° - v)$

c) Ingen lösning i intervallet.
Motivering:
$\sin v > 0$ i hela intervallet.

1110 a) $(-b, a)$

b) $\sin(v + 90°) = \cos v$
$\cos(v + 90°) = -\sin v$

1111 En punkt på enhetscirkeln har för vinkeln v koordinaterna $(\cos v, \sin v)$



För en vinkel i första kvadranten ger Pythagoras sats direkt:
$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$

I andra kvadranten kan vi utnyttja att
$\sin v = \sin(180° - v)$
$\cos v = -\cos(180° - v)$

vilket ger

$(\sin(180° - v))^2 + (\cos(180° - v))^2 =$

$= (\sin v)^2 + (-\cos v)^2 =$

$= (\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1$

dvs sambandet gäller för alla vinklar i intervallet.

Kommentar:
Vi kan även använda cirkelns ekvation eller avståndsformeln för att visa att sambandet gäller för *alla* vinklar.

1202 a) 1 b) –1 c) –1 d) 0

1203 Sinusfunktionen är periodisk med period 360° vilket ger att $\sin 50° = \sin(50° + 360°) = \sin 410°$

1204 Om perioden är 180° innebär det att varje tangensvärde återkommer med ett intervall på 180°, t ex $\tan 10° = \tan 190° = \tan 370° = \ldots$

1205 a) 0,5
Lösning:
$\sin 750° =$
$= \sin(750° - 2 \cdot 360°) =$
$= \sin 30°$

b) 0,53
Lösning:
$\cos(-302°) =$
$= \cos(-302° + 360°) =$
$= \cos 58°$

c) 0,84
Lösning:
$\tan 400° =$
$= \tan(400° - 180°) =$
$= \tan 220°$

1206 a) 0,42

b) –0,42

c) 0,91

d) 0,91

e) 0,42
Ledtråd:
$\sin(180° - v) = \sin v$

f) –0,91
Ledtråd:
$\cos(v + 180°) = -\cos v$

g) 0,91
Ledtråd:
$\sin(90° - v) = \cos v$

h) 0,42

1207 a) Falskt.

b) Sant.
Motivering:
$\cos v = \cos(-v)$ och
$\cos 290° = \cos(290° - 360°) =$
$= \cos(-70°)$

c) Sant.
Motivering:
$\cos 270° = 0$ vilket ger att
$\tan 270° = \dfrac{\sin 270°}{\cos 270°}$ ej är definierat.

d) Sant.
Motivering:
$\dfrac{\sin 550°}{\cos 550°} = \tan 550° =$
$= \tan(10° + 3 \cdot 180°) =$
$= \tan 10°$

1208 a) $\sqrt{3}$

b) $-\sqrt{3}$
Lösning:
$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

c) 1

d) $\sqrt{3}$

1209 a) $Q(-a, b)$ och $S(a, -b)$.

b) *Lösning:*
$VL = \tan(-v) = \dfrac{\sin(-v)}{\cos(-v)} =$

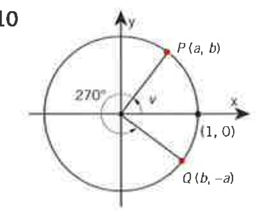
$= \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{b}{a}$

$HL = \tan(180° - v) =$

$= \dfrac{\sin(180° - v)}{\cos(180° - v)} = \dfrac{b}{-a} = -\dfrac{b}{a}$

$VL = HL$

1210



a) *Lösning:*
$\sin v = b$,
$\cos(v + 270°) = b$

b) *Lösning:*
$\cos v = a$,
$\sin(v + 270°) = -a$

1214 $\sin v = \pm\dfrac{3}{5} = \pm 0{,}6$

Lösning:

$\sin^2 v = 1 - \dfrac{4^2}{5}$

$\sin^2 v = \dfrac{9}{25}$

$\sin v = \pm\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \pm\dfrac{3}{5}$

1215 a) b) $\cos v = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

1216 a) $\cos v = \dfrac{12}{13}$ b) $\cos v = \dfrac{40}{41}$

1217 *Lösning:*
$VL = \sin x\left(\dfrac{1}{\sin x} - \sin x\right) =$
$= 1 - \sin^2 x = \cos^2 x = HL$
Kommentar:
Observera att likheten inte gäller om $\sin x = 0$ eftersom VL inte är definierat då.

1218 *Lösning:*
$VL = \cos^2 v(\tan^2 v + 1) =$

$= \cos^2 v \cdot \left(\dfrac{\sin^2 v}{\cos^2 v} + 1\right) =$

$= \sin^2 v + \cos^2 v = 1 = HL$

1219 Nej, för en trubbig vinkel $(90° < v < 180°)$ är $\cos v$ negativ (andra kvadranten i enhetscirkeln).

1220 $\sin v = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan v = -\sqrt{8}$

1221 a) $\cos x$ b) $\dfrac{1}{\sin x}$ c) 1

Ledtråd: Förläng till gemensam nämnare.

d) $\cos x$

1222 a) $x = 0°$ ger
$\sin^2 0° + \tan 0° = 0$
$1 - \cos 0° = 0$

$x = 30°$ ger
$\sin^2 30° + \tan 30° \approx 0{,}83$
$1 - \cos 30° \approx 0{,}13$

b) Nej.
Motivering:
Uttrycken har inte samma värde för alla vinklar x och är därför inte identiska.

1223 a) Ja.
Motivering:

$\sin x + \dfrac{\cos x^2}{\sin x} =$

$= \dfrac{\sin x^2 + \cos x^2}{\sin x} =$

$= \dfrac{1}{\sin x}$

b) Nej, Steves svar kan inte förenklas till $\cos x$.
Motivering:
Prövning ger t ex att för $x = 0°$ har Steves uttryck värdet 0 medan $\cos 0° = 1$.

1224 a) $2\cos^2 x - 1$

b) $\dfrac{1}{\cos x}$

1225 a) *Lösning:*
$HL = \dfrac{\sin^2 v}{1 - \sin^2 v} = \dfrac{\sin^2 v}{\cos^2 v} =$
$= \tan^2 v = VL$

b) *Lösning:*
$VL = (1 - \sin^2 v)(1 + \tan^2 v) =$

$= \cos^2 v\left(1 + \dfrac{\sin^2 v}{\cos^2 v}\right) =$

$= \cos^2 v + \sin^2 v = 1 = HL$

1227 *Lösning:*
$VL = 1 - \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x} =$

$= 1 - \dfrac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} =$

$= 1 - \dfrac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 + \sin x} =$

$= 1 - (1 - \sin x) = \sin x = HL$

1228 *Ledtråd:*
Börja med VL och konjugatregeln.

1229 *Ledtråd:*
Förenkla VL. Börja med att ersätta $\tan x$ och sedan skriva täljaren som ett bråk. Utför därefter divisionen med nämnaren och förkorta.
Alternativt:
Börja med att multiplicera båda leden med $(\sin x + \cos x)$. Förenkla sedan HL.

1230 *Ledtråd:*
Börja t ex med VL och skriv om på gemensamt bråkstreck.

1231 *Ledtråd:*
Förenkla HL. Börja med att förlänga med $(1 - \sin x)$.
Alternativt:
Multiplicera först båda leden med $\cos x$ och sedan med $(1 + \sin x)$.

1232 *Lösning:*

$$\text{VL} = \frac{\dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \text{HL}$$

1233 *Lösning:*

$$\text{VL} = \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\,(1 - \cos x)} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x\,(1 - \cos x)} =$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$= \text{HL}$

1234 *Lösning:*

$$\text{VL} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \text{HL}$$

1235 *Ledtråd:*
Skriv först om VL så att nämnarna blir lika, $(1 - \sin v)(1 + \sin v)$.

1236 *Lösning:*

$$\text{VL} = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos x}{\cos x}}{(1 - \cos^2 x)} =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\cos x\,(1 - \cos^2 x)} =$$

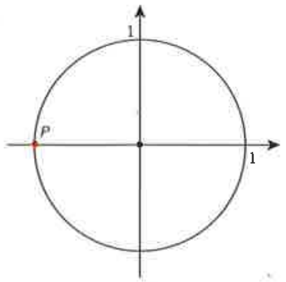
$$= \frac{1}{\cos x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos x + \cos^2 x} = \text{HL}$$

1239 a) $A = \sin x,\ B = \sin 25°$

b) $A = \cos y,\ B = \sin 35°$

1240 a)



y-koordinaten för P är $\sin 180° = 0$.

b) *Lösning:*
$\sin(90° + 90°) =$
$= \sin 90° \cdot \cos 90° +$
$+ \cos 90° \cdot \sin 90° =$
$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

1241 a) $1{,}96 \sin x$
Lösning:
$\sin x \cdot \cos 12° + \sin x \cdot \cos 12° =$
$2 \cdot \cos 12° \cdot \sin x \approx 1{,}96 \sin x$

b) $0{,}81 \cos x$

1242 a) $2 \sin 50° \cos x \approx 1{,}53 \cos x$

b) $2 \sin 43° \cos x \approx 1{,}36 \cos x$

c) $2 \cos 79° \cos x \approx 0{,}38 \cos x$

1243 a) $2 \sin u \cdot \cos v$

b) $2 \cos u \cdot \sin v$

c) $2 \cos u \cdot \cos v$

d) $-2 \sin u \cdot \sin v$

1244 *Lösning:*
$\text{VL} =$
$= \cos(60° + x) + \cos(60° - x) =$
$= \cos 60° \cdot \cos x - \sin 60° \cdot \sin x +$
$+ \cos 60° \cdot \cos x +$
$+ \sin 60° \cdot \sin x =$
$= 2 \cos 60° \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x =$
$= \cos x = \text{HL}$

1245 a) *Lösning:*
$\text{VL} = \cos(270° - v) =$
$= \cos 270° \cos v + \sin 270° \sin v =$
$= 0 \cdot \cos v + (-1) \cdot \sin v =$
$= -\sin v = \text{HL}$

b) *Lösning:*
$\text{VL} = \sin(360° - x) =$
$= \sin 360° \cos x - \cos 360° \sin x =$
$= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$
$= \text{HL}$

1246 *Ledtråd:* Sätt $u = 0°$.

1247 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ eller $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1248 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$

1249 $\cos(x - x) = 1$
Förklaring:
$\cos(x - x) = \cos 0° = 1$

1250 $-\frac{16}{65}$
Ledtråd:
Beräkna $\cos A$ och $\cos B$ med hjälp av trigonometriska ettan.

1251 *Lösning:*
$\cos(u + v) = \cos(u - (-v)) =$
$= \cos u \cdot \cos(-v) + \sin u \cdot \sin(-v) =$
$= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

1252 —

1253 a) *Lösning:*
Vi använder sambanden
$\cos(90° - x) = \sin x$
$\sin(90° - x) = \cos x$

$\cos((90° - u) - v) =$
$= \cos(90° - u) \cdot \cos v +$
$+ \sin(90° - u) \cdot \sin v$
$\text{VL} = \cos(90° - (u + v)) =$
$= \sin(u + v)$
$\text{HL} = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$

b) *Ledtråd:*
Byt ut v mot $-v$

1255 a) 0,96 c) 0,75

b) 0,28 d) 3,43
Ledtråd:
$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

1256 a) $\sin v = \pm\sqrt{0{,}75} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin 2v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
Kommentar:
Samma svar i a) och b) eftersom $\cos v = 0{,}5$ ger specialfallet att $\sin 2v = \sin v$

1257 a) $\frac{\sqrt{8}}{3} \approx 0{,}94$

b) $-\frac{2\sqrt{8}}{9} \approx -0{,}63$

1258 a) $-0{,}5$
Ledtråd:
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

b) $\frac{1}{9}$

1259 Nej.
Motivering:
Det räcker med ett motbevis t ex $2 \cdot \sin 30° \neq \sin 60°$

1260 a) $-\frac{41}{841}$ b) $\frac{840}{841}$

1261 Formlerna för dubbla vinkeln kan härledas från additionsformlerna genom att använda
$\sin 2v = \sin(v + v)$
och
$\cos 2v = \cos(v + v)$

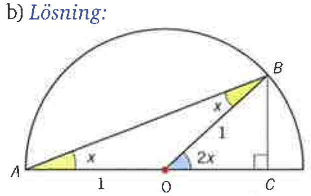
1262 a) *Lösning:*

$$\text{HL} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} =$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{VL}$$

b) *Lösning:*



$\angle BOC = 2x$ (yttervinkel)
$BC = \sin 2x,\ OC = \cos 2x$

$$\tan x = \frac{BC}{1 + OC} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$$

1263 *Lösning:*

$$\text{VL} = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} =$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \text{HL}$$

1264 $3 \sin x - 4 \sin^3 x$
Ledtråd:
$\sin 3x = \sin(2x + x)$

1265 *Ledtråd:*
Visa att VL kan skrivas om till HL. Använd formlerna för dubbla vinkeln upprepade gånger. OBS! $4x$ är dubbla vinkeln till $2x$.

1266 a) *Lösning:*

$$\text{HL} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} =$$

$= \cos 2x = \text{VL}$

b) c) *Ledtråd:*
Visa att HL kan skrivas om till VL på liknande sätt som i a).

1303 a) $\Rightarrow$
Motivering:
$x > 0$ medför att $x^2 > 0$.
Omvändningen gäller inte eftersom $x^2 > 0$ också kan medföra att $x < 0$
t ex $9 = (-3)^2$

b) $\Leftrightarrow$
Motivering:
n är udda $\Rightarrow n = 2k + 1$ och
$n = 2k + 1 \Rightarrow n$ är udda.

c) $\Rightarrow$
Motivering:
$y = x + 2$ medför $y' = 1$.
Omvändningen gäller inte.
Det finns flera funktioner vars derivata är 1.
T ex $y = x + 1$.

d) $\Leftrightarrow$
Motivering:
$\lg x = 2 \Rightarrow x = 100$ och
$x = 100 \Rightarrow \lg x = 2$

1304 a) $3x + 7 = x + 1 \Rightarrow$
$2x = -6 \Rightarrow x = -3$

b) $x = -3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow$
$3x = x - 6 \Rightarrow 3x + 7 = x + 1$

c) Ja.
$3x + 7 = x + 1 \Leftrightarrow x = -3$

1305 a) Ett jämnt tal: $2n$ (n heltal)
Ett udda tal: $2k + 1$ (k heltal)
Summan av ett udda och ett jämnt tal är ett udda tal
Bevis:
$2n + 2k + 1 = 2(n + k) + 1 =$
$= 2m + 1$
(m är ett heltal eftersom n och k är heltal)
Summan är ett udda tal.
V.S.B.

b) *Ledtråd:*
Utveckla produkten
$(2n + 1)(2k + 1)$
och motivera varför den är ett udda tal.

1306 a) Påståendet är sant.
Bevis:
$n + (n + 1) + (n + 2) =$
$= 3n + 3 = 3(n + 1)$
$3(n + 1)$ är delbart med 3.

b) Påståendet är falskt.
Motbevis:
$2 + 3 + 4 = 9$
9 är inte delbart med 6.

1307 Sant.
Motivering:
Symbolerna betyder
"P medför Q som medför R".
"P medför alltså R".

1308 $A + B + C = 180°$ (vinkelsumma)
$A + B + 90° = 180°$
$A + B = 90°$
$\sin(A + B) = \sin 90° = 1$

1309 a) *Ledtråd:*
Visa att cosinussatsen ger att $a^2 = b^2 + c^2$ om $A = 90°$.

b) *Ledtråd:*
Visa att om $a^2 = b^2 + c^2$ medför det att $2bc\cos A = 0$ och att $A = 90°$.

1310 a) Triangeltal: $n(n + 1)/2$
kvadrattal: n^2

b) Slutsats: Summan av två på varandra följande triangeltal är ett kvadrattal.

c) *Ledtråd:*
Förenkla t ex
$(n - 1)n/2 + n(n + 1)/2$

1311 *Lösning:*
n, m heltal ger produkten:
$2n \cdot 2(n + 1) = 2 \cdot 2 \cdot n(n + 1) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot m$
Den sista likheten motiveras av att antingen n eller $(n + 1)$ är ett jämnt tal.
$8m$ är delbart med 8. *V.S.B.*

1312 I sista steget dividerar vi med $a + b - c = 0$.
Division med noll är inte definierat.

1313 *Ledtråd:*
Visa att uttrycket kan faktoriseras till $(n - 1)n(n + 1)$ och motivera varför produkten är delbar med 3.

1316 a) $\neg P$: n är udda.

b) $\neg P : x + y < 4$

c) $\neg P : x \neq 2$

d) $\neg P$: Inget barn är en flicka.

e) $\neg P$: Minst en ko kan inte flyga.

1317 Vi spelar inte fotboll $\Rightarrow$ Det är inte sommar.

1318 a) $\neg Q: x > 8 \Rightarrow \neg P: 0{,}5x + 2 > 6$

b) $x > 8 \Rightarrow 0{,}5x + 2 > 0{,}5 \cdot 8 +$
$+ 2 = 6$

1319 a) *"Om inget av två positiva reella tal är större än 10 medför det att produkten är mindre än eller lika med 100."*

eller

"Om två positiva reella tal båda är mindre än eller lika med tio medför det att produkten är mindre än eller lika med 100."

b) x och y är positiva reella tal.
$\neg Q$: $0 \leq x \leq 10$ och
$0 \leq y \leq 10$
$\neg P$: $xy \leq 100$

c) Vi visar att $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
$0 \leq x \leq 10$ och $0 \leq y \leq 10$
$\Rightarrow xy \leq 100$

1320 *Lösning:*
P : $3n + 2$ udda
$\neg P$: $3n + 2$ jämnt
Q : n är udda
$\neg Q$: n är jämnt
Vi visar $P \Rightarrow Q$ genom att visa $\neg Q \Rightarrow \neg P$
$n = 2k$ (k heltal)
$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$
$2(3k + 1)$ är ett jämnt tal.
V.S.B.

1321 a) *Lösning:*
Anta: Ingen påse har 4 godisbitar eller fler.
Totala antalet godisbitar är då maximalt $3 \cdot 7$ st vilket motsäger att det är 22 godisbitar.

b) *Ledtråd:*
Visa att om både a och b är negativa eller ingen av dem så ger det att $ab \geq 0$

1322 Antagande: P
Slutsats: Q
I ett direkt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att utgå från P och visa att slutsatsen Q är sann.
I ett indirekt bevis visar man att $P \Rightarrow Q$ genom att istället visa att $\neg Q \Rightarrow \neg P$

1323 *Ledtråd:*
Anta att $x \geq 0$.
Visa att VL > 0 varför x inte kan vara en lösning.

1324 *Ledtråd:*
Anta att $a^2 \neq b^2 + c^2$ där a är hypotenusan. Visa att detta leder till att $2bc\cos A \neq 0$ och att $A \neq 90°$.

1325 *Ledtråd:*
Använd ett indirekt bevis.
Anta att a är ett jämnt tal $2n$.
Visa att $(2n)^2 - 2 \cdot 2n + 7$ är ett udda tal.

1326 a) *Förklaring:*
$2b^2$ är delbart med 2,
då är a^2 det med.
Om a^2 är jämnt så
är a det med, se 1314.

b) Om både a och b går att dela med 2 motsäger det att a/b är förkortat så långt det går.

1327 *Lösning:*
Anta att $a^2 - 4b = 2$.
Det ger $a^2 = 2(2b + 1)$,
dvs a^2 och a är jämna.
Sätt $a = 2c$ ger
$4c^2 - 4b = 2$
$2(c^2 - b) = 1$
VL är ett jämnt tal, HL är 1 vilket ger motsägelse.

Historik: Från Euklides till Gödel

1 a) En triangel

b) 270°.

1405 a) $x = 41°$ och $x = 139°$

b) $x = 41°$ och $x = -41°$

c) $x = 41° + n \cdot 360°$ eller
$x = 139° + n \cdot 360°$

d) $x = \pm\, 41° + n \cdot 360°$

1406 a) $x \approx 52{,}1° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 127{,}9° + n \cdot 360°$

b) $x \approx -20{,}0° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 200{,}0° + n \cdot 360°$

1407 a) $x \approx \pm\, 64{,}0° + n \cdot 360°$

b) $x \approx \pm\, 141{,}3° + n \cdot 360°$

1408 a) $x \approx \pm\, 69{,}5° + n \cdot 360°$

b) $x \approx 20{,}5° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 159{,}5° + n \cdot 360°$

c) $x \approx -12{,}7° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 192{,}7° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Skriv först om till ekvationen $\sin x = -0{,}22$

d) $x \approx \pm 129{,}8° + n \cdot 360°$

1409 a) $x \approx \pm\, 22{,}1° + n \cdot 120°$
Lösning:
$\cos 3x = 0{,}40$
$3x \approx \pm 66{,}42° + n \cdot 360°$
$x \approx \pm\, 22{,}1° + n \cdot 120°$

b) $x \approx -18{,}4° + n \cdot 180°$ eller
$x \approx 108{,}4° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$\sin 2x = -0{,}60$ ger
$2x \approx -36{,}87° + n \cdot 360°$ eller
$2x \approx 216{,}87° + n \cdot 360°$

1410 a) $x \approx \pm\, 318{,}8° + n \cdot 1080°$

b) $x = 540° + n \cdot 720°$
Kommentar:
Svaret kan även skrivas
$x = -180° + n \cdot 720°$

1411 I enhetscirkeln är radien = 1.
Största möjliga sinusvärde är 1 och minsta är -1.

1412 Jonna glömmer att dela perioden 360° med 2. Jonna glömmer att även
$2x = -60° + n \cdot 360°$ ger en lösning.

1413 0°, 360°, 720°

1414 a) $x \approx 95{,}4° + n \cdot 360°$
eller
$x \approx 186{,}6° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
$x - 51{,}0° \approx 44{,}4° + n \cdot 360°$
eller
$x - 51{,}0° \approx$
$\approx 180° - 44{,}4° + n \cdot 360°$

b) $x \approx -5{,}4° + n \cdot 360°$
eller
$x \approx -96{,}6° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
$x + 51{,}0° \approx 45{,}6° + n \cdot 360°$
eller
$x + 51{,}0° \approx$
$\approx -45{,}6° + n \cdot 360°$

c) $x \approx 9{,}9° + n \cdot 72°$
eller
$x \approx 54{,}6° + n \cdot 72°$
Ledtråd:
$5x - 71{,}3° \approx$
$\approx -21{,}72° + n \cdot 360°$
eller
$5x - 71{,}3° \approx$
$\approx 180° - (-21{,}72°) + n \cdot 360°$

d) $x \approx 17{,}9° + n \cdot 720°$
eller
$x \approx -151{,}1° + n \cdot 720°$

1415 a) $x = 323°$
Ledtråd:
Lös först ekvationen fullständigt. Pröva sedan för olika heltalsvärden på n vilka av lösningarna som ligger i intervallet.

b) $x = 224°$

1416 a) Saknar lösning i intervallet.

b) $x = -584°$ och $x = -496°$

1417 a) T ex $\sin x = 0{,}64$
Motivering:
$\sin 760° \approx 0{,}64$

b) T ex $\cos 2x = 0{,}5$

1418 Ja.
Motivering:
$\sin x = 0{,}5$ har två lösningar i intervallet
$\sin 4x = 0{,}5$ har åtta lösningar i intervallet.

1419 a) 559°, 611°, 739°, 791°

b) –76°, –19°, 14°, 71°.

c) 378°, 522°, 558°, 702°

1420 a) $x = 35° + n \cdot 180°$ eller
$x = 55° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$2x = 70° + n \cdot 360°$ eller
$2x = 110° + n \cdot 360°$

b) $x = 0° + n \cdot 180°$ eller
$x = 45° + n \cdot 90°$
Ledtråd:
$3x = x + n \cdot 360°$ eller
$3x = 180° - x + n \cdot 360°$

c) $x = -30° + n \cdot 360°$ eller
$x = 10° + n \cdot 120°$

1424 a) $x = 0° + n \cdot 360°$ eller
$x = 180° + n \cdot 360°$
vilket kan sammanfattas till
$x = n \cdot 180°$

b) $x = \pm\, 90° + n \cdot 360°$
vilket kan sammanfattas till
$x = 90° + n \cdot 180°$
Kommentar:
Pricka in lösningarna i enhetscirkeln så blir det enklare att se hur de kan sammanfattas.

c) $x = n \cdot 180°$ eller
$x = 90° + n \cdot 180°$
vilket kan sammanfattas till
$x = n \cdot 90°$
Ledtråd:
Lös ekvationen
$\sin x = 0$ och $\cos x = 0$.

1425 a) $x = n \cdot 180°$ eller
$x \approx 17{,}5° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 162{,}5° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
$\sin x - 0{,}3 = 0$ ger
$\sin x = 0{,}3$

b) $x = 90° + n \cdot 180°$ eller
$x = \pm\, 60° + n \cdot 360°$

c) $x = 90° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$2\sin x - 5 = 0$ saknar lösning

1426 a) $x = n \cdot 180°$ eller
$x \approx 48{,}6° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 131{,}4° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Bryt ut $\sin x$

b) $x = 90° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
Skriv om till
$\cos^2 x - 5\cos x = 0$
och bryt ut $\cos x$

1427 *Lösning:*
Formeln för dubbla vinkeln ger VL $= \sin 2x$.
$\sin 2x$ har största värde 1 varför ekvationen saknar lösningar.

1428 a) $x = n \cdot 180°$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas om till
$2\sin x \cos x - 2\sin x = 0$
vilket ger
$\sin x = 0$ och $\cos x = 1$.
b) $x = 90° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Sätt $\sin x = t$ vilket ger en andragradsekvation.

1429 $x = 270° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 19{,}5° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 160{,}5° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Använd trigonometriska ettan och sätt sedan $\sin x = t$

1430 $x = n \cdot 90°$ eller
$x \approx \pm\, 36{,}3° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$\sin 4x = \sin (2 \cdot 2x) =$
$= 2\sin 2x \cos 2x$

1431 $x = 30° + n \cdot 360°$ eller
$x = 150° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx -11{,}5° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 191{,}5° + n \cdot 360°$

1432 $x = 90° + n \cdot 180°$ eller
$x = \pm\, 120° + n \cdot 360°$

1433 $x = 180° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx \pm\, 70{,}5° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Ekvation kan skrivas
$1 + 2\cos x + 2\cos^2 x - 1 =$
$= 1 - \cos^2 x$
Förenkla och sätt $\cos x = t$

1434 48,2°, 96,4°, 35,4°
Ledtråd:
Triangelns vinkelsumma ger $0° < 3x < 180°$. Använd detta tillsammans med sinussatsen.

1435 a) $A \approx 82{,}8192°$
$B \approx 41{,}4096°$
b) $A = 2B$
Ledtråd:
Använd cosinussatsen och sambandet
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

1502 a) 60°/s
b) 1,5 s
c) 0,5 s
Ledtråd:
Från A till C är vridningen 30° vilket med hjälp av a) ger svaret. Alternativt lös ekvationen $y = 1{,}5$
där $y = 3\sin 60t$

1503 a) $120° < v < 240°$
b) $0° \le v < 30°$ och
$150° < v \le 180°$

1504 k kan ha värdet
$k = 28° + n \cdot 360°$ eller
$k = 148° + n \cdot 360°$

1505 Ja.
Motivering:
För $n = 1$ är $(1 - n)^2 = 0$
För $n \ge 2$ är $(1 - n)^2 > 0$

1506 45 m
Ledtråd:
Rita figur. På 5 min snurrar hjulet 5/3 varv eller 600°.

1507 a) Största värde = 25
Minsta värde = 21
Ledtråd:
$-1 \le \sin x \le 1$ ger
$-2 \le 2\sin x \le 2$
b) Största möjliga värde = 200
Minsta möjliga värde = 25

1508 Ja, $v = n \cdot 180°$.
Ledtråd:
$\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$ om $\sin v = 0$

1509 $-1 \le a \le 4$
Ledtråd:
$-1 \le \dfrac{2a-3}{5} \le 1$

1510 5
Lösning:
$\sin^2 10° + \sin^2 80° =$
$= \sin^2 10° + \cos^2 10° = 1$
$\sin^2 20° + \sin^2 70° =$
$= \sin^2 20° + \cos^2 20° = 1$
$\sin^2 30° + \sin^2 60° =$
$= \sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$
$\sin^2 40° + \sin^2 50° =$
$= \sin^2 40° + \cos^2 40° = 1$
$\sin^2 90° = 1$

1511 *Lösning:*
$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right) =$$
$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{\cos A}}_{>1} + \underbrace{\frac{1}{\sin A}}_{>1} + \underbrace{\frac{2}{\sin 2A}}_{\ge 2} > 5$$

1512 a) *Lösning:*
Bevis:
Supplementvinkeln är $180° - A$.
$\sin(180° - A) = \sin A$
$\cos(180° - A) = -\cos A$
dvs om A är snäll så är supplementvinkeln det med.
b) *Lösning:*
Motbevis:
$A = 90°$ ger att A är snäll då
$\sin 90° = 1$ och $\cos 90° = 0$.
$\dfrac{A}{2} = 45°$ är inte snäll då
$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
är ett irrationellt tal.

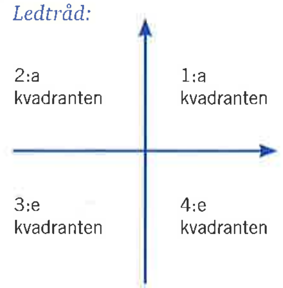
Diagnos 1

1 a) T ex 40° och 140°
Ledtråd:
$\sin(180° - v) = \sin v$
b) Nej.

2 a) $v \approx 63{,}4°$
Ledtråd:
$\tan v = \sin v/\cos v = 2$
b) $a \approx 0{,}447$
Ledtråd:
$\cos v$

3 a) $\cos 900° = -1$
Ledtråd:
$900° = 2 \cdot 360° + 180°$
b) $\sin(-270°) = 1$

4 a) 1:a och 4:e eller 2:a och 3:e
Ledtråd:



b) 1:a och 3:e eller 2:a och 4:e

5 $\sin v \approx 0{,}92$ eller $\sin v \approx -0{,}92$
Ledtråd:
Använd trigonometriska ettan.

6 a) $(-b, -a)$
b) *Ledtråd:*
Utveckla HL med subtraktionssatsen för cosinus.

7 A1 – B6, A2 – B3, A3 – B4,
A4 – B2, A5 – B1, A6 – B5

8 ”Vi äter inte glass medför att det inte är soligt.”
eller
”Om vi inte äter glass är det inte soligt.”

9 *Lösning:*
Antag att $x < 3$.
Detta ger att
$2x + 3 < 2 \cdot 3 + 3 = 9$
Vilket ger en motsägelse eftersom $2x + 3 \ge 9$.
Antagandet att $x < 3$ är felaktigt, dvs $x \ge 3$.
V.S.B.

10 a) $x = \pm\, 60° + n \cdot 360°$
b) $x \approx -14° + n \cdot 360°$
$x \approx 194° + n \cdot 360°$
c) $x = 23° + n \cdot 360°$
$x = 157° + n \cdot 360°$
d) $x = n \cdot 180°$
e) $x \approx 127° + n \cdot 360°$
$x \approx -67° + n \cdot 360°$
f) Lösning saknas.

11 Nej.
Ledtråd:
Lös ekvationen $\sin v = 0{,}1$ fullständigt och undersök för $n = 1$ och 2.

12 a) $x = 30° + n \cdot 360°$
$x = 150° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Skriv om täljaren i vänsterledet med hjälp av formel för dubbla vinkeln och förkorta.
b) $x = \pm 90° + n \cdot 360°$
$x \approx \pm\, 70{,}5° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Bryt ut $\cos x$ och använd nollproduktmetoden.

13 Största värdet = 1 $(v = 90°)$
Minsta värdet ≈ 0,17 $(v = 170°)$

14 $180° + n \cdot 360° \le v \le 360° + n \cdot 360°$

Blandade övningar 1A

1 a) –1 b) 1

2 $x \approx 15°, x \approx 165°,$
$x \approx 375°, x \approx 525°$

3 $x = n \cdot 360°$

4 0,12
Motivering:
$\sin^{-1}(0{,}12)$ ger vinkeln vars sinusvärde är 0,12 och sinus för denna vinkel är 0,12.

5 a) $x < 32$ b) $\sin x \ne 0{,}5$

6 a) $\neg P: x < 2 \quad \neg Q: 2x + 3 < 7$
b) *Ledtråd:*
Visa att $2x + 3 < 7$ ger att $x < 2$

7 $\sin x + \cos x$

8 b, c, a
Motivering:
Se enhetscirkeln.
$\cos 460° = \cos 100° < 0$
$\sin 885° = \sin 165° = \sin 15° < \sin 24°$

9 *Ledtråd:*
Sätt $u = v = A$

10 *”Om minst en blir godkänd klarade minst en provet.”*

11 $\cos v = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
Ledtråd:
Använd trigonometriska ettan.
$90° < v < 180°$ ger att $\cos v < 0$.

12 $\cos 2x = -\dfrac{7}{8}$
Ledtråd:
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

13 *Ledtråd:*
Visa t ex att höger led kan skrivas om till vänster led. Börja med att bryta ut $\sin x$.

14 *Lösning:*
Motsägelsebevis:
Antag att $\sin v + \cos v > \sqrt{2}$
vilket ger $(\sin v + \cos v)^2 > 2$
Omskrivning ger vänster led
$\sin^2 v + 2\sin v \cos v + \cos^2 v =$
$= 1 + \sin 2v \le 2$ då $\sin 2v \le 1$
vilket motsäger antagandet,
dvs $\sin v + \cos v \le \sqrt{2}$.

15 *Ledtråd:*
Skriv om vänsterledet. Förläng den första termen med $1 + \cos x$ och förenkla nämnaren till $\sin^2 x$.
Skriv om andra termen till $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$
och sätt på gemensamt bråkstreck. Bryt ut $\cos^2 x$ i täljaren och förenkla.

16 a) $x \approx 56{,}1° + n \cdot 360°$
$x \approx 123{,}9° + n \cdot 360°$
b) $x \approx \pm\, 48{,}4° + n \cdot 180°$

17 a) T ex $\sin x = 0{,}927$
b) T ex $\cos x = -0{,}139$

18 *Lösning:*
Om k och n är heltal kan differensen skrivas
$2k + 1 - (2n + 1) = 2k - 2n =$
$= 2(k - n)$ vilket är ett jämnt tal eftersom $k - n$ är ett heltal.

19 Nej.
Motivering:
$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

20 $\cos 95° + \cos 55°$
Ledtråd:
Uttrycket kan förenklas till
$2\cos a \cos b$

21 a) $-b$ b) b

22 Nej.
Motivering:
$x \approx 141° + n \cdot 900°$
eller
$x \approx -191° + n \cdot 900°$

23 Nej.
Motivering:
$\tan 89° = \dfrac{\sin 89°}{\cos 89°} \approx 57$
$\tan 89{,}9° = \dfrac{\sin 89{,}9°}{\cos 89{,}9°} \approx 573$
När v närmar sig 90° närmar sig $\cos v$ 0 och $\tan v$ växer obegränsat.

24 *Ledtråd:*
Gör ett indirekt bevis och visa att om n är ett jämnt tal så är n^3 ett jämnt tal.

25 Nej, Anders har fel.
Motivering:
En fördubbling av noll är noll vilket ger att vinklarna $v = n \cdot 180°$ motsäger påståendet.
Ledtråd:
Lös ekvationen $2\sin x = \sin 2x$.

26 a) $x = n \cdot 360°$ och
$x = 20° + n \cdot 40°$
Ledtråd:
$5x = 4x + n \cdot 360°$ och
$5x = (180° - 4x) + n \cdot 360°$
b) $x = n \cdot 180°$ och
$x = 270° + n \cdot 360°$

27 a) 1
b) Värdet av uttrycket blir 1.
c) Uttryckets värde är 1 för alla $x \neq 90° + n \cdot 180°$.

28 Ekvationen har
- 4 lösningar då $a > 5$ och då $a < -5$.
- 2 lösningar då $a = 5$ och då $a = -5$
- 0 lösningar då $-5 < a < 5$

Blandade övningar 1B

1 $x \approx -310°$, $x \approx -50°$, $x \approx 50°$, $x \approx 310°$
Ledtråd:
$x \approx \pm 50° + n \cdot 360°$.
Pröva med $n = -1$, 0 och 1

2 $x = 15° + n \cdot 180°$
$x = 75° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$2x = 30° + n \cdot 360°$
$2x = (180° - 30°) + n \cdot 360°$

3 a) $\sin v = 3/5$
b) $\cos v = 4/5$
c) $\sin(90° - v) = 4/5$
d) $\sin 2v = 24/25$
Ledtråd:
Använd formeln för $\sin 2v$.

4 a) $x \geq 3$ ger att
$6(x + 1) \geq 6 \cdot (3 + 1) = 24$
b) *Ledtråd:*
Visa att $6(x + 1) < 24$ ger $x < 3$.

5 a) 0,77
Ledtråd:
$\cos 320° = \cos(-40°)$
b) 0,77
Ledtråd:
$\cos(90° - v) = \sin v$

6 0
Ledtråd:
Använd additions- och subtraktionssatserna.

7 D

8 0,94
Ledtråd:
Använd additionsformeln för sinus och att $\sin(110°) = \sin(90° + 20°)$

9 $\sin v = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
Ledtråd:
I tredje kvadranten är $\sin v < 0$.

10 *Ledtråd:*
Antag att $\dfrac{1}{1 + x^2} > 1$
och visa att det ger
$x^2 < 0$ vilket är omöjligt.

11 *Ledtråd:*
Skriv t ex om VL genom att först bryta ut $\sin x$ och sedan använda formel för dubbla vinkeln.

12 T ex $\cos 3x = 1$

13 $k = 1{,}5$

14 $x \approx 37°$ och $x \approx 323°$
Ledtråd:
$\cos(37°) = \cos(-37°) =$
$= \cos(-37° + 360°)$

15 a) $v = 210°$ och $v = 330°$
b) $210° \leq v \leq 330°$

16 T ex $A \approx 0{,}287$
Ledtråd:
$\sin^{-1} 0{,}1 \approx 5{,}739°$
$A \cdot 20° \approx 5{,}739°$
Kommentar:
Löser vi ekvationen $\sin 20A = 0{,}1$ får vi samtliga värden på A.

17 Nej.
Motivering:
Kvadraten av ett udda tal är udda. Summan av två udda tal är jämn, dvs om vi bara har udda tal så är VL jämn medan HL är udda, vilket ger motsägelse.

18 a) $x = n \cdot 180°$
b) $x \approx 13{,}9° + n \cdot 90°$
$x \approx 47{,}1° + n \cdot 90°$

19 Enhetscirkelns ekvation är $x^2 + y^2 = 1$ vilket med $x = \cos v$ och $y = \sin v$ ger trigonometriska ettan.

20 $a > 2/3$ eller $a < -2/3$
Ledtråd:
Lösning saknas om $\cos 3x > 1$ eller $\cos 3x < -1$, dvs $3a/2 > 1$ eller $3a/2 < -1$

21 *Ledtråd:*
Gör ett motsägelsebevis.
Antag att VL > 4 och visa med hjälp av formel för dubbla vinkeln att det ger en motsägelse.

22 T ex $\sin 4x =$
$= 4\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$
Ledtråd:
Formeln för dubbla vinkeln ger $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

23 $x \approx \pm 65{,}5° + n \cdot 360°$
Ledtråd:
Skriv om VL till $(1 - \cos^2 x)/2$ och sätt $\cos x = t$

24 *Ledtråd:*
$a^2 + 3 = (a - 1)(a + 1) + 4$
Motivera varför HL är delbar med 4.

25 a) 46,6°
b) Formeln ger
$\sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{5}{32}}$
med lösning $A = 46{,}6°$
c) *Ledtråd:*
Formel för dubbla vinkeln
$\cos A = 1 - 2\sin^2 \dfrac{A}{2}$
Kombinera detta med cosinussatsen.

26 180° om $a = -1$ eller $a = 1$.

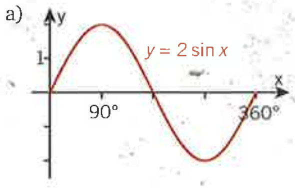
27 a) $(2\cos v, 2\sin v)$
b) *Ledtråd:*
Sätt in koordinaterna från a) i cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 2^2$

2

2102 a) Perioden är $360°/10 = 36°$
Kommentar:
När x går från 0° till 36° så går $10x$ från 0° till 360°.
b) Perioden är
$\dfrac{360°}{0{,}1} = 3\,600°$

2103 Ja.
Motivering:
Båda funktionerna har perioden $360°/3 = 120°$.

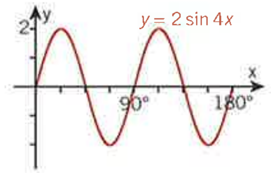
2104 a) 90°
b) 480°
c) 180°
d) 1 080°
Ledtråd:
$k = \dfrac{1}{3}$

2105 a)


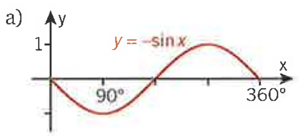
b) Största värde = 2
Minsta värde = −2
c) Amplituden = 2

2106 a) Amplitud = 4
Period = 360°
b) Amplitud = 100
Period = 144°
c) Amplitud = 50
Period = 72°
Ledtråd:
Amplituden är alltid ett positivt tal.
Amplituden =
$= \dfrac{\text{största värdet} - \text{minsta värdet}}{2}$
d) Amplitud = 10
Period = 80°

2107 T ex $y = 2{,}5 \sin 1{,}8x$
Ledtråd:
$\dfrac{360°}{k} = 200°$

2108 a) b)


2109 a) Kurvorna är identiska men förskjutna 90° i förhållande till varandra.
b) $45° < x < 225°$

2110 a)


b) Största värde = 2
Minsta värde = −2

2111 Ja, ekvationen har en lösning $x = 0° + n \cdot 180°$.
Motivering:
VL = HL = 0 om $\sin x = 0$

2112 $-1{,}2 < A < 1{,}2$

2113 720°
Ledtråd:
$x_1 + x_2 = 180°$
$x_3 = 360° - x_2$
$x_4 = 360° - x_1$

2114 3,3
Ledtråd:
Alla termer har samma värde.

2115 0
Ledtråd:
$\sin 359° = \sin(-1°) = -\sin 1°$
$\sin 358° = -\sin 2°$, o.s.v.
Addera par som har summan 0.

2117 $x \approx 91{,}1°$

2118 Två.
Motivering:
Graferna skär varandra på två ställen.

2119 Avläs t ex avståndet mellan två på varandra följande maxpunkter.
Perioden = 600°

2120 a) $0 < a < 1$
Ledtråd:
Linjen $y = a$ ska skära kurvan $y = \sin x$ på två ställen i intervallet.
b) $a = 1$
c) $a > 1$

2121 a) b)
$x_1 = 510°$, $x_2 = 570°$, $x_3 = 690°$
Ledtråd:
Ekvationens lösning är
$x = \pm 30° + n \cdot 180°$

2122 $k = -0{,}5$
Ledtråd:
$\cos x = -0{,}5$ har lösningen $x = 120°$ och $x = 240°$ i intervallet.

2123 $b < -3$ och $b > 3$

2124 Antal lösningar = $2k$
Ledtråd:
Varje period ger 2 lösningar.

2126 a) $y = \sin x$ förskjuts 5 enheter uppåt.
b) $y = \sin x$ förskjuts 2,5 enheter nedåt.

c) $y = \sin x$ förskjuts 55° åt vänster.

d) $y = \sin x$ förskjuts 35° åt höger.

2127 a) $y = \sin x + 3$

b) $y = \sin (x + 60°)$

2128

	Största värde	Minsta värde
a)	5	1
b)	7	−1
c)	−4	−6
d)	−9	−11

2129 T ex $y = 11 \sin x + 1$
Ledtråd:
Börja med att beräkna amplituden.

2130 $a > 5$ eller $a < -5$
Ledtråd:
Kurvan $y = 5 \sin x$ ska förskjutas uppåt eller nedåt mer än amplituden 5.

2131 a) $y = \cos x$ förskjuts 60° åt vänster och 3,5 enheter uppåt.

b) $y = \cos x$ förskjuts 20° åt höger och 1,5 enheter nedåt.

2132 $y = \sin 3 (x - 36°)$
eller $y = \sin (3x - 108°)$
Ledtråd:
I kurvans ekvation $y = \sin 3x$ ska x ersättas med $(x - 36°)$

2133 Viktoria har rätt.
Motivering:
Förskjuter vi en sinuskurva i sidled får vi en cosinuskurva, t ex $y = \sin (x + 90°) = \cos x$

2134 a) $y = \sin x$ ska förskjutas 180° åt höger eller vänster.

b) $y = \cos x$ ska förskjutas 90° åt vänster eller 270° åt höger.

2135 $A = 3, v = 30°$
Ledtråd:
$y(0) = -1{,}5$ ger
$-1{,}5 = 3 \sin (-v)$
$-v = \sin^{-1} (-0{,}5)$

2136 25° åt vänster.
Ledtråd:
$\cos (2x + 50°) = \cos 2(x + 25°)$

2137 $a = 3$ eller $a = -3$
Ledtråd:
Vi får största värdet då
$\sin 2x = -1$ eller då $\sin 2x = 1$.

2138 a) Att $\sin x = \cos (x + 270°)$

b) *Lösning:*
Additionsformeln för cosinus ger $\cos (x + 270°) =$
$= \cos x \cdot \cos 270° - \sin x \cdot \sin 270° =$
$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x$

2139 $p = 1,\ q = -2$ eller
$p = -1,\ q = -2$

2140 a) Kurvans ekvation kan skrivas $y = 1$
Motivering:
Trigonometriska ettan.

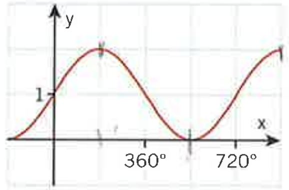
b) Kurvans ekvation kan skrivas $y = 2 \cos x$
Motivering:
$\sin (90° - x) = \cos x$

c) Kurvans ekvation kan skrivas $y = 2 \sin (x + 30°)$
Motivering:
Period = 360°
$y = 0$ då x är t ex −30°, 150° eller 330°.
$\cos 150° + \sqrt{3} \cdot \sin 150° = 0$
Största värde då $x = 60°$
$\cos 60° + \sqrt{3} \cdot \sin 60° = 2$

2143 a) $y = 4 \sin x$
Motivering:
En sinusfunktion med amplituden 4 och perioden 360°.

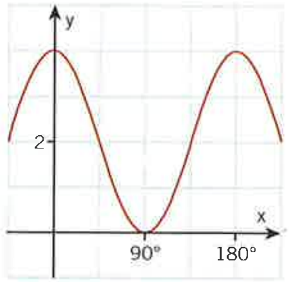
b) $y = 2 \sin 2x$
Motivering:
En sinusfunktion med amplituden 2 och perioden 180°.

2144 a) $y = \sin 0{,}5x + 1$



Ledtråd:
Amplitud = 1
Period = 360°/0,5 = 720°
$y = \sin 0{,}5x$ förskjuts 1 enhet uppåt.

b) $y = 2 \cos 2x + 2$



2145 4 perioder
Motivering:
En period är 90°.

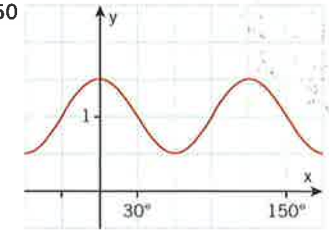
2146 $y = 2 \sin 6(x - 10°)$

2147 B, D, E

2148 $a = 36°, b = 300, c = 500$
Ledtråd:
a är halva perioden,
b är förskjutningen uppåt och
c är största värdet.

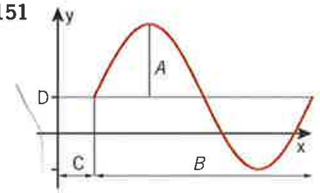
2149 $y = 1{,}5 \sin 2(x + 30°) - 1$
Ledtråd:
Amplituden är 1,5 och perioden 180°. Jämfört med $y = 1{,}5 \sin 2x$ är grafen förskjuten 30° åt vänster och 1 enhet nedåt.

2150



Ledtråd:
Funktionen kan skrivas
$y = 1 - 0{,}5 \sin 3(x - 30°)$

2151



2152 Putte har fel.
Motivering:
$\sin (-x) = -\sin x$ ger
$f(-x) = A \sin k(-x) + b =$
$= -A \sin kx + b$
$-f(x) = -(A \sin kx + b) =$
$= -A \sin kx - b$

2155 a) 180°

b) 90°

c) 540°
Ledtråd:
180°/ (1/3)

d) 900°

2156 a) $x \approx 31{,}0° + n \cdot 180°$

b) $x \approx -78{,}7° + n \cdot 180°$

2157 a) $x \approx 26{,}2° + n \cdot 90°$

b) $x \approx -7{,}3° + n \cdot 60°$
Ledtråd:
$\tan 3x = -0{,}4$

2158 a) $x \approx 22{,}6° + n \cdot 360°$

b) $x \approx -204{,}6° + n \cdot 540°$
Ledtråd:
$\tan \frac{x}{3} = -2{,}5$

2159 a) $x \approx 38{,}7° + n \cdot 180°$

b) $x \approx 26{,}6° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
$\tan x = 0{,}5$

2160 Nej.
Motivering:
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
När $\cos x$ närmar sig noll kan kvoten bli hur stor eller liten (negativ) som helst.

2161 T ex 45° och −135°.
Ledtråd:
45° minus en period är −135°.

2162 0,75 $\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

2163 Räknaren visar *Ma Error* eller liknande.
Motivering:
$\tan x$ är inte definierat då
$\cos x = 0$, dvs då
$x = 90° + n \cdot 180°$

2164 $k = 6$
Ledtråd:
Perioden är 30°.

2165 15
Motivering:
$\tan a = \tan (a + 180°) =$
$= \tan (a + 360°)$

2166 a) $x \approx 71{,}6° + n \cdot 180°$

b) $x \approx -21{,}8° + n \cdot 180°$

2167 0
Ledtråd:
$\tan 190° = \tan 10°$
$\frac{\sin 10°}{\cos 10°} = \tan 10°$

2168 $x \approx 204°$ och $x \approx 264°$

2169 Nej, graferna överensstämmer inte.

2170 $90° < x < 180°$,
$270° < x < 360°$
Motivering:
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
I andra kvadranten är $\sin x$ positiv och $\cos x$ negativ.
I fjärde kvadranten tvärtom.

2171 a) $y = \tan 0{,}5x$

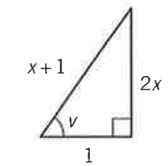
b) $y = 1 - \tan x$

2172 Ja, graferna överensstämmer.
Bevis:
$-\frac{1}{\tan (x + 90°)} =$
$= -\frac{\cos (x + 90°)}{\sin (x + 90°)} =$
$= -\frac{\cos x \cos 90° - \sin x \sin 90°}{\sin x \cos 90° + \cos x \sin 90°} =$
$= -\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan x$

2173 $a \approx 208{,}8$
Ledtråd:
Finn den minsta lösningen som är större än 180°.

2174 $x = 135° + n \cdot 180°$ eller
$x \approx 71{,}6° + n \cdot 180°$
Ledtråd:
Ersätt 1 i HL med $\cos^2 x + \sin^2 x$.
Division med $\cos^2 x$ och förenkling ger $\tan^2 x - 2 \tan x - 3 = 0$
$\tan x = -1$ och $\tan x = 3$

2175 $x = \frac{2}{3}$



Ledtråd:
$\tan v = 2x$
$\cos v = \frac{1}{1 + x}$
Använd Pythagoras sats.

2177 a) 3 b) 19 c) 65 d) 97

2178 a) $y = 10 \sin (x + 53{,}1°)$

b) $y = 26 \sin (x + 67{,}4°)$

c) $y = 17 \sin (x - 61{,}9°)$

d) $y = \sqrt{130} \sin (x - 52{,}1°)$

2179 −51
Ledtråd:
Skriv om till
$y = 10 + 61 \sin (x + v)$
$y_{min} = 10 - 61$

2180 *Förklaring:*
$\sin x$ och $\cos x$ är förskjutna i förhållande till varandra och har inte sina största värden samtidigt.

2181 $x = 90°$ och $x = 330°$

2182 $y = 1{,}5\sin(x + 36{,}9°)$
Ledtråd:
Graferna är $y = 1{,}2\sin x$ och $y = 0{,}9\cos x$.

2183 Nej.
Motivering:
$\sin x$ och $\cos 2x$ har olika perioder.

2184 a) $a = 20$
b) $x \approx 43{,}6°$

2185 a) $x \approx -42° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 115° + n \cdot 360°$
b) Ingen lösning.
Ledtråd:
Omskrivning och förenkling ger $\sin(x + 67{,}4°) = \frac{27}{26} > 1$
c) $x = 90° + n \cdot 360°$ eller
$x \approx 143° + n \cdot 360°$

2186 $y = 2\sin(2x + 30°)$
Ledtråd:
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

2187 $y = 2\sin x + 2\cos x$
Ledtråd:
Förskjutning 45° ger $a = b$.

2188 *Ledtråd:*
Jämför med härledningen för $y = a\sin x + b\cos x$ och justera den.

2189 Ja.
Motivering:
Funktionen går att skriva $y = c\sin(x + v)$ och alla sinusfunktioner kan skrivas som en förskjuten cosinusfunktion.

2204 a) Multiplicera med $\frac{\pi}{180}$
$180° = \pi$ rad ger
$1° = \frac{\pi}{180}$ radianer
b) Multiplicera med $\frac{180°}{\pi}$
$180° = \pi$ rad ger
$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$

2205 a) 0,60 c) 12,18
b) 3,38

2206 a) 16,2° c) −573,0°
b) 328,9°

2207 a) *Motivering:*
$180° = \pi$ rad ger direkt
$90° = \frac{\pi}{2}$ rad
b) *Motivering:*
1 varv motsvarar 2π rad.
2 varv motsvarar 4π rad eller 720°.

2208 a) *Lösning:*
$300° = 300 \cdot \frac{\pi}{180} =$
$= \frac{300\pi}{180} = \frac{30\pi}{18} = \frac{5\pi}{3}$
b) *Lösning:*
$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$

2209 a) $\sin 2° \approx 0{,}03$
b) $\sin 2 \approx 0{,}91$

2210 *Förklaring:*
Se t ex enhetscirkeln, $\sin 1°$ är ett litet värde nära 0.
$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$
$\sin 57°$ är betydligt större.

2211 0

2212 a) $x \approx 0{,}41 + n \cdot 2\pi$ eller
$x \approx 2{,}73 + n \cdot 2\pi$
b) $x \approx \pm 0{,}45 + n \cdot 2\pi$
c) $x \approx -0{,}20 + n \cdot 2\pi$ eller
$x \approx 3{,}34 + n \cdot 2\pi$
d) $x \approx 1{,}37 + n \cdot \pi$

2213 a) $x = \pi/2 + n \cdot 2\pi$
b) $x = n \cdot \pi$
c) $x = \pi + n \cdot 2\pi$
d) $x = \pi/2 + n \cdot \pi$

2214 a) $x = \pi/12 + n \cdot \pi$ eller
$x = 5\pi/12 + n \cdot \pi$
Ledtråd:
Se tabell för exakta värden.
b) $x = \pi/8 + n \cdot \pi/2$
c) $x = n \cdot 2\pi$ eller
$x = \pi/2 + n \cdot 2\pi$
d) $x = \pi/6 + n \cdot \pi$

2215 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (eller $\frac{1}{\sqrt{2}}$)
Lösning:
$\tan(-6\pi) + \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) =$
$= \tan 0 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

2216 Ja, 0° = 0 rad.

2217 a) $t \approx 8{,}8$ och $t \approx 15{,}2$
Ledtråd:
Lös ekvationen fullständigt. Undersök, med olika n, vilka lösningar som ligger i intervallet.
b) $t \approx 2{,}1$ och $t \approx 3{,}5$

2218 a) Nej
b) Ja
Motivering:
$v = \tan^{-1} x$ ger $\tan v = x$
$(\tan x)^{-1} = \frac{1}{\tan x}$

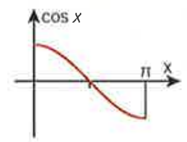
2219 a) $x = n \cdot \pi$ eller
$x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
Ledtråd:
Använd formeln för dubbla vinkeln. Faktorisering ger sedan $\sin x = 0$
eller $\cos x = \frac{1}{2}$
b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$
Ledtråd:
Ekvationen kan förenklas till $\sin 2x = 1$.

2220 0,11 (0,112...)
Ledtråd:
Bågen är i enhetscirkeln lika lång som vinkeln i radianer. Bestäm vinklarna som ger $\cos v = 0{,}4$ och $\cos v = 0{,}5$.

2221 a) Om x är en vinkel så är $f(x) = x$.
b)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	2,283

c) *Förklaring:*



Om $\cos x = k$ och $\cos^{-1} k = x$ så måste $\cos x$ begränsas till ett intervall där varje tillåtet k bara ger *ett* x.
Vi har valt $0 \leq x \leq \pi$.
För $x > \pi$ återfår vi det x i detta intervall för vilket $\cos x = \cos 4$.

2223 a) 2,9 m 9,5 m²
b) 9,3 m 30,2 m²
c) 18,7 m 60,6 m²
d) 19,6 m 63,8 m²

2224 a) 1,5°
b) 68°

2225 2,3 längdenheter
Ledtråd:
Om radien är 1 så är bågen lika med vinkeln i radianer.

2226 30,5 cm (30,47...)
Ledtråd:
$v = \frac{360°}{6}$, $O = 2r + b$

2227 2,7 cm (2,72...)

2228 $3 \cdot 10^3$ km
Ledtråd:
För en så liten vinkel är diametern ≈ cirkelbågen.

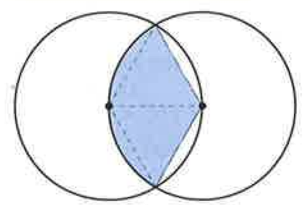
2229 *Förklaring:*
Bågen är $2a$ cm. Definitionen ger att bågen är a cm om medelpunktsvinkeln är 1 radian. Fördubblas vinkeln så fördubblas bågen.

2230 a) 6150 km (6148,11...)
b) 69,4°

2231 a) $\frac{15\pi}{8}$ rad ≈ 5,9 rad
b) $r = 15$ cm: $v = 2000$ rad/min
$r = 16$ cm: $v = 1875$ rad/min
Ledtråd:
Bestäm hur många varv hjulen roterar per minut, 1 varv = 2π rad.

2232 $A = \frac{r^2}{2}(v - \sin v)$
Ledtråd:
Använd areasatsen.

2233 $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m²
Ledtråd:
Beräkna båda cirklarnas area minus gemensam area.
Den gemensamma arean kan delas upp t ex i en cirkelsektor (se färgad area i figur) och två cirkelsegment (ofärgade).



2303 a) $f'(x) = 2\cos x$
b) $f'(x) = -3\sin x$
c) $f'(x) = 5\sin x$
d) $f'(x) = -9\cos x$

2304 a) $f'(x) = -2\sin x + 5\cos x =$
$= 5\cos x - 2\sin x$
b) $f'(x) = 2\sin x + 1{,}3\cos x$
c) $f'(x) = 3 - 0{,}2\cos x$
d) $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sin x}{3}$
Ledtråd:
$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\cos x$

2305 Vi måste använda vinkelenheten radianer.

2306 a) $f'(0) = -2$
Ledtråd:
Bestäm först
$f'(x) = 2x - 2\cos x$
Beräkna sedan
$f'(0) = 2 \cdot 0 - 2\cos 0$
b) $h'(\pi) = -0{,}7$
c) $s'(1{,}2) \approx -1{,}7$

2307 a) 1
Ledtråd:
Derivatans värde då $x = 0$.
b) $y = x$
Ledtråd:
$y = kx + m$
$k = 1$ och (0, 0) ger $m = 0$.

2308 $y = -x + \frac{\pi}{2}$

2309 a) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
Ledtråd:
Kurvan $y = \sin x$ avtar i detta intervall.
b) *Motivering:*
Derivatans värde är negativt, dvs under x-axeln, i intervallet.

2310 $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$
Tolkning:
För dessa x-värden har tangenten lutningen 0, dvs funktionen har lokala max- eller minvärden.

2311 1,5
Motivering:
$f'(x) = 1{,}5\cos x$ har största värdet 1,5.

2312 $A = 5$, $B = 4$

2313 $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

2314 $x \approx 0{,}30 + n \cdot 2\pi$ eller
$x \approx 2{,}84 + n \cdot 2\pi$
Ledtråd:
Extrempunkter har $y' = 0$.

2315 a) $\sin 0{,}11 \approx 0{,}11$
b) Nej.
Motivering:
$\sin 0{,}11° \approx 0{,}0019$

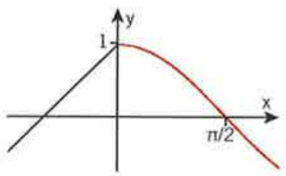
2316 T ex $y = 0{,}5x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$
$y = 0{,}5x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$

2317 a) $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$
$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 0{,}01745\ldots$
b) $y' \approx 0{,}01745\cos x$

2318 $y' = -\sin x$
Ledtråd:
Ställ upp differenskvoten och använd additionssatsen för cosinus.

2319 $\cos x$
Kommentar:
Denna differenskvot är symmetrisk runt punkten $(x, \sin x)$ och ger samma resultat som
$\dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

2320 a) Ja, $a = 1$
b) Nej, $f'(x) = 1$ för $x < 0$ och $f'(0) = 0$.



2322 a) Yttre funktion: $y = \sin u$
Inre funktion: $u = 2x$
$y' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$
b) Yttre funktion: $y = 2\cos u$
Inre funktion: $u = 0{,}5x - 1$
$y' = -2\sin(0{,}5x - 1) \cdot 0{,}5 =$
$= -\sin(0{,}5x - 1)$
c) Yttre funktion: $y = u^5$
Inre funktion: $u = x^3 + 4$
$y' = 5(x^3 + 4)^4 \cdot 3x^2 =$
$= 15x^2 \cdot (x^3 + 4)^4$
d) Yttre funktion: $y = u^2$
Inre funktion: $u = \cos x$
$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) =$
$= -2\cos x \cdot \sin x$

2323 a) $y' = 9\cos 9x$
b) $y' = -0{,}3\sin 0{,}3x$

2324 a) $y' = 5\cos\frac{x}{3}$
Ledtråd:
Inre derivata är $\frac{1}{3}$
b) $y' = -6\pi\sin 2\pi x$

2325 a) $y' = 10\cos(5x + 1)$
b) $y' = -2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right)$

2326 a) $y' = 2\sin x \cdot \cos x$
b) $y' = -3\cos^2 x \cdot \sin x$

2327 $k = 2$

2328 $y = \cos kx$ ger $y' = -k\sin kx$

2329 A (produkt av funktioner)
D (kvot av funktioner)

2330 a) $y' = -4\sin x(1 + \cos x)^3$
b) $y' = 3x^2\cos(1 + x^3)$

2331 a) $y' = 8\cos(2x - 1) \cdot \sin^3(2x - 1)$
Ledtråd:
$y = (\sin(2x - 1))^4$
Inre derivatan är
$2\cos(2x - 1)$.
b) $y' = -\cos(\cos x) \cdot \sin x$

2332 a) $y' = n(1 + \sin ax)^{n-1} \cdot a\cos ax =$
$= na\cos ax(1 + \sin ax)^{n-1}$
b) $y' = Ab\cos(bx + c)$

2333 $y = -2x + \dfrac{3\pi}{2} - 3$
Ledtråd:
$k = -2$
$x = \dfrac{3\pi}{4}$ ger $y = -3$

2334 a) T ex $F(x) = -0{,}5\cos 2x$
b) T ex $F(x) = 2\sin 0{,}5x$

2335 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pi}{180}\cos x \approx 0{,}01745\cos x$
Tolkning:
Med vinkelenheten grader har $\sin x$ derivatan
$\dfrac{\pi}{180}\cos x \approx 0{,}01745\cos x$

2336 $F'(\pi) = 0$
Ledtråd:
$F'(\pi) = f'(g(\pi)) \cdot g'(\pi) =$
$= f'(\cos\pi) \cdot (-\sin\pi) =$
$= f'(-1) \cdot (-\sin\pi)$

2337 *Ledtråd:*
$y' = 2k\sin kx \cdot \cos kx = k\sin 2kx$

2402 a) 0,70 A
b) 0,02 s
Ledtråd:
Period, $T = \dfrac{2\pi}{100\pi}$

2403 a) Högsta = 120 mmHg
Lägsta = 80 mmHg
b) Amplitud = 20
Period = 1,2 s $(2\pi/5{,}2)$
c) $y(3) \approx 102$
$y'(3) \approx -103$
Tolkning:
Vid tiden 3 s är blodtrycket 102 mmHg och minskar med hastigheten 103 mmHg/s.
Kommentar:
Blodtrycket varierar med hjärtas slag varför förändringshastigheten blir hög.

2404 Vi vill ofta bestämma förändringshastigheter och radianer ger en enklare derivata.

2405 T ex $y = 4\sin x + 1$

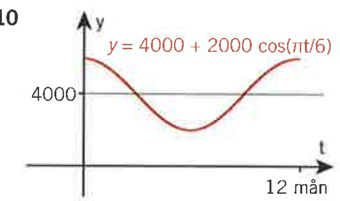
2406 a) 0,3 °C (0,25)
b) Lägst: kl 06.00 (–4 °C)
Högst: kl 18.00 (13 °C)
c) $y'(16) \approx 1{,}1$
Ledtråd:
$y' = -8{,}5\cos\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) \cdot \dfrac{\pi}{12} =$
$= -\dfrac{17\pi}{24}\cos\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$
d) Kl 16.00 stiger temperaturen med hastigheten 1,1 °C/h.

2407 1,142
Motivering:
$y' = 1{,}142\sin 0{,}571x$
har största värdet 1,142
eftersom $\sin 0{,}571x \le 1$

2408 Sant.
Motivering:
Perioden $\dfrac{2\pi}{k}$ är mindre än 2 om $k > \pi$.

2409 a) $y = 20 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + 40$
Ledtråd:
Amplituden = 20,
Perioden = 4 år,
Mittlinjen $y = 40$.
b) 20 st

2410



2411 a) 6 s
Ledtråd:
Bestäm perioden.
b) $v'(t) = \dfrac{0{,}85 \cdot \pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$
Tolkning:
Derivatan ger hur snabbt luftströmmens hastighet förändras.
c) $\dfrac{0{,}85 \cdot \pi}{3} \approx 0{,}89$ liter/s²
d) Amplituden 0,85 ökar och perioden minskar,
dvs $k = \dfrac{\pi}{3}$ ökar.

2412 $x = 0$ och $x \approx 0{,}88$
Ledtråd:
Lös ekvationen grafiskt.

2413 –1
Ledtråd:
$y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

2414 $y'(x) = 0$
Förklaring:
$y(x)$ kan förenklas till 1 med hjälp av trigonometriska ettan.

2415 a) 18,5 h
b) 6 h
c) Dygn 80 och dygn 267, dvs 21 mars och 24 september.
Ledtråd:
$y = 12$ ger efter omskrivning ekvationen
$\sin\dfrac{2\pi(x - 82)}{365} = -0{,}04$
d) $y' = \dfrac{5\pi}{146}\cos\dfrac{2\pi(x - 82)}{365}$
Tolkning:
$y'(x)$ beskriver hastigheten som dagens längd ändras med.

2416 a) 366 dygn
b) $y'_{max} \approx 0{,}095$ för $x \approx 81$,
d v s 21 mars ökar dagens längd med 0,095 h/dygn.
Ledtråd:
y' är störst då
$\cos(0{,}017\,165\,x - 1{,}394) = 1$

2417 a) $y \ge 6{,}0$ för $0 \le t \le 4$ och $12 \le t \le 16$.
b) Kl 11 och kl 23 stiger vattnet med hastigheten 1,0 m/h $(\pi/3)$.
Kl 05 och kl 17 sjunker vattnet med hastigheten 1,0 m/h $(\pi/3)$.
Ledtråd:
$y' = -\dfrac{\pi}{6} \cdot 2{,}0 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6}(t - 2)$

2418 0,36 A
Ledtråd:
$t \approx 0{,}001\,66$ s

2419 Skärningspunkternas koordinater ges exakt av
$(n \cdot \pi,\ n \cdot \pi)$ där
$n = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$
Ledtråd:
Vi söker de x-värden då
$\sin x = 0$ (se enhetscirkeln),
$y = x$ ger y-koordinaten.

2420 π rad
Motivering:
y kan skrivas om till
$y = 2{,}5\sin 2x$.

2421 a) $y = 9\sin(0{,}524x - 2{,}0) + 8$
Ledtråd:
$y = 9\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(x - 3{,}8)\right) + 8$
b) $y(8) \approx 15$
Vid månadsskiftet aug/sept är dygnsmedeltemperaturen 15 °C.
c) $y'(8) \approx -2{,}7$
Vid månadsskiftet aug/sept sjunker dygnsmedeltemperaturen med 2,7 °C/månad.

2422 T ex $y = \sin 3x$

Tema: Radiovågor

1 a) $99{,}7 \cdot 10^6$ st
b) $1{,}00 \cdot 10^{-8}$ s
c) $3{,}3 \cdot 10^{-3}$ s
Ledtråd:
Radiovågens hastighet är $3 \cdot 10^8$ m/s.

2 Mellan $5 \cdot 10^{-5}$ s och 0,05 s.

3 $1 \cdot 10^9$ Hz = 1 GHz

4 3 m

5 $y = 5\sin(2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot t)$

6 a) Största värde $\approx 5{,}57$
Minsta värde $\approx -5{,}57$
b) Största värde = 3
Minsta värde = –3

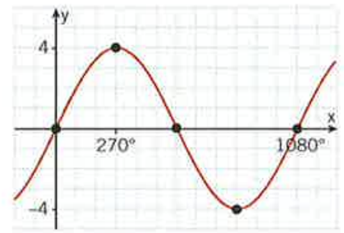
7 Ja, om $a = 6$

8 När $a \le 6$ har alla lokala max $y = 2$ och alla lokala min $y = -2$.
När $a > 6$ är största värde 2 och minsta värde –2, vi har dock lokala max med mindre värde än 2 och lokala min med högre värde än –2.

Diagnos 2

1 Period = 400°, amplitud = 15

2 a) Period = 1 080°, amplitud = 4
b)



c) $90° < x < 450°$

3 Sant.
Motivering:
De har båda 2 skärningspunkter med $y = 1$ i intervallet.

4 $A = 200$, $b = 1{,}5$, $c = 40°$, $d = 100$
Lösning:
Amplituden är 200.
Perioden är $\dfrac{360°}{b} = 240°$.
Grafen är förskjuten 40° åt vänster.
d är "mittlinjen", 100.

5 $a = 2$
Ledtråd:
$\tan ax = 1$ ger
$ax = 45° + n \cdot 180°$

6 a) $\dfrac{7\pi}{6} \approx 3{,}67$
b) 229°

7 a) $x \approx \pm 0,64 + n \cdot 2\pi$

b) $x \approx 0,44 + n \cdot \pi$ eller
$x \approx 1,13 + n \cdot \pi$

Ledtråd:
$2x \approx 0,879 + n \cdot 2\pi$ eller
$2x \approx (\pi - 0,879) + n \cdot 2\pi$

c) $x \approx 1,04 + n \cdot \pi$

d) $x \approx 0,15 + n \cdot \pi/4$ eller
$x \approx 0,52 + n \cdot \pi/4$

8 *Lösning:*
Formel med vinkel i grader:
$b = \frac{v}{360°} \cdot 2\pi r$
v i radianer ger:
$b = \frac{v}{2\pi} \cdot 2\pi r = vr$

9 a) $y' = -5 \sin x - 3 \cos x$

b) $y' = 6x + 4 \sin x$

10 –3
Ledtråd:
Derivatans värde då $x = \frac{\pi}{2}$

11 a) $f'(t) = 10 \cos 2t$

b) $y' = -6x \sin(x^2 + 1)$

12 $0 < x < \frac{\pi}{2}$

13 a) 15 min

b) $2,8 < t < 4,7$
Ledtråd:
När är $d < 0$?
Lös detta t ex grafiskt.

14 Ja.
Motivering:
$y_{max} = 2 - (-0,5) = 2,5$
$y' = -1,5 \cos 3x$ $y'_{max} = 1,5$

Blandade övningar kapitel 2

1 a) Period = 180° eller π rad.
Amplitud = 3

b) Period = 720° eller 4π rad.
Amplitud = 4

2 a) $y' = 10 \cos 5x + 3 \sin x$

b) $y' = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$

3 420°

4 8,6 cm

5 $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 6\pi$ eller

$x = \frac{5\pi}{2} + n \cdot 6\pi$

6 a) $C = 4$

b) $C = 24$

7 B

8 $A = 2$, $k = 3$, $b = 1$

9 $\sin 25°$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\tan\frac{\pi}{3}$
Motivering:
$\sqrt{1/4} = 1/2 = 0,5$
Enhetscirkel och tabell ger
$\tan \pi/3 = \sqrt{3} > 1$
$\sin 25° < \sin 30° = 0,5$
$\cos\frac{\pi}{6} = 0,5 < \cos\frac{\pi}{5} < 1$

10 $x = \frac{5\pi}{6}$
Ledtråd:
$f' = 0$ ger ekvationen
$\cos 2x = 0,5$.

11 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12 10
Ledtråd:
Bestäm c om y skrivs
på formen $y = c \sin(x + v)$

13 T ex $y = \sin 2x$ eller $y = 0,5 \sin 4x$
Ledtråd:
$y' = k \cdot A \cos kx$
Utnyttja t ex att $\cos(n \cdot 2\pi) = 1$

14 $x_1 = \frac{2\pi}{9}$ $x_3 = \frac{8\pi}{9}$

$x_2 = \frac{\pi}{3}$ $x_4 = \frac{14\pi}{9}$

Ledtråd:
$2x = x + \pi/3 + n \cdot 2\pi$
$2x = \pi - (x + \pi/3) + n \cdot 2\pi$

15 $a = 8$, $c = 4$

16 $x_1 \approx 13°$, $x_2 \approx 73°$, $x_3 \approx 133°$

17 Falskt.
Motivering:
Om kurvan är förskjuten i höjdled
så är det största värdet större eller
mindre än amplituden.

18 a) 45 cm²
Ledtråd:
Använd t ex areasatsen.

b) 29 cm²

19 T ex $k = 4$
Ledtråd:
T ex ett värde mellan π och 2π ger
$\sin k° > 0$ och $\sin k < 0$.

20 a) Ca 6 år och 7 månader
(78,5 mån).

b) –25 renar/månad (–25,4...)
Ledtråd:
Derivatans värde då $t = 14$.

21 $y = 3 \sin 4x - 1$

22 Ekvationen har 6 lösningar.
Ledtråd:
Rita graferna till $y = \sin 2x$ och
$y = x^2/10 - 1$ och avläs antalet
skärningspunkter.

23 Ja.
Motivering:
Lutningen ges av $y' = 2\cos 2x + 1$
som har största värde 3.

24 a) kl 20

b) mars, oktober

c) 30 mars, 30 september

25 *Förklaring:*
Vänsterled är bara lika med noll
om täljaren är noll. Täljarens
minsta värde är 1 så ekvationen
saknar lösning.

26 $0,21 < t < 0,79$

27 a) 3 nollställen

b) $x_1 = 0°$, $x_2 = 180°$, $x_3 = 360°$

c) 5 nollställen

d) $x_1 = 0°$, $x_2 = 107°$,
$x_3 = 180°$, $x_4 = 253°$,
$x_5 = 360°$

e) 5 nollställen då $-2b < a < 2b$
3 nollställen då
$a \le -2b$ och $a \ge 2b$

28 a) I mitten av juni.
Ledtråd:
Gör en tabell med dagens nummer och längd i timmar.

b) Dag 170, d.v.s. den 19/6.

Blandade övningar kapitel 1 – 2

1 4π

2 –1
Ledtråd:
Använd enhetscirkeln.

3 $y' = \cos 2x$

4 –2

5 $x_1 = 110°$ och $x_2 = 430°$
Ledtråd:
Lösningarna är
$x \approx 70° + n \cdot 360°$ och
$x \approx (180° - 70°) + n \cdot 360°$

6 *Ledtråd:*
Visa att $16 - 2x < x - 8$
ger att $x > 8$.

7 0,28
Ledtråd:
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

8 $a = 2$, $b = -1$

9 $x = \pm\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$
Ledtråd:
Skriv om till $\cos 3x = 0,5$.

10 $\cos x - \sin x$

11 a) $y = 2 \sin(x - 30°)$

b) Ja.
Motivering:
Vi kan förskjuta sinuskurvan
i a) ett helt antal perioder
eller beskriva grafen med en
cosinusfunktion t ex
$y = 2 \cos(x - 120°)$

12 $x = -2$
Ledtråd:
Tangentens ekvation är
$y = -0,5x - 1$

13 T ex $y = 2 \sin 2x$ eller
$y = \sin 2x + 1$

14 a) *Ledtråd:*
Använd t ex
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ och
"trigonometriska ettan".

b) $x = 45° + n \cdot 180°$ eller

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

15 $x = 45° + n \cdot 90°$ eller

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$

Ledtråd:
Lös ekvationerna
$\sin x = \cos x$ och $\sin x = -\cos x$.
Alt: $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ ger
$\cos 2x = 0$.

16 *Ledtråd:*
Skriv om $1 - \sqrt{2} \cos(2x - \pi/4)$
med additionsformeln, formeln
för dubbla vinkeln och
trigonometriska ettan.

17 *Ledtråd:*
Gör ett indirekt bevis.
Visa att om n är udda så är $n^3 + 5$
ett jämnt tal.
Utnyttja att ett udda tal
multiplicerat med ett udda tal
är ett udda tal.

18 $x \approx 0,55$ och $x \approx 2,59$

19 13 cm
Ledtråd:
Använd cosinussatsen.

20 $x = 45° + n \cdot 180°$ eller

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

Motivering:
Ekvationen kan skrivas
$\tan x = 1$.

21 a) $y'(t) = 0,52 \cos 0,26t$

b) $y'(10) = -0,45$

c) $y'(10) = -0,45$ betyder att
temperaturen kl 22.00 sjönk
med hastigheten 0,45 grader/
timme.

22 $\cos 95° + \cos 55°$
Ledtråd:
$a = 75°$, $b = 20°$

23 3,5 m

24 $y = 3\,000 \cos 18x + 6\,000$

25 Det finns en vinkel, $v \approx 12°$,
som uppfyller villkoren.

26 *Motivering:*
Zoomar vi in grafen där $x = 0$
ser vi att y närmar sig 1 då x
närmar sig 0.

27 T ex grafen $y = \cos x$ ger en
kvadrat med arean 0,55 a.e.
Ledtråd:
Vi får en kvadrat om $x = y$.
Lös t ex ekvationen $x = \cos x$
grafiskt med räknaren i radianer.

28 *Ledtråd:*
Insättning ger

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$$

Visa att VL kan skrivas om till HL.

29 $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{5\pi}{9}$

30 $2 \sin 0,25 \approx 0,495$
Ledtråd:
Om M är cirkelns medelpunkt
så är vinkeln BMC 1 radian.
Randvinkelsatsen ger vinkeln
BAC.
Höjden från sida BC till A ger
en rätvinklig triangel.

31 a) $y_{max} = 1,5 + 4,5 = 6,0$
$y_{min} = -1,5 + 4,5 = 3,0$

b) $A = 0,6$

c) $y = A \sin x + B$
$y_{max} = A + B = A + 3A = 4A$
$y_{min} = -A + B = -A + 3A = 2A$

32 a) T ex $A = 20°$ ger $B = 70°$ och
$\sin A + \sin B + \sin C =$
$= \sin 20° + \sin 70° + \sin 90° \approx$
$\approx 2,28$

b) Summans största värde är
$1 + \sqrt{2}$. Minsta värde saknas.
Ledtråd:
Undersök $y = \sin x + \cos x + 1$.
Använd derivata i intervallet
$0 < x < \pi/2$ eller skriv om till
$y = \sqrt{2} \sin(x + 45°) + 1$

3

3103 a) $y' = 5x^4 - 24x^2$
$y'' = 20x^3 - 48x$
b) $y' = 16x + 8e^{2x}$
$y'' = 16 + 16e^{2x}$
c) $y' = -x^{-4} = -\dfrac{1}{x^4}$
$y'' = 4x^{-5} = \dfrac{4}{x^5}$
d) $y' = -6x^{-3} + 2/3 =$
$= -\dfrac{6}{x^3} + 2/3$
$y'' = 18x^{-4} = \dfrac{18}{x^4}$
Ledtråd:
$\dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$

3104 a) 0
b) $20e^{2x} + 32e^{4x}$

3105 $y'(20) \approx -0{,}59$
Tolkning:
År 2025 minskar befolkningen med hastigheten 590 personer/år

3106 a) $y' = 16x(x^2+1)^7$
Ledtråd:
y' är produkten av den yttre och inre derivatan.
$y' = 8(x^2+1)^7 \cdot 2x$
b) $y' = (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$
c) $y' = 3x^2 \cdot \cos x^3$
d) $y' = -2 \cdot (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) =$
$= \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$
Ledtråd:
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$

3107 $f'(2) \approx 23$
Lösning:
$f'(2) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dfrac{22-13}{2{,}2-1{,}8} = 22{,}5$

3108 $y = 0{,}5(x^2+4x)$
$y' = 0{,}5(2x+4) = x+2$

3109 a) T ex $y = 2x$
b) T ex $y = -x^2$

3110 a) 5,98 b) 3,30

3111 *Lösning:*
$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-0{,}5}$
$y' = -0{,}5x^{-1{,}5} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{1{,}5}} =$
$= -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ V.S.V.

3112 a) $f'(x) = 10e^{2x}$
$f'(3) = 4\,034{,}288$
b) 4 061,237
c) 4 034,288
Kommentar:
Ett mindre värde på h ger bättre noggrannhet i b). Noggrannheten i räknarens svar kan bero av inställning/inmatning. Kontrollera hur din räknare fungerar.

3113 a) $y' = 0{,}8e^{0{,}8x}$
Ledtråd:
Potenslagar ger $y = e^{0{,}8x}$
b) $y' = -2e^{-2x} = -\dfrac{2}{e^{2x}}$
c) $y' = -(x^2-2)^{-2} \cdot 2x = -\dfrac{2x}{(x^2-2)^2}$
d) $y' = 2x$
Ledtråd:
Bryt först ut x^2 i täljaren och förkorta.

3114 $a = 2$
Ledtråd:
$y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}$

3115 a) $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$
Lösning:
$y = e^{2x}$
$y' = y^{(1)} = 2^1 e^{2x}$
$y'' = y^{(2)} = 2^2 e^{2x}$ o s v
$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$
b) $y^{(n)} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot$
$\cdot x^{-(n+1)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$
där $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Lösning:
$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
$y' = y^{(1)} = (-1) \cdot x^{-2}$
$y'' = y^{(2)} =$
$= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} =$
$= (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$
$y''' = y^{(3)} =$
$= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4} =$
$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$ o s v
$y^{(n)} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot$
$\cdot x^{-(n+1)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$
($n! = n$-fakultet $=$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

3116 a) $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 2ax + b$
b) För en andragradsfunktion ger en central differenskvot exakt derivatan.

3117 a) *Lösning:*
Differenskvoten =
$= \dfrac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} =$
$= \dfrac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$
$= \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$
Differenskvoten går mot $f'(x) + g'(x)$ när $h \to 0$
b) *Lösning:*
Differenskvoten
$= \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
$= \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} =$
$= \dfrac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2 x^2} =$
$= -\dfrac{2x+h}{(x+h)^2 x^2} =$
$= -\dfrac{2}{(x+h)^2 x} - \dfrac{h}{(x+h)^2 x^2}$
Differenskvoten går mot
$-\dfrac{2}{x^3}$ när $h \to 0$

3119 a) $y' = x \cdot \cos x + \sin x$
b) $y' =$
$= x^2 \cdot (-3\sin 3x) + 2x \cdot \cos 3x =$
$= 2x\cos 3x - 3x^2 \sin 3x$

3120 a) $y' = 6x^2 + 2x + 6$
Ledtråd:
$y' = (1+2x) \cdot 2x + 2 \cdot (3 + x^2)$
b) $y' = 6x^2 + 2x + 6'$
Ledtråd:
$y = 2x^3 + x^2 + 6x + 3$

3121 a) $y' = -2\sin x$
b) $y' = -2\sin x$
c) *Kommentar:*
Produktregeln måste vi använda när vi har en produkt av funktioner som beror av t ex x. Är den ena faktorn en konstant så är det enklare att använda sambandet i a).

3122 a) $y' = 2\sin x \cos x$
b) $y' = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x =$
$= 2\sin x \cos x$

3123 a) $y' = 5e^{5x}$
Lösning:
$y' = e^{2x} \cdot 3e^{3x} + 2e^{2x} \cdot e^{3x} =$
$= 5e^{5x}$
b) $y' = 5e^{5x}$
Ledtråd:
$y = e^{5x}$

3124 Petter har rätt.
Motivering:
Derivatan är en summa. En summa förändras inte om ordningen på termerna ändras.

3125 a) $y' = x \cdot \cos x$
b) $y' = -2x\sin x$

3126 a) $x = -1$
Ledtråd:
Faktorisering av derivatan ger $e^x(x+1) = 0$ och $e^x > 0$ för alla x.
b) $x = 0$ eller $x = -1/2$

3127 a) $h'(3) = 28$
Ledtråd:
$h'(3) = f'(3) + g'(3)$
b) $h'(3) = 193$
Ledtråd:
$h'(3) = f(3) \cdot g'(3) + f'(3) \cdot g(3)$

3128 $f'(4) = 6{,}5$
Ledtråd:
$f'(4) = \sqrt{4} \cdot g'(4) + \dfrac{1}{2\sqrt{4}} \cdot g(4)$

3129 a) $A'(t) = 8\cos 2t +$
$8\cos t \cos 2t - 6\sin t -$
$4\sin t \sin 2t$
b) $A'(5) \approx -4{,}95$
Efter 5 sekunder minskar arean med 5 m²/s.

3130 $x \cdot e^x$

3131 a) $y' = x^2 \cdot \cos^3 x - x^3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x$
b) $y' = 2x \cdot (\sin x \cdot 2e^{2x} +$
$+ \cos x \cdot e^{2x}) + 2 \cdot \sin x \cdot e^{2x} =$
$= 2e^{2x}(2x \cdot \sin x + x \cdot \cos x +$
$+ \sin x)$
Ledtråd:
Använd produktregeln i produktregeln.

3132 a) fg
Lösning:
$\dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} =$
$= \dfrac{f^2 + g^2 + 2fg - f^2 - g^2 + 2fg}{4} =$
$= fg$
b) *Lösning:*
$y = fg =$
$\dfrac{(f+g)^2}{4} - \dfrac{(f-g)^2}{4}$
Kedjeregeln ger: $y' =$
$= \dfrac{2(f+g)(f'+g')}{4} -$
$\dfrac{2(f-g)(f'-g')}{4} =$
$= \dfrac{2(ff' + fg' + gf' + gg')}{4} -$
$\dfrac{2(ff' - fg' - gf' + gg')}{4} =$
$= \dfrac{4fg' + 4f'g}{4} = fg' + f'g$

3133 *Lösning:*
$f'(gh) + f(g'h + gh') =$
$= f'gh + fg'h + fgh'$

3134 a) $\Delta V = \Delta f \cdot gh + f \cdot \Delta g \cdot h +$
$+ fg \cdot \Delta h + f\Delta g\Delta h + \Delta f\Delta g \cdot$
$\cdot h + \Delta fg\Delta h + \Delta f\Delta g\Delta h$
Ledtråd:
$\Delta V = (f + \Delta f) \cdot$
$\cdot (g + \Delta g) \cdot (h + \Delta h) - fgh$
b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = f'gh + fg'h + fgh'$
Ledtråd:
Ställ upp differenskvoten $\Delta V/\Delta x$ och bestäm de olika termernas gränsvärde. Jämför med metod 2 på sidan 105.

Historik: Leibniz och produktregeln

1 a) $f'(x) = 2x$
$u' \cdot v' = 2x \cdot 0 = 0$
b) $f'(x) = 5x^4$
$u' \cdot v' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$
c) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$
$u' \cdot v' = 1 \cdot 2x = 2x$

2 a) Produktregeln ger derivatan:
$(cx + d) \cdot (2x + b) + c(x^2 + bx) =$
$= 3cx^2 + (2bc + 2d)x + bd$
Parentesmultiplikation ger:
$cx^3 + (bc + d)x^2 + bdx$
vars derivata är:
$3cx^2 + (2bc + 2d)x + bd$

3 Om u och v är konstanter blir derivatan i båda fallen 0.

3136 a) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$
b) $f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} =$
$= -\dfrac{\sin x \cdot x + \cos x}{x^2}$

3137 a) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x \cdot 2x - \sin 2x}{x^2}$
b) $f'(x) =$
$= \dfrac{-\sin 2x \cdot 2 \cdot e^{2x} - \cos 2x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} =$
$= -\dfrac{2\sin 2x + 2\cos 2x}{e^{2x}}$

3138 a) $y' = \frac{2x^3 - 5}{x^2}$

b) $y' = 2x - \frac{5}{x^2}$

3139 a) $y' = \frac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$

b) $y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

3140 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$

Ledtråd:

T ex $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

tabell ger $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$

3141 $y' = 3x^2 - 1 - bx^{-2}$, dvs derivatan beror av b men inte av a.

Ledtråd:

$y = x^3 - x + a + b/x$

3142 $a = 8$

Ledtråd:

Kvotregeln ger

$f'(x) = -\frac{a}{(x-1)^2}$

3143 a) $y' = -2x^2 \cdot e^{-2x} + 2x \cdot e^{-2x} = \frac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$

Ledtråd:

$y = x^2 \cdot e^{-2x}$

b) Ja.

Motivering:

$y = f(x)/g(x) = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$

3144 *Ledtråd:*

$y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

3145 $y = \frac{(8\pi - 16)x}{\pi^2} + \frac{8}{\pi} - 2$

Ledtråd:

$y' = \frac{(1 + \tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$

$y'(\pi/4) = \frac{\pi/2 - 1}{(\pi/4)^2} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$

3149 a) $y' = 1/x$

b) $y' = 4/x$

c) $y' = 1/x$

d) $y' = 4/x$

Ledtråd:

Kedjeregeln ger

$y' = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3$ eller

logaritmlag ger

$y = \ln x^4 = 4 \ln x$

3150 a) $y' = 2e^{x/5}$

b) $y' = 5^x \cdot \ln 5$

c) $y' = 3\,000 \cdot 1{,}12^x \cdot \ln 1{,}12 \approx$
$\approx 340 \cdot 1{,}12^x$

d) $y' = 10^{2x} \cdot \ln 10 \cdot 2 \approx$
$\approx 4{,}60 \cdot 10^{2x}$

3151 a) $y' = \frac{2 \ln x}{x}$

b) $y' = 2/x$

c) $y' = 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1) =$
$= -\ln 2 \cdot 2^{-x}$

d) $y' = 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x}$

Ledtråd:

Skriv först om till $y = 2^{2x}$.

3152 a) $y' = -(5x+1)^{-2} \cdot 5 =$
$= -\frac{5}{(5x+1)^2}$

b) $y' = -\frac{2}{e^x}$

Ledtråd:

$y = 2e^{-x}$

c) $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Ledtråd:

$y = (\sin x)^{-1}$

d) $y' = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$

Lösning:

$y = (e^{2x}+1)^{-2}$

$y' = -2 \cdot (e^{2x}+1)^{-3} \cdot 2e^{2x} =$
$= -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$

3153 a) $y' = e^{2x}\left(2 \ln x + \frac{1}{x}\right)$

b) $y' = \frac{e^3}{x}$

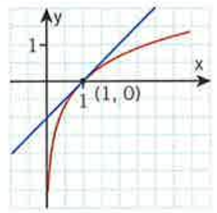
3154 Hassan har rätt.

Motivering:

$\ln ax$ har derivata

$\frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

3155 $y = x - 1$



Lösning:

$y'(x) = 1/x$

$y'(1) = 1$

$y(1) = 0$

Tangentens ekvation

$y - 0 = 1(x - 1)$

$y = x - 1$

3156 $f'(e) = 0$

Ledtråd:

$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

3157 a) $N'(7) = 37{,}7$

Tolkning:

Efter sju dygn insjuknar ungefär 38 personer/dygn

Ledtråd:

Använd räknarens deriveringsverktyg eller derivera för hand.

$N'(t) = \frac{62\,250e^{-t}}{(1 + 249e^{-t})^2}$

b) $N''(7) = -23{,}7$

Tolkning:

Efter sju dygn minskar antalet som insjuknar varje dag med 24 (personer/dygn)/dygn

Ledtråd:

$N''(t) =$

$= \frac{31000500e^{-2t} - 62250e^{-t}(1 + 249e^{-t})}{(1 + 249e^{-t})^3}$

3158 a) $y' = \frac{2}{\cos^2 2x}$
eller

$y' = 2(1 + \tan^2 2x)$

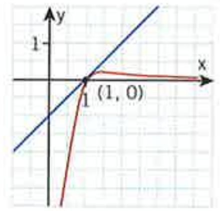
b) $y' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$
eller

$y' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

c) $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

d) $y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$

3159 $y = x - 1$



Ledtråd:

$y'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

Tangentens lutning $= y'(1) = 1$

3160 $x = e^{-1/3} \approx 0{,}717$

Ledtråd:

$3x^2 \ln x + x^2 = 0$

$x^2(3\ln x + 1) = 0$

Obs, $x > 0$

3161 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösning:

$y = \sqrt{x}$ ger $y^2 = x$

$2y \cdot y' = 1$

$y' = 1/2y$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3162 a) *Lösning:*

$y = a^x$

$y = e^{\ln a \cdot x}$

$y' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$

b) *Lösning:*

$y = a^x$

$\ln y = x \cdot \ln a$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$

$y' = \ln a \cdot y = \ln a \cdot a^x$

3163 $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

Motivering:

$y = \lg x$

$10^y = x$

$\ln 10 \cdot 10^y \cdot y' = 1$

$y' = \frac{1}{\ln 10 \cdot 10^y} = \frac{1}{\ln 10 \cdot x}$

3164 a) *Lösning:*

$\text{VL} = y^2 = \tan^2 x =$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 =$

$= \text{HL}$

b) *Lösning:*

$2yy' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

$y' = \frac{2 \sin x}{2y \cos^3 x}$

$y' = \frac{2 \sin x}{2 \tan x \cos^3 x} =$

$= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x \cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

3165 Nej, $y = x \cdot \ln x$ har ett minimivärde $-e^{-1} \approx -0{,}3679$.

Lösning:

Sätt $f(x) = x \cdot \ln x \quad x > 0$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0$

ger $\ln x = -1$ vilket ger

$x = e^{-1}$

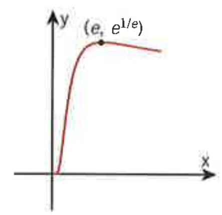
$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ för $x > 0$

$x = e^{-1}$ ger minimivärde

$f_{min} = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = -e^{-1} \approx$
$\approx -0{,}36787...$

$x \cdot \ln x > -0{,}3675$ *gäller ej* för alla $x > 0$.

3166 Maximipunkt: $(e, e^{1/e})$



Lösning:

$y(x) = x^{1/x} = e^{\ln x \cdot 1/x}$

$y'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) =$

$= x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

$y'(x) = 0$ då $\ln x = 1$,

dvs då $x = e$.

Maximipunkt: $(e, e^{1/e})$

3169 a) $\frac{dy}{dt} = \cos t - 1$

b) $\frac{dA}{dt} = 8r$

3170 a) $\frac{dr}{dt} = 0{,}075$

b) $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

c) $\frac{dA}{dt} \approx 0{,}94 \quad (2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}075)$

Tolkning:

När radien är 2,0 m ökar arean med hastigheten 0,94 m²/s

3171 a) $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

b) $\frac{dV}{dt} \approx 5\ \text{dm}^3/\text{h}$

Ledtråd:

$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$

Omvandla till samma längdenhet, t ex dm, dm/h

3172 a) 36 cm²/min

Ledtråd:

$A = x^2$

$\frac{dA}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$

c) 0,19 cm/min

Ledtråd:

$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt} \Big/ 2x$

3173 0,0074 cm/s

Ledtråd:

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

3174 a) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

b) $\frac{dV}{dt} = 2\pi rh \frac{dr}{dt}$

c) $\frac{dV}{dt} = 9\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

3175 a) Sidan är 6 cm.
Volymen minskar då med 216 cm³/min.

b) Det är inte säkert att den smälter med konstant hastighet.

3176 a) Om radien minskar med Δr minskar volymen med klotets area multiplicerat med Δr. Jämför t ex med att skala bort ett tunt skal på en lök.

b) $A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$ där $2\pi r$ är cirkelns omkrets.

Om radien ändras med Δr ändras arean med omkretsen multiplicerat med Δr.

3177 Höjden stiger med 0,39 cm/min.

Lösning:

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(27h - 3h^2)\cdot\frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = \pi\cdot h(9-h)\frac{dh}{dt}$ ger

$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi h(9-h)}$

$h = 4{,}5$ och $\frac{dV}{dt} = 2{,}5$ ger

$\frac{dh}{dt} = \frac{2{,}5}{\pi\cdot 4{,}5\cdot 4{,}5} \approx 0{,}039$

3178 Vätskenivån sjunker med 0,35 cm/min

Lösning:

För "vattenkonen" med radien r och höjden r gäller

$V = \frac{\pi r^2\cdot r}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$

$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi r^2}{3}\cdot\frac{dr}{dt} = \pi r^2\frac{dr}{dt}$

ger $\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi r^2}$

$\frac{dV}{dt} = -360$

$r = 18$ ger $\frac{dr}{dt} = \frac{-360}{\pi\cdot 18^2} \approx$

$\approx -0{,}35$

3203 a) $x = -2$ eller $x = 1$

b) $y''(-2) = -9 < 0$ dvs lokal maxpunkt då $x = -2$

$y''(1) = 9 > 0$ dvs lokal minpunkt då $x = 1$

c) Kontrollera att grafen har lokalt min $(1; 0{,}5)$ och lokalt max $(-2, 14)$

3204 a) *Ledtråd:*

Visa att $y' = 2\cos 2x$ är 0 då

$x = \frac{\pi}{4}$ och $x = \frac{3\pi}{4}$

b) $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$ dvs

lokal maxpunkt då $x = \frac{\pi}{4}$

$y''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$ dvs

lokal minpunkt då $x = \frac{3\pi}{4}$

c) Kontrollera att grafen har lokalt max $(\frac{\pi}{4}, 1)$ och lokalt min $(\frac{3\pi}{4}, -1)$

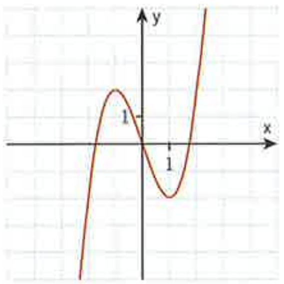
3205 a) 1, 3, 4

b) 5

c) 1, 6

d) 2, 3, 5

3206 a)



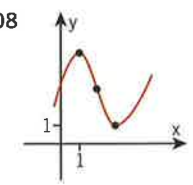
b) y är växande för $x \le -1$ och $x \ge 1$

Ledtråd:

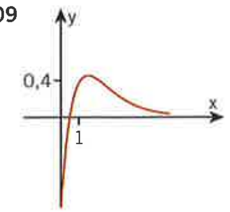
Derivata ger lokalt max $(-1, 2)$ och lokalt min $(1, -2)$

3207 $(1; -0{,}5)$

3208



3209



Ledtråd:

Kurvan har lokalt max $(1{,}5; 2e^{-1{,}5})$

3210 a) Energiåtgången per meter minskar.

b) 6 m/s.

Ledtråd:

$y = \frac{kx^3}{x-4}$ har sitt minsta värde då $y = \frac{x^3}{x-4}$ har sitt minsta värde.

3211 a) b)

$x = 3$

ger $y_{min} = -\frac{1}{27} \approx -0{,}037$

3212 $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$

3213 $a = 16$

Ledtråd:

$y' = \frac{2x^3 - a}{x^2}$

y' ska vara noll då $x = 2$.

Visa att $y''(2) > 0$.

3214 a) $A(v) =$

$= 144\cdot 2\cdot\sin v\cdot\cos v =$

$= 144\sin 2v,\ 0 \le v \le \pi/2$

Ledtråd:

Höjd $= 12\sin v$

Bas $= 2\cdot 12\cos v$

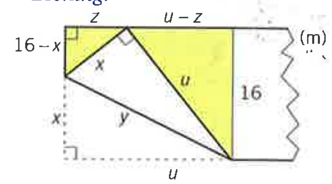
b) $A(x) = 2x\sqrt{144 - x^2}$

$0 \le x \le 12$

c) 144 cm² för $v = \pi/4$ och $x = \sqrt{72}$.

3215 $x = 12$ ger y_{min}

Lösning:



Pythagoras sats ger

$y^2 = x^2 + u^2$

(uppvikta triangeln)

$\begin{cases}(16-x)^2 + z^2 = x^2\\ u^2 = (u-z)^2 + 16^2\end{cases}$

(färgade trianglarna)

$y^2 = \frac{2x^3}{2x-16}$, $8 < x \le 16$

Sök minimum för y^2.

Sätt $y^2 = z$, sök minimum för z.

$z = \frac{2x^3}{2x-16}$, $8 < x < 16$

$z' = \frac{(2x-16)6x^2 - 2x^3\cdot 2}{(2x-16)^2} =$

$= \frac{12x^3 - 96x^2 - 4x^3}{(2x-16)^2} =$

$= \frac{8x^3 - 96x^2}{(2x-16)^2} = \frac{8x^2(x-12)}{(2x-16)^2}$

$z' = 0$ för $x = 12$ i intervallet.

Teckenstudium av z' ger att det blir minimum.

3219 a) 11

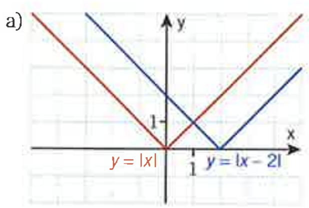
b) -9

c) 4,92

3220 a) $f(3) = 1$, $f(-3) = 5$

b) $x = 9$ eller $x = -5$

3221 a)



b) Kontrollera graferna med din grafräknare.
Använd t ex $y = \text{abs}(x)$

3222 Fiona har fel.

Motivering:

$|0| = 0$ är inte ett positivt tal men $x \ne 0$ ger $|x| > 0$.

3223 a) A

Motivering:

$\frac{1}{x+2}$ är inte definierat då $x = -2$

b) A – största och minsta värde saknas.

B – största värde saknas, minsta värde är 2.

Motivering:

A – växer resp avtar obegränsat när x närmar sig -2.

B – saknar största värde då $(x+2)^2$ kan bli hur stort som helst. Minsta värde är 2 då $(x+2)^2$ är noll.

3224 a) $x = 5$

b) *Kommentar:*

Många räknare har begränsad upplösning varför graferna kan bli konstiga när man zoomar ut.

3225 a) T ex $y = 1/(x-2)$

b) T ex $y = \sqrt{x-2}$

c) T ex $y = |x-2|$

3226 $y = |0{,}5x + 5|$

Ledtråd:

Bestäm linjens ekvation för $x > -10$.

3227 a) Definitionsmängd: $x > -2$

Värdemängd: Alla reella tal y.

b) *Förklaring:*

$y = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^y = x + 2$

$x \le -2$ ger att $\ln(x+2)$ ej är definierat eftersom $e^y > 0$. Om x närmar sig -2 kan y, som motsvarar en exponent, bli hur litet som helst, t ex e^{-100} är ett litet positivt tal. När x ökar växer y först snabbt och sedan långsammare, t ex $e^2 \approx 7{,}4$, $e^3 \approx 20$, $e^4 \approx 55$

3228 *Motivering:*

Både $|x-y|$ och $|y-x|$ ger avståndet mellan de reella talen x och y.

3229 $a = -2$; $b = 4$

Ledtråd:

$x = 0$ ger skärningen med y-axeln.

3230 $a = 4$, $b = 1$ och $c = 2$

3231 $a = 4/3$

Ledtråd:

Min.värde -2 ger att triangelns bas är 3. Bestäm linjens lutning.

3234 a) x-axeln

b) $x = -1$ och x-axeln

c) y-axeln och $y = 0{,}5x$

d) $x = \pi/2$

3235 a) y-axeln

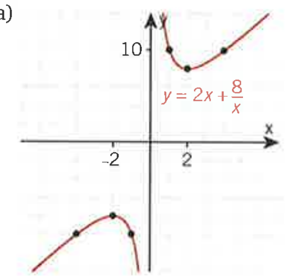
b) y-axeln och $y = -1{,}5x$

c) $y = -1$

3236 *Förklaring:*

En asymptot är en rät linje som grafen närmar sig när avståndet till origo ökar. T ex $y = e^{-x}$ närmar sig x-axeln när x ökar. x-axeln ($y = 0$) är en asymptot.

3237 a)



Lokalt max: $(-2, -8)$

Lokalt min: $(2, 8)$

b) Ja, y-axeln och $y = 2x$

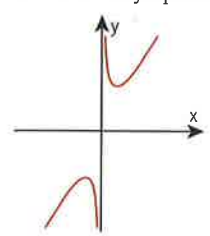
c) Nej, när x närmar sig 0 från höger växer y obegränsat

3238 a) För stora $|x|$ dominerar $3x$.

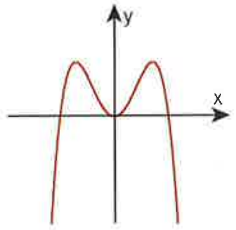
$y = 3x$ är en asymptot.

För små $|x|$ dominerar $\frac{1}{x}$,

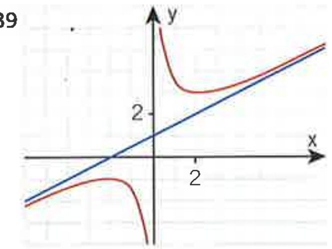
y-axeln är en asymptot.



b) För stora $|x|$ dominerar $-x^4$
För små $|x|$ dominerar $4x^2$



3239



Lokalt max: (–2, –1)
Lokalt min: (2, 3)

Asymptoter: y-axeln och $y = 0{,}5x + 1$

3240 a) Extrempunkter saknas eftersom derivatan saknar nollställen.
Asymptoter: x- och y-axeln

b) Lokalt max: (0,5; –4)
Asymptoter: x- och y-axeln, $x = 1$

3241 a) y-axeln och $y = -x$

b) $y = \frac{1}{x} - x$

3242 Nej, Johan har fel.
Motivering:
$y = \sin x + x$ har $y = x$ som "mittlinje", dvs grafen varierar kring denna men närmar sig inte mer och mer när x ökar.

3243 $y = \tan^{-1} x$ har asymptoterna $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$
Motivering:
När x ökar närmar sig $\tan^{-1} x$ värdet $\pi/2$ eftersom $\tan x$ ökar obegränsat när x närmar sig $\pi/2$. På motsvarande sätt närmar sig $\tan^{-1} x$ värdet $-\pi/2$ när $x \to -\infty$.

3244 a) T ex $y = e^x + 2$ eller $y = 2 + 1/x$

b) T ex $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)} + x$

3245 Grafen har lokalt max: (0, 1/4) och asymptoter $x = \pm 2$ och $y = 1$.
Ledtråd:
$y'(0) = 0, y''(0) < 0$
Undersök för vilka x uttrycket inte är definierat samt vilket värde y närmar sig när $|x|$ blir stort.

3302 a) *Lösning:*
$y = 5 \cdot e^{2x}$ ger $y' = 10 \cdot e^{2x}$
$\text{VL} = y' - 2y =$
$= 10 \cdot e^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot e^{2x} = 0 = \text{HL}$

b) *Lösning:*
$y = 4\cos x,\ y' = -4\sin x,$
$y'' = -4\cos x$
$\text{VL} = y'' + y =$
$= -4\cos x + 4\cos x = 0$
$= \text{HL}$

3303 T ex $y'' + y' + y = 0$

3304 a) *Lösning:*
$\text{VL} = \frac{dy}{dx} = A \cdot k \cdot e^{kx}$
$\text{HL} = ky = k \cdot A \cdot e^{kx} = \text{VL}$

b) $y(0) = A \cdot e^{k \cdot 0} = A$

3305 Nej.
Motivering:
$y = x \cdot e^x,\ y' = x \cdot e^x + e^x$
$\text{VL} =$
$y' - y = x \cdot e^x + e^x - x \cdot e^x = e^x$
$\text{HL} = xy = x \cdot x \cdot e^x = x^2 \cdot e^x$
$\text{VL} \neq \text{HL}$

3306 $A = 12,\ k = -0{,}03$

3307 $k = 3$
Lösning:
$y = \cos kx$ där $k > 0$
$y' = -k \sin kx$
$y'' = -k^2 \cos kx$
$y'' + 9y = 0$ ger
$-k^2 \cos kx + 9 \cos kx = 0$
$\cos kx\,(9 - k^2) = 0$
$9 - k^2 = 0$
$k^2 = 9$
$k = 3,\ k > 0$

3308 $r = 2$ eller $r = -3$
Ledtråd:
$y = e^{rx}$ är en lösning om $r^2 + r - 6 = 0$

3309 a) –

b) $A = 0,\ B = 20$

c) $A = 1,\ B = -3$

3310 *Ledtråd:*
$y' = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

3311 a) T ex $y = e^{0{,}1x}$ och $y = 10e^{0{,}1x}$

b) *Kommentar:*
$y = C_1 e^{0{,}1x} + C_2 e^{0{,}1x}$
är en lösning för alla värden på C_1 och C_2.

3314 a) *Lösning:*
$y = 150 \cdot e^{-0{,}20t}$ ger
$y(0) = 150 \cdot e^{-0{,}20 \cdot 0} = 150$

b) *Lösning:*
$\text{VL} =$
$= \frac{dy}{dt} = 150 \cdot (-0{,}20) \cdot e^{-0{,}20t}$
$\text{HL} = -0{,}20y =$
$= (-0{,}20) \cdot 150 \cdot e^{-0{,}20t} =$
$= \text{VL}$

3315 a) År 2010 var folkmängden 45 miljoner.

b) Folkmängden ökar med hastigheten 1,2 % per år av den aktuella folkmängden.

3316 a) $k = 0{,}15$

b) Ca 33 000 st
Ledtråd:
Beräkna $y(8)$.

3317 a) –

b) $C = 44\,000$

3318 a) $y' = -0{,}20y$

b) $y' = ky,\ k > 0$

c) $y' = k(20 - y),\ k > 0$

3319 *Lösning:*
$s = v_0 t + at^2/2$
$s' = v_0 + at$
$s'' = a$

3320 a) $A = -4$

b) Lövmängden närmar sig 4 g/cm².

3321 a) –

b) Begynnelsevärdet, dvs mängden föroreningar vid $t = 0$.

c) Den tid det tar innan mängden föroreningar är en tiondel av begynnelsevärdet.

3322 a) $\frac{dy}{dt} = 260$ individer/år

b) $\frac{dy}{dt} = -900$ individer/år

c) $0 < y < 5400$

d) $y > 5400$

e) $y = 5400$

3323 a) Antalet bakterier är från början 100 st och de ökar med hastigheten 8 % per timme av det aktuella antalet.

b) $y = 100\,e^{0{,}08t}$

3324 a) En kopp te har från början temperaturen 85 °C. Den svalnar sedan med en hastighet proportionell mot skillnaden mellan teets temperatur och rumstemperaturen.

b) –

c) Temperaturen vid någon tidpunkt $t > 0$.

3325 *Ledtråd:*
$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{\sqrt{2kt + C}}$

3326 a) $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h},\quad k > 0$

b) $k = 2$
Ledtråd:
Jämför $\frac{dh}{dt}$ med $\sqrt{h}$

c) $h(0) = 81$ cm och $h(9) = 0$, dvs tanken är tom efter 9 minuter.

3327 $\frac{dy}{dt} = 1 - 0{,}1y$

3403 a) T ex $F(x) = x^3/3 + 3x$

b) T ex $F(x) = 0{,}6e^{2x}$

c) T ex $F(x) = 2\sin x - \cos x$

d) T ex $F(x) = -\frac{\cos 4x}{8}$

3404 a) $F(x) = 4\sin x - x^3 + 1$
Ledtråd:
$F(x) = 4\sin x - x^3 + C$
Sätt $F(0) = 1$ och bestäm C.

b) $F(x) = 2e^{3x}/3 + x^2/2 + 1/3$

3405 *Förklaring:*
Båda har derivatan $f(x) = x$.

3406 *Förklaring:*
Finn en primitiv funktion till $f(x) = x^2$. $F(x) = x^3/3$
Beräkna $F(2) - F(1)$, dvs
$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{7}{3}$

3407 a) 1

b) $8e - 8$

3408 a) $\frac{46}{3}$ a.e. ≈ 15,3 a.e.
Ledtråd:
Beräkna integralen
$\int_1^3 (10 + x - x^2)\,dx$

b) $(4 - 2e^{-1})$ a.e. ≈ 3,3 a.e.
Ledtråd:
Beräkna summan
$\int_{-2}^{0} (x + 2)\,dx + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$

3409 2 a.e.

3410 a) T ex $F(x) = \frac{x^{1{,}5}}{1{,}5} - 0{,}2x$

b) T ex $F(x) = 4\ln|x| - 8\sqrt{x}$

c) T ex $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

d) T ex $F(x) = -\frac{5^{-x}}{\ln 5}$

3411 200/3 a.e. ≈ 66,7 a.e.
Ledtråd:
Övre integrationsgräns är funktionens högra nollställe.

3412 a) $20 \cdot \sqrt{5}$ a.e.

b) $(1/3 + \ln 2)$ a.e.

3413 a) *Ledtråd:*
Derivera $F(x)$

b) $2e^2$
Ledtråd:
Beräkna $F(2) - F(1)$.

3414 $a = \frac{4}{3}$
Ledtråd:
$\int_0^{\pi/4} a \sin 2x\,dx = \frac{a}{2}$

3415 $F'(\sqrt{\pi}) = -1$
Lösning:
$F(t) = \int_0^t \cos(x^2)\,dx =$
$= G(t) - G(0)$
där $G'(t) = \cos(t^2)$ och $G(0)$ är en konstant.
$F'(t) = G'(t) + 0 = \cos t^2$
$F'(\sqrt{\pi}) = \cos\left(\sqrt{\pi}\right)^2 =$
$= \cos \pi = -1$

3418 2,5
Ledtråd:
Bestäm arean under grafen med hjälp av rutorna.

3419 a) $\int_{-1}^{3} e^{-2x^2}\,dx \approx 1{,}22$

b) $\int_0^2 \sin^2 x\,dx \approx 1{,}19$

3420 a) 1,5
Ledtråd:
Använd formeln
$A = \frac{b(h_1 + h_2)}{2}$

b) 1,75
Ledtråd:
Rektangelns höjd är $f(0{,}5) = 1{,}75$

c) Räknaren ger ca 1,67.
I detta fall ger mittpunktsrektangeln ett bättre närmevärde.

3421 $11 < \int_1^3 f(x)\,dx < 19$
Ledtråd
De två rektanglarna under kurvan har en area som bildar en undersumma medan de två över kurvan ger en översumma.

3422 $\int_6^8 f(x)\,dx \approx 15$
Ledtråd:
Uppskatta arean med två parallelltrapetser.

3423 $a \approx 3{,}6$
Ledtråd:
Summan av arean under kurvan från $x = 0$ till $x = a$ ska bli 3.

3424 Med mittpunktsrektanglar och/eller en indelning med fler rektanglar.
Motivering:
Kurvan växer varför mittpunktsrektanglar ger en bättre approximation än översumman i figuren. Fler rektanglar ger en area som närmar sig den sökta arean.

3425 Ca 10,0 a.e.
Ledtråd:
Bestäm integrationsgränser och integralen med hjälp av räknaren.

3426 $k \approx 1{,}84$
Ledtråd:
Pröva dig fram.

3427 Ca 1,69 a.e.
Ledtråd:
Bestäm grafiskt x-koordinaten för kurvornas skärning, a.
Arean ges av

$$\int_0^a (3-2x)\,dx - \int_0^a \sin(x^2)\,dx$$

3428 $\int_0^{1/2} \tan \pi x \, dx$ saknar värde.
Motivering:
Integralens värde motsvaras av en area som inte är begränsad eftersom kurvan $y = \tan \pi x$ växer obegränsat när x närmar sig 1/2.

3431 a) $\int_{-2}^{2} (x^2 + 2 - 0{,}5x)\,dx$
b) $13\frac{1}{3}$ a.e.

3432 a) $1\frac{5}{6}$ a.e.
Ledtråd:
$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$
Beräkna $\int_1^2 (x^2 - x^{-2})\,dx$

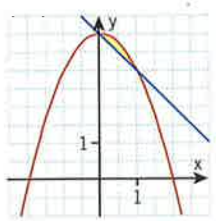
b) $5\frac{1}{3}$ a.e.
Ledtråd:
Överfunktion $y = 0$ ger

$$\int_{-1}^{1} (0-(x^2-3))\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2+3)\,dx$$

3433 $A = 2$ a.e. $B = 6$ a.e.

3434 A och B har samma värde eftersom $(4-x^2)-(2-x)$ kan förenklas till $(2+x-x^2)$

3435 $A = 0{,}5$ $B = 1{,}5$ $C = 2$

3436


a) För $x = 0$ och $x = 1$.

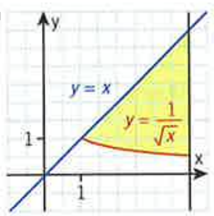
b) $\int_0^1 (4 - x^2 - (4-x))\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$

c) $\frac{1}{6}$ a.e.

3437 4/3 a.e.

3438 $(1 - \pi/4)$ a.e.
Ledtråd:
Beräkna arean under $y = \cos x$ och subtrahera triangelns area.

3439 a) $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ och $(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$
b) $(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ a.e.

3440


Arean är 5,5 a.e.

3441 $3\frac{2}{3}$ a.e.
Ledtråd:
Arean kan bestämmas med två integraler

$$\int_0^1 (4x - 0{,}5x)\,dx + \int_1^2 (5 - x^2 - 0{,}5x)\,dx$$

3442 1,5 a.e.

3443 $a \approx 1{,}70$
Lösning:

$\int_0^a 2^{-x}\,dx = 1$ ger

$\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^a = 1$

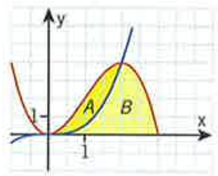
$-\frac{2^{-a}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = 1$

$2^{-a} - 1 = -\ln 2$

$a = -\frac{\ln(1-\ln 2)}{\ln 2} \approx 1{,}70$

3444 a) Det färgade området är hälften av en rektangel med arean π, dvs $\frac{\pi}{2}$.

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

3445 $\frac{8}{19}$


Lösning:
Integrationsgränserna får du genom att beräkna skärningen mellan kurvorna.
$3x^2 - x^3 = 0{,}5x^3$
$3x^2 - 1{,}5x^3 = 0$
$1{,}5x^2(2-x) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = 2$
Kurvan $y = 3x^2 - x^3$ skär x-axeln i (0, 0) och (3, 0).
Låt de båda områdenas areor vara A och B.

$A = \int_0^2 (3x^2 - x^3 - 0{,}5x^3)\,dx = \int_0^2 (3x^2 - 1{,}5x^3)\,dx = \left[x^3 - \frac{1{,}5x^4}{4}\right]_0^2 = 8 - 6 = 2$

$A + B = \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{27}{4}$

$B = \frac{27}{4} - 2 = \frac{19}{4}$

Förhållandet $\frac{A}{B} = \frac{2}{\frac{19}{4}} = \frac{8}{19}$

3446 $b = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} \approx 1{,}08$
Ledtråd:
Lös ekvationen

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} ((b - x^2) - (x^2 - b))\,dx = 3$$

3448 a) 0
b) $A = B = \frac{5}{4}$
c) *Tolkning:*
Integralen är noll eftersom arean över x-axeln är lika stor som arean under x-axeln.

3449 a) $a = \frac{2\pi}{3}$ b) $a = \frac{\pi}{3}$

3450 a) Visa att VL = HL = 24
b) Visa att VL = HL = $\pi/2 - 1$

3451 a) Positiv
Motivering:
Arean ovanför x-axeln är större än arean under x-axeln
b) Negativ
Motivering:
Arean ovanför x-axeln är mindre än arean under x-axeln
c) Positiv
Motivering:
Arean ovanför x-axeln är mindre än arean under x-axeln

3452 a) 24 b) 100 c) 68

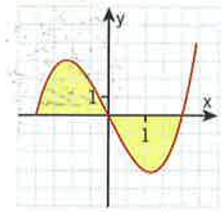
3453 a) $2 + \frac{\pi}{8}$ c) 1
b) $2 + \frac{\pi}{8}$ d) 0

3454 a) -2
Ledtråd:

$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$

b) 12

3455 a) Nej.
Motivering:
Linjen $y = 4x - 6$ skär x-axeln vid $x = 1{,}5$. Minsta möjliga värde ges av
$\int_1^{1{,}5} (4x - 6)\,dx = -\frac{1}{2}$
b) Ja. $\left(a = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}\right)$

3456 8 a.e.
Ledtråd:


Båda areorna är 4 a.e.

3457 $\frac{2^n}{n+1}$

3458 T ex $2 \cdot 4 + \int_2^3 -(x^3 - 3x^2)\,dx$

eller $\int_0^2 ((x^3 - 3x^2) - (-4))\,dx + \int_0^3 -(x^3 - 3x^2)\,dx$

3459 $g(4) = -1{,}5$
Lösning:
$\int_{-2}^{4} g'(x)\,dx = [g(x)]_{-2}^{4} =$
$= g(4) - g(-2)$
Ur figuren får vi
$\int_{-2}^{4} g'(x)\,dx = -4{,}5$
$g(4) - g(-2) = -4{,}5$
$g(4) = -4{,}5 + 3 = -1{,}5$

3460 Minsta värde är -2
Lösning:
$f(x) = x^3 - 3x \ (x > 0)$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ för $x = 1$
$f''(1) = 6 \cdot 1 > 0$ minpunkt
$f(1) = -2$

3461 $f(x) = 15x^2,\ a = 2^{1/3}$
Lösning:
$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x =$$
$$= F(x) - F(a) = 5x^3 - 10$$
Deriveras båda leden får man
$F'(x) = 15x^2$, dvs $f(x) = 15x^2$
Alltså $\int_a^x 15t^2\,dt = [5t^3]_a^x =$
$$= 5x^3 - 5a^3 = 5x^3 - 10$$
ger $5a^3 = 10$
$a^3 = 2$
$a = 2^{1/3}$

3464 a) $\int_{3,0}^{4,0} 10t\,dt$
b) 35 m
Ledtråd:
Beräkna integralen i a).

3465 a) 10 s b) 100 m

3466 a) $y(5) \approx 32$
Tolkning:
Efter 5 år ökar antalet invånare med hastigheten 32 invånare/år.
b) $\int_0^5 25e^{0,05x}\,dx \approx 140$
Tolkning:
Under de fem första åren ökar antalet invånare med ca 140.

3467 4,8 m/s

3468 a) $\int_0^2 v(t)\,dt = 1,5$
Tolkning:
Under de två första sekunderna färdas föremålet 1,5 m.
b) $\int_0^4 v(t)\,dt = 0$
Tolkning:
Efter fyra sekunder är föremålet tillbaka där det startade.

3469 Ca 46 °C.
Ledtråd:
Integralen $\int_0^{10} -7e^{-0,1t}\,dt$ ger temperaturförändringen.

3470 a) $y(1,5) = 0,85$
$y(3,5) = -0,425$
Tolkning:
Vid $t = 1,5$ s andas personen in 0,85 l/s.
Vid $t = 3,5$ s andas personen ut 0,425 l/s.
b) 1,6 l
Ledtråd:
$\int_0^3 0,85 \sin\frac{\pi t}{3}\,dt$

3471 Ca 24 Joule
Ledtråd:
Uppskatta arean genom att räkna rutor eller med hjälp av rektangel- eller trapetsmetoden.

3472 a) Ca 1 000 J
Ledtråd:
Uppskatta arean t ex med fyra parallelltrapets (1015)
b) Ca 1 000 J
Ledtråd:
Skriv in värdena i en tabell och låt räknaren anpassa en funktion.
Beräkna sedan
$\int_5^{25} f(t)\,dt$
Fjärdegradsfunktion ger ca 999 J. Sinusfunktion ger ca 1 009 J.

3473 1 730 kr

3474 *Ledtråd:*
Bestäm primitiv funktion till v eller
$\int_0^t (ax + v_0)\,dx$

3475 Ca 2,8 månader
Ledtråd:
Bestäm a så att
$\int_0^a y(t)\,dt = 200$

3476 $K = C - 50 + 50\sqrt{2a+1}$
Ledtråd:
$$K = C + \int_0^a \frac{50}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

3477 a) $\Delta A = 2\pi x \cdot \Delta x$
b) $\int_0^r 2\pi x\,dx = \pi\left[x^2\right]_0^r = \pi r^2$
c) Ca 900 000 personer.
Ledtråd:
$\int_0^4 30 \cdot e^{-0,2x} \cdot 2\pi x\,dx$

3481 a) $f(x) = \dfrac{1}{8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-110)^2}{2\cdot 8^2}}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{0,22\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1,65)^2}{2\cdot 0,22^2}}$

3482 a) 0,54
b) 0,29

3483 a) 0,77
Tolkning:
Sannolikheten är 77 % att ett slumpvis valt värde ligger mellan 4 och 9.
Ledtråd:
Använd räknarens integralverktyg.
b) 0,24
Tolkning:
Sannolikheten är 24 % att ett slumpvis valt värde ligger mellan 50 och 60.

3484 a) 39 %
b) 49 %

3485 a) $F(x) = -e^{-5x}$
b) $F(x) = -e^{-0,2x}$

3486 a) $-e^{-6} + 1 \approx 0,998$
b) $-e^{-2,8} + e^{-0,4} \approx 0,61$

3487 a) Ca 15 %
Ledtråd:
Beräkna
$\int_5^{10} 0,04 \cdot e^{-0,04x}\,dx$
b) 1
Motivering:
Sannolikheten är 100 % för att livslängden ligger i intervallet $(0, \infty)$

3488 a) Ca 61 %
Ledtråd:
Använd den standardiserade normalfördelningen och beräkna
$$\int_{-0,6}^{1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
b) Ca 41 %

3489 $P(\mu \pm 10\sigma) \approx 1$
Tolkning:
Vi kan försumma värden som ligger utanför intervallet
$\mu \pm 10\sigma$
Ledtråd:
Beräkna
$$\int_{-10}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

3490 a) Ca 80 %
b) Ca 10 %
c) Ca 10 %
Ledtråd:
Använd normalfördelningskurvans symmetri eller sätt den övre integrationsgränsen till $\mu + 10\sigma$ (9 500) eller mer.

3491 a) Ca 37 %
b) Ca 50 %
Ledtråd:
Den generaliserade integralen
$\int_{30}^{\infty} 0,023 \cdot e^{-0,023x}\,dx$
har gränsvärdet $e^{-0,69}$, se löst exempel 3480 b).
c) $P(< a) = 1 - e^{-0,023a}$
Ledtråd:
$P(< a) =$
$= \int_0^a 0,023 \cdot e^{-0,023x}\,dx$

3492 a) *Ledtråd:*
Visa att
$\int_0^{60} \dfrac{60-x}{1800}\,dx = 1$
b) Ca 18 %
c) $P(< k) = \dfrac{k}{30} - \dfrac{k^2}{3600}$

3493 *Ledtråd:*
Visa att $\int_0^{\infty} \beta \cdot e^{-\beta x}\,dx$
har gränsvärdet 1.

3494 Ca 6 300 timmar
Ledtråd:
Sök a så att
$$\int_0^a \frac{1}{50\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-7000)^2}{2\cdot 50^2}}\,dx \approx 0,10$$
Multiplicera sedan med antal timmar/laddning.

3495 $f(x) = 1/6$
Ledtråd:
Arean för hela intervallet ska vara 1.

3502 Ca 15 m

3503 a) -8
Ledtråd:
$F(3) - F(-1)$
b) 8

3504 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \cos x + 3$

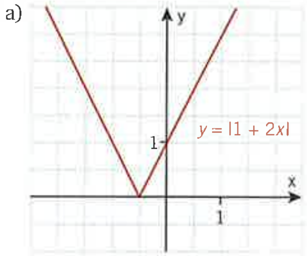
3505 120 m
Ledtråd:
Rita figur och uppskatta
$\int_0^{3,0} v(t)\,dt$
med 5 parallelltrapetser.

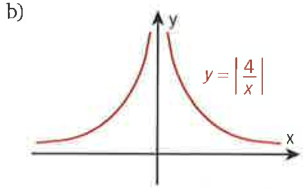
3506 180 m^3/s
Ledtråd:
Arean (m^2) · hastighet (m/s) ger flödet.

3507 a) *Ledtråd:*
Derivera $F(x)$.
b) *Ledtråd:*
Beräkna $F(\pi/2) - F(0)$

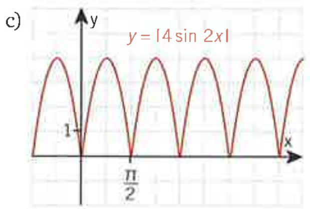
3508 $y_{min} = 3$
Motivering:
En kvadrat kan aldrig bli negativ och det finns ett x-värde så att parentesen blir noll.
($y = e^x$ skär $y = -x$)

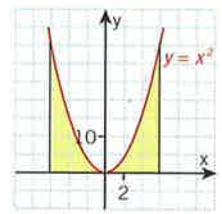
3509 a) Grafen ser ut som den räta linjen $y = 2x - 3$.
Förklaring:
$$y = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} =$$
$$= \frac{(2x-3)(2x+3)}{2x+3} = 2x - 3$$
b) Linjen är inte definierad då $x = -1,5$. Grafen har ett "hål" så räknaren bör ge "undefined" eller liknande.

3510 a)


b)


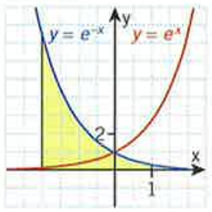
Asymptoter: x- och y-axeln

c)


3511 a) 144
Ledtråd:
Kurvan är symmetrisk.


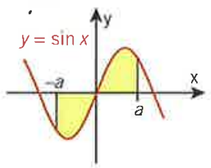
b) 7

Ledtråd:



c) 0

Ledtråd:



3512 $b = 1/3$

Ledtråd:

Triangeln har basen $4/b$ och höjden $4/(b + 1)$.

3513 $F(x) = 3(xe^x - e^x)$

3514 41

Lösning:

$\int_{-4}^{8} g(x)\, dx =$

$= \int_{-4}^{8} (f(x) + 3)\, dx =$

$= \int_{-4}^{8} f(x)\, dx + \int_{-4}^{8} 3\, dx =$

$= 5 + 36 = 41$

3515 a) Nej.

Motivering:

$f'(0) = g'(0) + h'(0$

b) Ja.

Motivering:

$f'(0) = g(0) \cdot h'(0) + g'(0) \cdot h(0)$

Om t ex $g(0) < 0$ och $h(0) < 0$ är $f'(0) > 0$.

3516 Ca 7,64 l.e.

Ledtråd:

Använd grafritarens integralverktyg.

3517 $x = 0, x = 5 - \sqrt{50}, x = 5 + \sqrt{50}$

Tolkning:

För dessa x-värden är integralen noll vilket kan tolkas geometriskt som att i intervallet $(0, x)$ är arean ovan x-axeln lika med arean under.

3518 *Lösning:*

VL $= 36 \sin x + 105 \cos x =$
$= 111 \cdot \sin(x + v)$,
dvs har maximivärdet 111.

HL $= 3x^2 - 2x + 112$ har minimivärdet $111\frac{2}{3}$

3519 $f_{min} = 12$

Ledtråd:

Sätt $t = x \sin x$ och studera $g(t) = \frac{4t^2 + 9}{t}$

Bestäm t_{min} och g_{min}. Visa att det finns x-värde i intervallet som ger $t_{min} = x \sin x$ vilket då ger att $f_{min} = g_{min}$

3520 Ca 190 cm

Ledtråd:

Beräkna sannolikheten med integral, använd räknare och pröva dig fram.

3522 a) Ca 16,7 km

b) 20 km

Lösning:

$\int_{1}^{\infty} \frac{20}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{20}{x}\right]_1^t =$

$= \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{20}{t} - \frac{20}{1}\right) = 20$

3523 Ja, planket är 1 m²

Ledtråd:

$-e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

går mot noll då $x \to \infty$

3524 a) Nej, gränsvärdet är ∞

b) Ja, gränsvärdet är 1

c) Ja, gränsvärdet är $\sqrt{2}$

d) Ja, gränsvärdet är $2e^5$

3525 Integralen går mot oändligheten för $0 < k \leq 1$ och har ändligt värde för $k > 1$.

3526 Det stämmer.

Ledtråd:

Visa med beräkning att

$\int_{1}^{\infty} 30 \cdot 0{,}96^x\, dx < 1000$

3602 a) $\Delta V = \pi x \Delta x$

Ledtråd:

Skivan är en cylinder med radie $\sqrt{x}$ och höjden Δx.

b) $V = \int_0^4 \pi x\, dx$

c) 8π v.e.

3603 a) $\frac{242\pi}{5}$ v.e. ≈ 152 v.e.

Ledtråd:

$V = \int_1^3 \pi x^4\, dx$

b) $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$ v.e. ≈ 10,0 v.e.

Ledtråd:

$V = \int_0^1 \pi e^{2x}\, dx$

3604 a) $\Delta V = \pi y \Delta y$

Ledtråd:

Skivan är en cylinder med basytan $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot y$ och höjden Δy.

b) $V = \int_0^4 \pi y\, dy$

c) 8π v.e.

3605 a) $12{,}5\pi$ v.e. ≈ 39,3 v.e.

Ledtråd:

$V = \int_0^5 \pi(5 - y)\, dy$

b) $\frac{32\pi}{5}$ v.e. ≈ 20,1 v.e.

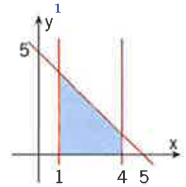
Ledtråd:

$V = \int_0^2 \pi x^2\, dy = \int_0^2 \pi y^4\, dy$

3606 a) 21π v.e. ≈ 66,0 v.e.

Ledtråd:

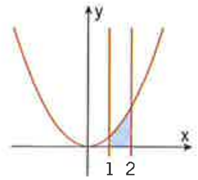
$V = \int_1^4 \pi(5 - x)^2\, dx$



b) $\frac{31\pi}{5}$ v.e. ≈ 19,5 v.e.

Ledtråd:

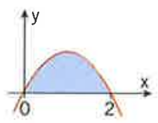
$V = \int_1^2 \pi (x^2)^2\, dx$



c) $\frac{16\pi}{15}$ v.e. ≈ 3,4 v.e.

Ledtråd:

Kurvan till $y = 2x - x^2$ skär x-axeln då $x = 0$ och $x = 2$ vilket utgör integrationsgränserna.



3607 $\frac{2\pi}{15}$ v.e. ≈ 0,42 v.e.

Ledtråd:

Beräkna $\int_0^1 \pi x^2\, dx - \int_0^1 \pi x^4\, dx$

eller $\int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\, dx$

3608 $\frac{\pi}{2}$ v.e. ≈ 1,57 v.e.

Ledtråd:

Rita en skiss.

$V = \int_{-1}^0 \pi(y + 1)\, dy$

3609 a) $y = \sqrt{r^2 - (x - r)^2} = \sqrt{2xr - x^2}$

$\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x = \pi(2xr - x^2)\Delta x$

b) $V = \int_0^{2r} \pi(2xr - x^2)\, dx$

c) $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

d) 610 000 m³ (605 280,1...)

Ledtråd:

$V = \int_0^{85} \pi(110x - x^2)\, dx$

3610 $t = 4$

Lösning:

$V(t) = \int_2^t \pi(9 - y)\, dy =$

$= \pi(9t - \frac{t^2}{2} - 16)$

$V(t) = 12\pi$ ger ekvationen

$t^2 - 18t + 56 = 0 \quad 2 < t < 9$

$t = 4 \quad (t = 14)$

3611 π v.e. ≈ 3,14 v.e.

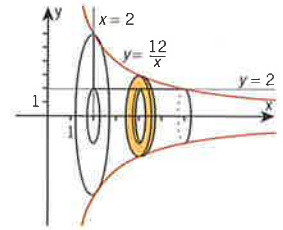
Ledtråd:

$y = x^{-2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y}$

3612 $\frac{1\,296\pi}{5}$ v.e. ≈ 814,3 v.e.

3613 32π v.e. ≈ 101 v.e.

Lösning:



En godtycklig skiva har volymen

$\Delta V = (\pi y^2 - \pi 2^2)\Delta x$

$V = \int_2^6 \pi\left(\frac{144}{x^2} - 4\right) dx =$

$= \pi\left[-\frac{144}{x} - 4x\right]_2^6 = 32\pi$

3614 9π v.e. ≈ 28,3 v.e.

Ledtråd:

Integrationsgränserna är 0 och 3 i y-led.

3615 $\frac{729\pi}{35}$ v.e. ≈ 65,4 v.e.

3616 $\pi(e^2 + 1)/2$ v.e. ≈ 13,2 v.e.

Ledtråd:

Den sökta volymen kan beräknas som skillnaden i volym mellan en cylinder och en rotationsvolym som bildas när kurvan roterar runt y-axeln.

3617 $t \approx 1{,}10$

3618 $\left(\frac{3\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ v.e. ≈ 8,97 v.e.

3619 $a = 15/32$

Lösning:

$V_x = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)^2\, dx = \frac{16\pi a^5}{15}$

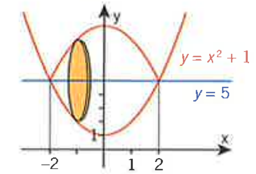
$V_y = \int_0^{a^2} \pi(a^2 - y)\, dy = \frac{\pi a^4}{2}$

$V_x = V_y$ ger $a = 15/32$

3620 $a = 1/3$

3621 a) $\pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\, dx$

Lösning:



En godtycklig skiva har basradien

$r = 5 - (x^2 + 1) = 4 - x^2$

$\Delta V = \pi r^2 \Delta x = \pi(4 - x^2)^2 \Delta x$

$V = \int_{-2}^{2} \pi(4 - x^2)^2\, dx$

b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{8} - 2\right)^2 dy$

Historik: Riemanns summor och integralens definition

1 a) Översumman = 3,75 a.e.

b) Undersumman = 1,75 a.e.

c) Integralen = 8/3 a.e. ≈ 2,7 a.e.

2 Arean är 2,625 a.e. dvs en bättre approximation än över- och undersumman i 1.

3 Teo har rätt. Arean under kurvan är en parallelltrapets med area $h(a + b)/2$. Mittpunktsrektangeln har höjden $(a + b)/2$ och basen h.

Diagnos 3

1 a) $y' = x^3 \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \sin x$

b) $y' = \dfrac{1 + 1/x - \ln x}{(x+1)^2}$

c) $y' = \dfrac{2}{x}$

d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

2 $a = 2/3$

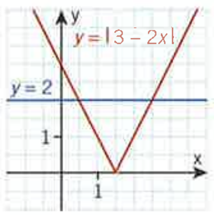
3 Nej.

Motivering:

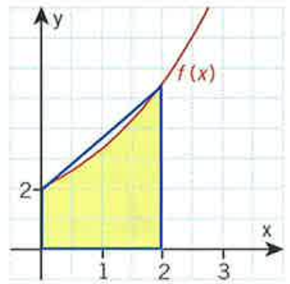
$f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

$f'(x) = 0$ saknar lösning

4 $x = 0{,}5$ eller $x = 2{,}5$



$\int_0^2 f(x)\,dx < \dfrac{2(2 + 5{,}5)}{2} = 7{,}5$



5 *Lösning:*

$y' = e^{-x} - e^{-x} \cdot x = e^{-x}(1-x)$

$y' = 0$ ger $x = 1$

$y'' = -e^{-x} - e^{-x}(1-x)$

$y''(1) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow y_{max}$ då $x = 1$

$y(1) = e^{-1} = 1/e$

6 B

Motivering:

För stora $|x|$ dominerar x^4

För små $|x|$ dominerar $-4x^2 + 1$

7 Fille har rätt.

Motivering:

När x ökar så går y mot $2x$ eftersom e^{-x} går mot noll.

8 *Tolkning:*

Bilens värde sjunker med hastigheten 12 % per år av det aktuella värdet.

9 $k = 0{,}5$

10 $\dfrac{23}{6}$ a.e. $\approx 3{,}83$ a.e.

11 $\int_0^{60} (25 \cos 50t + 400)\,dt \approx 24000$

Tolkning:

Under 60 s avger motorn totalt energin 24 000 J.

12 4,5 a.e.

Ledtråd:

En period är $\pi/2$

13 a) -10

Ledtråd:

En rektangelarea under x-axeln.

b) 8

Ledtråd:

En triangelarea.

14 Ca 39 %

Ledtråd:

Obs olika enheter.

15 4

Ledtråd:

$G(x)$ är också en primitiv funktion till $f(x)$, $G'(x) = F'(x)$.

16 Ja.

Motivering:

$0 \le \sin^2 x \le 1$ ger största värdet $4 + 1 = 5$

17 16π v.e. $\approx 50{,}3$ v.e.

Ledtråd:

Beräkna $\int_1^3 \pi(2\sqrt{x})^2 dx = \int_1^3 \pi 4x\,dx$

Blandade övningar kapitel 3

1 a) $y' = 6 \cos 2x$

b) $y' = -6(5 - 2x)^2$

c) $y' = 2e^{2x} \cdot \ln x + \dfrac{e^{2x}}{x}$

d) $y' = 1$

Ledtråd:

Förkorta först.

2 –

3 4

4 Ja, Andy har rätt.

Motivering:

Uppskatta arean med en area större än den under kurvan, se figur. Ett parallelltrapets ger

5 $f(x) = 0{,}5x^2 + \cos x + 2$

Ledtråd:

Alla primitiva funktioner ges av $f(x) = 0{,}5x^2 + \cos x + C$

6 $x = 70$ eller $x = 30$

Ledtråd:

$0{,}1x = 7$ eller $0{,}1x = 3$

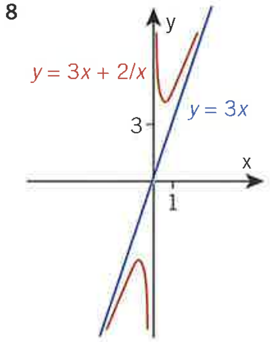
7 $x = 0$ eller $x = 1$

Ledtråd:

$y' = \dfrac{2xe^{2x} - 2x^2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{2x - 2x^2}{e^{2x}}$

$y' = 0$ om täljaren är noll.

8



Asymptoter: $y = 3x$ och y-axeln.

9 a) $y' = 2(\ln 0{,}1x + 4) \cdot \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{2 \ln 0{,}1x + 8}{x}$

b) $y' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3$

10 $a = 4$

11 1,5

Ledtråd:

Arean ovanför x-axeln – arean under x-axeln.

12 Ca 3,2

Ledtråd:

Grafen visar en primitiv funktion, $f(x)$ till $1 + \ln x$. Avläs och beräkna $f(3) - f(1)$.

13 *Ledtråd:*

Skriv om till $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

och använd kvotregeln.

14 $h'(x) = 0$

Ledtråd:

$h(0) = 5$

$h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)$

Andra punkten ger $h'(x) = 0$ för alla x, dvs $h(x) = 5$

15 13

16 a) 1,5 m^3/h (1,471...)

b) 17 m^3 (17,293...)

17 a) När personen hamnar i vattnet är kroppstemperaturen 37 °C.

b) –

c) $t \approx 16$.

Tolkning:

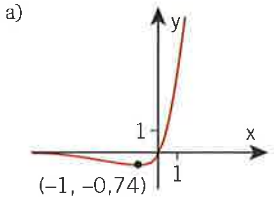
Det tar 16 minuter för kroppstemperaturen att sjunka till 30 °C.

d) $y'(5) = -0{,}45$.

Tolkning:

Efter 5 minuter sjunker kroppstemperaturen med hastigheten 0,45 °C/minut.

18 a)



b) *Ledtråd:*

Visa att $y'(-1) = 0$ och $y''(-1) > 0$

19 a) Ca 50 st

Ledtråd:

Sannolikheten ges av

$\int_{19}^{20} \dfrac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{2 \cdot 1{,}5^2}}\,dx$

b) Kurvan förskjuts i sidled om medelvärdet μ ändras. Kurvan blir "smalare" om standardavvikelsen σ minskar.

Ledtråd:

Undersök t ex

$f(x) = \dfrac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{2 \cdot 1{,}5^2}}$

variera $\mu = 20$ och $\sigma = 1{,}5$

20 Område **II** är störst.

Lösning:

$V_1 = \int_0^2 \pi(0{,}5x^2)^2 dx = 1{,}6\pi \approx 5{,}03$

$V_2 = \int_0^2 \pi \dfrac{y}{0{,}5}\,dy = 4\pi \approx 12{,}57$

21 a) $y(18) = 600$

Tolkning:

Förbrukningshastigheten kl 18 är 600 m^3/h.

b) $y'(18) \approx -79$

Tolkning:

Förbrukningshastigheten minskar kl 18 med 79 m^3/h per h.

c) 7 200

Tolkning:

Från midnatt till kl 12 förbrukas 7 200 m^3 vatten.

22 a) T ex $y = \dfrac{1}{x-1}$

b) T ex $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ eller $y = 1 + e^{-x}$

23 $A = \dfrac{4}{3}$ a.e, $B = \dfrac{5}{3}$ a.e.

24 Ca 15 %

25 Ca 3 100 cm^2/s

Ledtråd:

$\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dA}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \dfrac{dr}{dt}$

26 a) Ca 1,44 a.e.

b) $\dfrac{1}{0{,}5 \ln 4}$ a.e. $= \dfrac{1}{\ln 2}$ a.e.

Ledtråd:

Primitiv funktion är $\dfrac{4^{0{,}5x}}{\ln 4 \cdot 0{,}5}$

27 a) *Tolkning:*

$g(3)$ är arean som begränsas av kurvan $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ koordinataxlarna och linjen $t = 3$.

b) $g(3) \approx 1{,}25$

28 Arean $= \dfrac{1}{12}$ a.e.

Ledtråd:

Tangentens ekvation är $y = 1{,}5x + 0{,}5$.

29 Arean $= \dfrac{4}{81}$ a.e.

Ledtråd:

$k = 2/3$

30 $70 \pm 3{,}3$ mm

Ledtråd:

Pröva dig fram med räknaren.

31 $\dfrac{2}{3} \approx 67\,\%$

Ledtråd:

Rita i ett koordinatsystem en rektangel med basen $x = 0$ till $x = 4$ och höjden $y = 0$ till $y = 2$.

Hur stor del av denna area ligger under kurvan $y = \sqrt{x}$?

32
- På grafen till $y = 2x \cdot e^{2x}$ är derivatan noll i punkten med koordinaterna $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e})$
- Funktionen $y = \dfrac{x}{4} \cdot e^{\frac{x}{4}}$ har minimivärdet $-\dfrac{1}{e}$
- Minimivärdet är alltid $-\dfrac{1}{e}$

33 Förhållandet mellan areorna är $\dfrac{2}{3}$ och detta gäller för alla positiva a och b.

Blandade övningar kapitel 1 – 3

1 a) $y' = -2\sin 2x$

b) $y' = \dfrac{1}{x}$

c) $y' = 5^x \cdot \ln 5 - 5x^4$

d) $y' = x \cdot \cos x + \sin x$

2 $\dfrac{2\pi}{9}$

3 a) 0

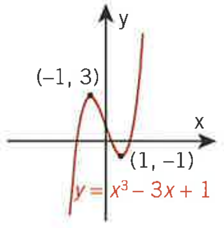
b) 6,5

4 $A = 10,\ b = 4,\ C = 30$

5 2/3

6 T ex $y' = -3y$

7



Ledtråd:
För stora $|x|$ dominerar x^3 – termen.
För små $|x|$ dominerar $-3x + 1$
Derivata ger extrempunkterna.

8 $\dfrac{26\pi}{3}$ v.e. $\approx 27{,}2$ v.e.
Ledtråd:
Beräkna $\int_{-1}^{1} \pi(2 + x)^2\,dx$

9 *Lösning.*
Antag att $4 + 3\sin 2x > 7$.
Detta ger
$3\sin 2x > 3$
$\sin 2x > 1$.
Vilket är falskt eftersom
$-1 \le \sin 2x \le 1$.
Vårt antagande är fel, vilket ger att $4 + 3\sin 2x \le 7$.
V.S.B.

10 *Ledtråd:*
Visa att $f'(\pi/3) = 4$.

11 $x = n \cdot \pi$ eller
$x = \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi$
Ledtråd:
$2x - \dfrac{\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

12 1/6 a.e.

13 $a = 2e$
Lösning:
$\int_2^a 1/x\,dx = 1$
$\ln a - \ln 2 = 1$
$\ln(a/2) = \ln e$
$a = 2e$

14 *Ledtråd:*
Visa att $F'(x) = f(x)$

15 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5\pi}{6}$
Ledtråd:
Bestäm minsta värdet för $\sin t - t/2$

16 $a = \sqrt{6},\ b = 6 - \sqrt{6}$
Ledtråd:
Hela arean är 18 a.e.
vilket t ex ger $\int_0^a 2x\,dx = 6$.

17 a) $x = 0{,}23 + n \cdot \pi$ eller
$x = 1{,}34 + n \cdot \pi$

b) $x = 2{,}50 + n \cdot 2\pi$

18 540 mm (543,75...)

19 $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Ledtråd:
Trigonometriska ettan.

20 T ex $y = \sin 3x$
Ledtråd:
$y = \sin x$ har lokalt max för $x = 90°$.

21 a) 7,0 h (6,962...)

b) $y'(80) \approx 0{,}1$.
Tolkning:
Den 21 mars ökar dagens längd med hastigheten 0,1 h/dygn (6 min/dygn).

c) Årets längsta dag, den 20 juni ($x = 171$), är 17,6 h lång.
Årets kortaste dag, den 20 december ($x = 354$), är 6,4 h lång.

22 a) 0,685 a.e.
Ledtråd:
Avläs skärningspunkternas x-koordinater, x_1 och x_2, och bestäm med räknare
$\int_{x_1}^{x_2} (2\sin 2x - 1)\,dx$

b) $\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ a.e.

23 $x \approx 276°$ eller $x \approx 366°$

24 (1, 1/2)
Ledtråd:
$y' = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ är noll då täljaren är noll.

25 $a = \dfrac{\ln 5}{4} \approx 0{,}40$
Ledtråd:
$\int_0^a \pi(e^{2x})^2\,dx = \pi$
ger ekvationen
$\dfrac{\pi \cdot e^{4a}}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \pi$

26 *Motivering:*
$y = \ln x$ ger $y' = 1/x$ om $x > 0$.
$y = \ln(-x)$ ger $y' = -1/x$ om $x < 0$.
$y = \ln|x|$ ger $y' = 1/x$ om $x \neq 0$, dvs gäller även $x < 0$.
Alla primitiva funktioner ges av $F(x) = \ln|x| + C$ då C inte påverkar derivatan.

27 $2\sin x - 2\sin^3 x$

28 $\int_0^{1{,}1183} (e^{0{,}2x} - x^2)\,dx \approx 0{,}787$

29 a) $y'(0{,}8) \approx -0{,}4$ $(-0{,}421\ldots)$
Backens lutning är 0,4 km/km.

b) $y'' = 0$ ger
$ae^{-ax^2} \cdot (2ax^2 - 1) = 0$

c) $a = 0{,}5$

30 a) $a = \dfrac{2}{\ln 2}$
Ledtråd:
$f(2) = \dfrac{3a}{2}$ ger
$e^{\frac{2}{a}} - e^{-\frac{2}{a}} = \dfrac{3}{2}$
Sätt $e^{\frac{2}{a}} = q$

b) –

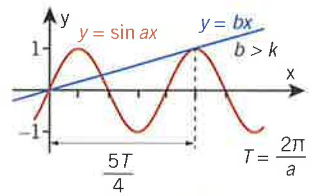
31 $v \approx 68{,}5°$
Ledtråd:
I parallelltrapetset är $h = 5\sin v$ och $b = 10 + 2 \cdot 5\cos v$. Ställ upp en formel och finn det största värdet grafiskt.

32 $\cos 1 \approx 0{,}54$
Ledtråd:
Tolka gränsvärdet som en derivata.

33 För $n = 4k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$

34 a) $b \ge a$
Ledtråd:
Bestäm lutningen i origo.

b) $\dfrac{2a}{5\pi} < b < a$
Ledtråd:



b > k i figuren, $T = \dfrac{2\pi}{a}$

35 **I** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2}{1}$

II $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{n}{1}$

III $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{n}{1}$

4

4103 a) $\mathrm{Re}\,z = 4$ $\mathrm{Im}\,z = 7$
b) $\mathrm{Re}\,z = 0$ $\mathrm{Im}\,z = 2$
c) $\mathrm{Re}\,z = 1$ $\mathrm{Im}\,z = -1$
d) $\mathrm{Re}\,z = -2$ $\mathrm{Im}\,z = 6$
e) $\mathrm{Re}\,z = 5$ $\mathrm{Im}\,z = 0$
f) $\mathrm{Re}\,z = 2$ $\mathrm{Im}\,z = -\sqrt{2}$

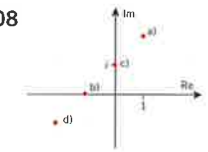
4104 Ja.
Motivering:
Vera har rätt eftersom de komplexa talen även innehåller de reella talen.

4105 a) $z = 2 + 3i$ c) $z = \pi$
b) $z = -1 + 4i$ d) $z = \sqrt{3}i$

4106 a) a är ett reellt tal **R**, b=0
b) $a = 0$, b är ett reellt tal **R**

4107 $z_1 = 3$ $z_3 = -2 + i$
$z_2 = 1 + 2i$ $z_4 = -i$

4108



4109 a) $z_1 = 12i$ $z_2 = -12i$
b) $z_1 = 4i$ $z_2 = -4i$
c) $z_1 = \sqrt{3}i$ $z_2 = -\sqrt{3}i$
d) $z = \pm 8$

4110 a) $z_1 = -2 + i$ $z_2 = -2 - i$
b) $z_1 = -3 + 4i$ $z_2 = -3 - 4i$
c) $z_1 = -2 + 4i$ $z_2 = -2 - 4i$
d) $z_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ $z_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

4111 $x_1 = 3 + \sqrt{2}i$ $x_2 = 3 - \sqrt{2}i$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas $x^2 - 6x + 11 = 0$

4112 $(-1 + \sqrt{3}i)^2 + 2(-1 + \sqrt{3}i) + 4 =$
$= 1 - 3 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 4 = 0$

4113 *Förklaring:*
Ekvationen har lösningen $x = -2 \pm \sqrt{4 - a}$. Om $a > 4$ kommer talet under rottecknet att vara negativt och därmed kan vi inte få några reella rötter.

Historik: De komplexa talens historia

1 a) $x(12 - x) = 45$ ger
$x^2 - 12x + 45 = 0$
b) $x = 6 \pm 3i$

2 a) $x^2 - 20x + 125 = 0$
b) $x = 10 \pm 5i$

3 a) $5i/3$ c) $i^{3/2}$
b) i

4116 a) 3 c) $-4 - 2i$
b) $-1 + i$ d) $4 - 5i$

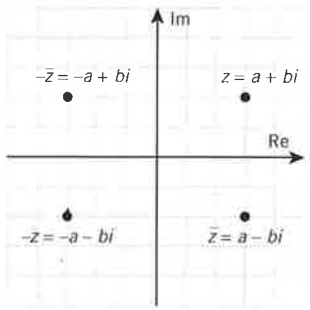
4117 a) $-2 + 2i$
b) $8 - 6i$
c) $-8 + 6i$
d) $-7 + 22i$

4118 a) $48 + 64i$
b) $-21 - 20i$
c) $-5 - 12i$
d) $5 + 12i$
e) 26
f) 5

4119 a) $z = -1 + i$
$\mathrm{Re}\,z = -1,\ \mathrm{Im}\,z = 1$
b) $z = -3$
$\mathrm{Re}\,z = -3,\ \mathrm{Im}\,z = 0$
c) $z = -1 - 7i$
$\mathrm{Re}\,z = -1,\ \mathrm{Im}\,z = -7$
d) $z = 5$
$\mathrm{Re}\,z = 5,\ \mathrm{Im}\,z = 0$

4120 a) $\bar{z} = 4 - i,\ |z| = \sqrt{17}$
Ledtråd:
Skillnaden mellan z och konjugatet $\bar{z}$ är att imaginärdelen har motsatt tecken.
Absolutbeloppet beräknas $\sqrt{4^2 + 1^2}$
b) $\bar{z} = -3 - 2i,\ |z| = \sqrt{13}$
c) $\bar{z} = -1 + i,\ |z| = \sqrt{2}$
d) $\bar{z} = 2,\ |z| = 2$
e) $\bar{z} = i,\ |z| = 1$
f) $\bar{z} = \sqrt{2} - \sqrt{3}i,\ |z| = \sqrt{5}$

4121 Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal. Då är $-z = -a - bi$, $\bar{z} = a - bi$ och $-\bar{z} = -a + bi$. Dessa kan illustreras grafiskt på följande sätt



4122 a) $x = 1 \quad y = 1$
Ledtråd:
Realdelarna lika: $2x + y = 3$
Imaginärdelarna lika: $x - y = 0$

b) $x = -1 \quad y = 3$

4123 a) $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$
Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat och förenkla.

b) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{3}i$

c) $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

d) $\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

4124 Motexempel:
Om $z = 1 + i$ så är $\bar{z} = 1 - i$ och $-z = -1 - i$
$\bar{z} \neq -z$

4125 $|z| = \sqrt{12}$

4126 a) $\mathrm{Re}\,z = 0, \mathrm{Im}\,z = 1$
Ledtråd:
Förläng med nämnarens konjugat.

b) $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\,z = 1$

c) $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{10}, \mathrm{Im}\,z = \frac{3}{10}$

d) $\mathrm{Re}\,z = 0, \mathrm{Im}\,z = 1$

4127 Ja.
Motivering:
Ett komplext tal vars real- och imaginärdel är lika kan betecknas $z = a + ai$ där a är ett reellt tal.

$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ai}{a - ai} = \frac{(a + ai)(a + ai)}{(a - ai)(a + ai)} = \frac{(2a^2 i)}{(2a^2)} = i$

4128 a) $z = 1 + 2i$ c) $z = 6 - 6i$
b) $z = 0{,}5i$ d) $4i$

4129 a) 1 b) 2

4130 a) $63 + 16i$
b) $\frac{49}{169} + \frac{219}{169}i$

4131 $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i = 0{,}8 + 0{,}6i$

4133 306

4134 a) 23 c) $\sqrt{68}$
b) 20 d) 40

4135 *Lösning:*
$\mathrm{VL} = (-1 - 3i)^3 + 3(-1 - 3i)^2 + 12(-1 - 3i) + 10 =$
$= (26 + 18i) + 3(-8 + 6i) - 2 - 36i = (26 - 24 - 2) + (18 + 18 - 36)i = 0 = \mathrm{HL}$
VSV

4136 a) $b = 1,\ a > -2$
b) $a = -\frac{b}{2}$

4137 $-\frac{1}{5} - \frac{34}{15}i$

4138 *Lösning:*
$\mathrm{HL} = \frac{1}{2i}(2 - 3i - (2 + 3i)) =$
$= \frac{1}{2i}(-6i) = -3 = \mathrm{Im}\,z = \mathrm{VL}$
V.S.V.

4139 *Lösning:*
$\mathrm{HL} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(5 - 2i)(5 + 2i)} =$
$= \sqrt{25 - 4i^2} = \sqrt{29} = |z| = \mathrm{VL}$
V.S.V.

4140 *Lösning:*
a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi$ och $\bar{\bar{z}} = a + bi$.
Därmed är $\mathrm{VL} = \bar{\bar{z}} = a + bi = z = \mathrm{HL}$ VSV

b) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z - w = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ och
$\overline{z - w} = (a - c) - (b - d)i$
$\mathrm{HL} = \bar{z} - \bar{w} = a - bi - (c - di) = (a - c) - (b - d)i = \mathrm{VL}$
VSV

c) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
och därmed
$\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
$\mathrm{HL} = \bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \mathrm{VL}$
VSV

d) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $\bar{z} = a - bi, \bar{w} = c - di$
och $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

$\mathrm{VL} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

$\mathrm{HL} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

Därmed är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ V.S.V.

4141 *Lösning:*
a) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.
Då är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $\bar{z} = a - bi$
$\mathrm{HL} = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = \mathrm{VL}$
VSV

b) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
$\mathrm{VL} = |zw| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$
$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} =$
$= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$
$\mathrm{HL} = |z| \cdot |w| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$
$= \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2}$
Därmed är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ VSV

c) Låt $z = a + bi, w = c + di$, där a, b, c, d är reella tal.
Då är $\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$

$\mathrm{VL} = \left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\frac{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}{(c^2 + d^2)^2}} =$

$= \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd}{(c^2 + d^2)^2}} =$

$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$

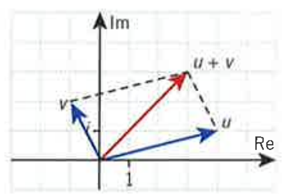
$\mathrm{HL} = \frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)(c^2 + d^2)}} =$

$= \frac{\sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}}{c^2 + d^2}$

Därmed är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ VSV

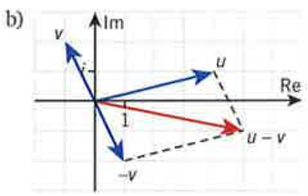
d) Låt $z = a + bi$, där a och b är reella tal.
$\mathrm{VL} = \mathrm{Re}\,z = a$
$\mathrm{HL} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$
$= \frac{1}{2}(a + bi + a - bi) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 2a = a$
Därmed är $\mathrm{VL} = \mathrm{HL}$ VSV

4202 a)



$u + v = 3 + 3i$
$|u + v| = \sqrt{18}$

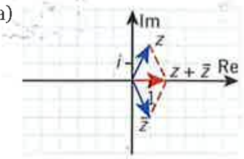
b)



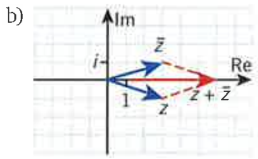
$u - v = 5 - i$
$|u - v| = \sqrt{26}$

4203 Nej.
Motivering:
$|u| = \sqrt{676} = 26$
$|z| = \sqrt{625} = 25$

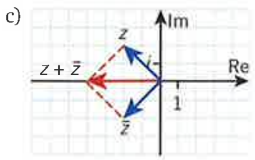
4204 a)



b)



c)



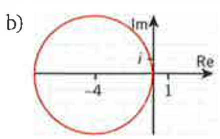
d) $z + \bar{z} = 2a$
Motivering:
$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$
$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$

4205 a) $|z - 4| = 4$
Ledtråd:
Cirkelns medelpunkt är $(4, 0) = 4$ och radien är 4.

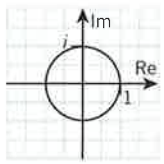
b) $|z - (4 + 4i)| = 4$
Ledtråd:
Cirkelns medelpunkt är $(4, 4) = 4 + 4i$ och radien är 4.

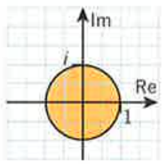
4206 a) Teckenfel i vänsterledet.

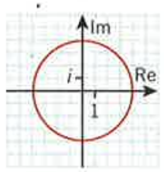
b)

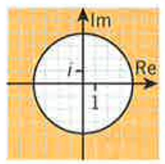


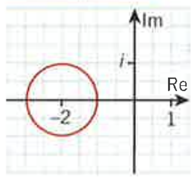
4207 T ex $z = 10i$ eller $z = \sqrt{50} + \sqrt{50}i$
Ledtråd:
Välj ett tal z så att $|z| = 10$ men inte $z = 10$ eller $z = -10$ eftersom det är reella tal.

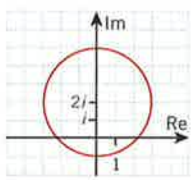
4208 a)


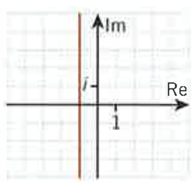
b)


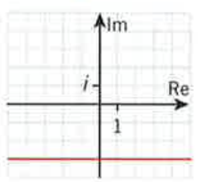
c)


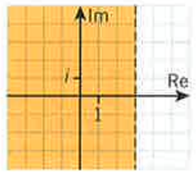
d)


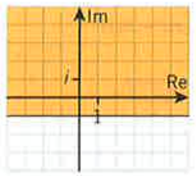
4209 a)


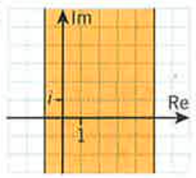
b)


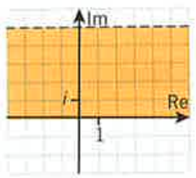
c)


d)


4210 a)


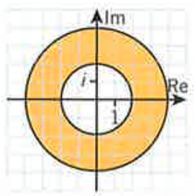
b)


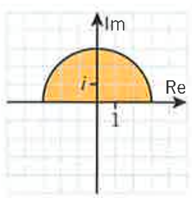
c)


d)


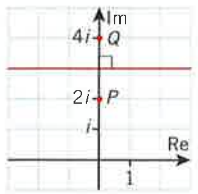
4211 $\sqrt{74}$ och $\sqrt{50}$
Ledtråd:
Beräkna $|u+z|$ och $|u-z|$

4212 a) Uttrycket saknar mening.
b) z ligger närmare origo än w.

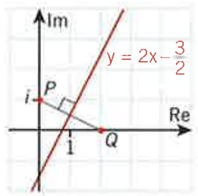
4213 a)


b)


4214 a) $|z+w| = 5$
$|z| = \sqrt{10} \approx 3{,}2$
$|w| = \sqrt{5} \approx 2{,}2$
$|z| + |w| \approx 5{,}4$
b) Ja.
Motivering:
Tex $z = 2i$ och $u = 3i$
ger $z + u = 5i$
$|z| + |u| = 2 + 3 = 5$
$|z + u| = 5$

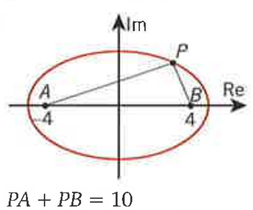
4215 a)


Ledtråd:
Punkterna ska ha samma avstånd till
$P = 2i = (0, 2)$ och
$Q = 4i = (0, 4)$

b)


Ledtråd:
Punkterna ska ha samma avstånd till $P = i = (0, 1)$ och $Q = 2 = (2, 0)$.
De bildar en linje som går genom mittpunkten på linjen PQ och är vinkelrät mot denna.

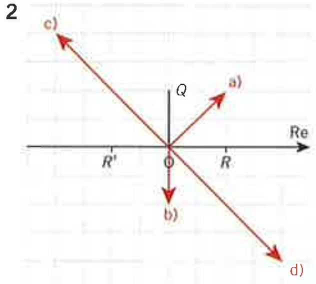
4216 a) Summan av avstånden från punkten till (−4, 0) och från punkten till (4, 0) är 10.

b)


$PA + PB = 10$
Kurvan kallas en ellips.

Historik: Argand och det komplexa talplanet

1 a) −1
b) $-\sqrt{(-1)}$
c) 1
d) −1
e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{-1})$
f) $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})$

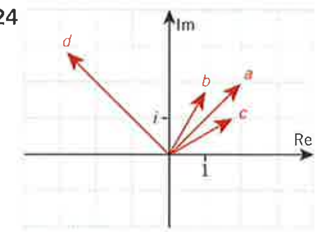
2


4220 a) $z = 4(\cos 180° + i \sin 180°)$
b) $z = 4(\cos 90° + i \sin 90°)$
c) $z = 2(\cos 270° + i \sin 270°)$
d) $z = 3(\cos 0° + i \sin 0°)$

4221 a) $z = 5(\cos 45° + i \sin 45°)$
b) $z = 8(\cos 120° + i \sin 120°)$

4222 a) $z = 3{,}54 + 3{,}54i$
b) $z = -1{,}37 - 3{,}76i$
c) $z = 4{,}10 - 2{,}87i$
d) $z = -2$

4223 a) −1 c) 2 e) 3
b) $-3i$ d) $\sqrt{3}i$ f) −1

4224


a) $z = \sqrt{8}(\cos 45° + i \sin 45°)$
b) $z = 2(\cos 60° + i \sin 60°)$
c) $z = 2(\cos 30° + i \sin 30°)$
d) $z = \sqrt{18}(\cos 135° + i \sin 135°)$

4225 a) $|z| = \sqrt{41}$ c) $|z| = \sqrt{5}$
b) $|z| = \frac{\sqrt{13}}{5}$ d) $|z| = 1$

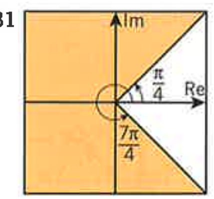
4226 a) 36,9° c) 236,3°
b) 111,8° d) 291,8°

4227 *Förklaring:*
Theo har läst av argumentet medurs, medan Leo har läst av argumentet moturs.

4228 a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|\bar{z}| = \sqrt{2}$
c) $\arg z = -\pi/4$ (vilket är detsamma som $7\pi/4$)
d) $\arg \bar{z} = \pi/4$

4229 a) $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
$\bar{z} = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$
b) $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
$\bar{z} = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
c) $z = 3(\cos 0 + i \sin 0)$
$\bar{z} = 3(\cos 0 + i \sin 0)$
d) $z = \sqrt{8}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) =$
$= \sqrt{8}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$
$\bar{z} = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

4230 a) $\pi/2$ c) $5\pi/4$
b) $\pi/4$ d) $\pi/3$

4231


4232 a) *Lösning:*
$z = -\frac{2+2i}{i} = \frac{2+2i}{-i} =$
$= \frac{(2+2i)\cdot i}{-i\cdot i} = \frac{2i+2i^2}{-i^2} =$
$= \frac{-2+2i}{1} = -2+2i$
$z = -2+2i$ ligger i andra kvadranten med
$\arg z = \frac{3\pi}{4}$
b) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$
Lösning:
$z = -\frac{2}{1-i} = \frac{-2(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$
$= \frac{-2-2i}{1-i^2}$
$z = -1-i$ ligger i tredje kvadranten med
$\arg z = \frac{5\pi}{4}$

4233 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
Lösning:
$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-iz = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

4234 a) $\arg iz = \frac{3\pi}{4}$ b) $\arg(-iz) = \frac{7\pi}{4}$

4235 Likheten stämmer eftersom två vektorer som har samma längd men med vinkel v respektive $-v$ är speglingar av varandra i den horisontella axeln. När en vektor ses som ett komplext tal innebär en spegling i reella axeln att man byter tecken på imaginärdelen dvs man har tagit dess konjugat.

4239 a) 6 c) 1,5
b) 60° d) 30°

4240 a) 72 c) 2
b) π d) $\pi/3$

4241 $3\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$
Ledtråd:
$\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

4242 $z \cdot u = 0{,}8(\cos 40° + i\sin 40°)$
$u/z = 1{,}25(\cos 320° + i\sin 320°)$
Kommentar:
Vi kan även skriva argumentet som $-40°$.

4243 a) $12(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$
Ledtråd:
$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

b) $15(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$
Ledtråd:
$\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

4244 a) $6i$ b) -10

4245 $\cos 70° + i\sin 70°$

4246 a) Absolutbeloppet är 6
Argumentet är π
b) Absolutbeloppet är 1,5
Argumentet är $\frac{\pi}{3}$
c) Absolutbeloppet är 18
Argumentet är $\frac{5\pi}{3}$

4247 a) $\frac{1}{z} = 0{,}2(\cos 315° + i\sin 315°)$
Ledtråd:
Skriv talet 1 i polär form
$1 = 1(\cos 0° + i\sin 0°)$
b) $\frac{1}{u} = 0{,}5(\cos 45° + i\sin 45°)$
c) $\frac{z}{u} = 2{,}5(\cos 90° + i\sin 90°)$
Ledtråd:
Argumentet kan även skrivas $-270°$.
d) $\frac{z}{\bar{z}} = 1(\cos 90° + i\sin 90°)$

4248 a) $\cos 144° + i\sin 144°$
b) $\cos 216° + i\sin 216°$
Ledtråd:
Utnyttja att $z^3 = z^2 \cdot z$
c) $\cos 288° + i\sin 288°$
d) $\cos 0° + i\sin 0°$

4249 a) $z^2 = i$ c) $z^6 = -i$
b) $z^4 = -1$ d) $z^8 = 1$

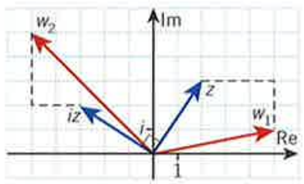
4250 $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4251 a) $n = 2$
Lösning:
z^n är reellt om $\operatorname{Im} z^n = 0$
Det betyder att $\arg z^n$ ska vara 0° eller 180°.
$n = 2$ ger $\arg z^2 = 180°$
b) $n = 3$
c) $n = 18$

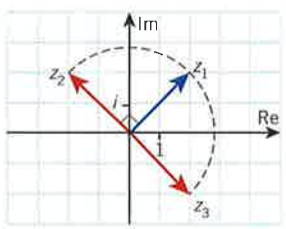
4252 $k = -3/2$
Ledtråd:
Imaginärdelen till z måste vara 0.

4253 $5\pi/12$

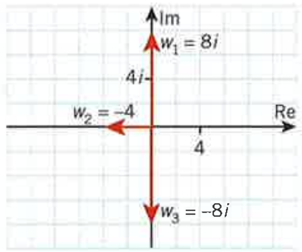
4255 $z_1 = 4 + 2i$
$z_2 = -5 + 2i$
$z_3 = -2 - 2i$

4256


4257 a) u
Motivering:
Multiplikation med i motsvarar en vridning 90° i positiv riktning.
b) v
Motivering:
Division med i motsvarar en vridning 90° i negativ riktning.
c) v
Motivering:
Multiplikation med $-i$ motsvarar en vridning 90° i negativ riktning.
d) w
Motivering:
$i^2 z = -z$

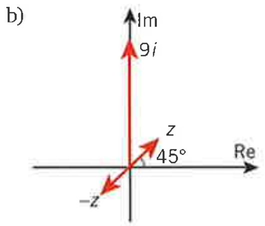
4258


4259 a) 10°
Lösning:
$\arg f(z_2) - \arg f(z_1) =$
$= 2 \cdot 20° - 2 \cdot 15° = 10°$
b) 25°
Lösning:
$\arg f(z_2) - \arg f(z_1) =$
$= 5 \cdot 20° - 5 \cdot 15° = 25°$

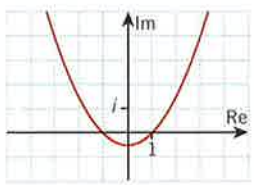
4260


Ledtråd:
Skriv vektorerna z_1, z_2 och z_3 i polär form.

4261 $z = 1{,}5i$
Lösning:
Talet ska ha beloppet 1,5 och argumentet 90°.
$z = 1{,}5(\cos 90° + i\sin 90°) =$
$= 1{,}5i$

4262 a) $9(\cos 90° + i\sin 90°)$
b)


$z_1 = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$
$z_2 = 3(\cos 225° + i\sin 225°)$

4263 Om $z = x + iy$ så är
$y = \frac{x^2 - 1}{2}$


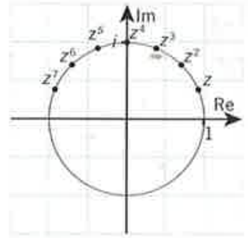
Lösning:
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = y + 1$
kvadrera båda sidor
$x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1$ förenkla
$y = \frac{x^2 - 1}{2}$ $(y \geq -0{,}5)$

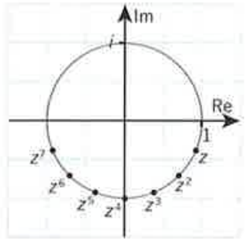
4304 a) $z^4 = -625$
Lösning:
$z^4 =$
$= 5^4(\cos 180° + i\sin 180°) =$
$= 625(-1 + 0i) = -625$
b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$
Lösning:
$z^4 = 2^4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) =$
$= 16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -8 + 8\sqrt{3}i$

4305 a) $z = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$
b) $z^5 = 32(\cos 600° + i\sin 600°)$
c) $z^5 = -16 - 16\sqrt{3}i$
Ledtråd:
$\cos 600° + i\sin 600° =$
$= \cos 240° + i\sin 240°$

4306 a) $-128 - 128\sqrt{3}i$
Lösning:
$(2 + 2\sqrt{3}i)^2 =$
$= 4 + 8\sqrt{3}i - 12 =$
$= -8 + 8\sqrt{3}i$
$(2 + 2\sqrt{3}i)^4 =$
$= (-8 + 8\sqrt{3}i)^2 =$
$= 64 - 128\sqrt{3}i - 192 =$
$= -128 - 128\sqrt{3}i$
b) $-128 - 128\sqrt{3}i$
Lösning:
$(4(\cos 60° + i\sin 60°))^4 =$
$= 256(\cos 240° + i\sin 240°)$
$= 256(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) =$
$= -128 - 128\sqrt{3}i$

4307 a) -64
Ledtråd:
$\sqrt{3} - i =$
$= 2(\cos 330° + i\sin 330°)$
b) $-128 + 128i$
Ledtråd:
$2 - 2i =$
$= \sqrt{8}(\cos 315° + i\sin 315°)$

4308 a)


b)


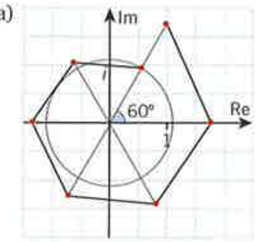
4309 T ex $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

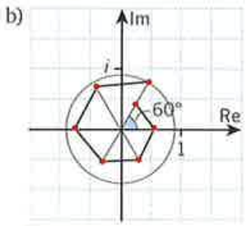
4310 a) 2 c) -4
b) 0 d) -8
Ledtråd:
I c) och d) kan det löna sig att gå över till polär form.

4311 $w = -729i$
Lösning:
$z^6 = 3^6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^6 =$
$= 729(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) =$
$= 729(0 - i) = -729i$

4312 a) Absolutbeloppet är $\sqrt{8}$
Argumentet är $\frac{\pi}{4}$
Ledtråd:
$z = 2 + 2i$
b) Absolutbeloppet är $5\sqrt{5}$
Argumentet är 4,40
Lösning:
$z = \frac{(1 + 2i)^{12}}{(1 - 2i)^9} =$
$= \frac{(\sqrt{5}(\cos 1{,}107 + i\sin 1{,}107))^{12}}{(\sqrt{5}(\cos(-1{,}107) + i\sin(-1{,}107)))^9} =$
$= \frac{(\sqrt{5})^{12}(\cos 13{,}286 + i\sin 13{,}286)}{(\sqrt{5})^9(\cos(-9{,}963) + i\sin(-9{,}963))} =$
$= 5\sqrt{5}(\cos 23{,}25 + i\sin 23{,}25)$
Argumentet i radianer =
$= 23{,}25 = 23{,}25 - 3 \cdot 2\pi = 4{,}40$

4313 a) $n = 4$
Lösning:
$(-1 + i)^n =$
$= (\sqrt{2})^n(\cos(135° \cdot n) +$
$+ i\sin(135° \cdot n)$
Imaginärdelen är 0 om argumentet är delbart med 180°.
Genom prövning ser vi att $n = 4$ är det lägsta värdet som ger detta.
b) $n = 12$
Ledtråd:
Uttrycket i parentesen kan skrivas
$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$

4314 a)


Kommentar:
När vi ökar exponenten med 1 kommer argumentet öka med 60° och beloppet multipliceras med 1,1. Punkterna bildar en utåtgående spiral.
b)


Kommentar:
När vi ökar exponenten med 1 kommer argumentet öka med 60° och beloppet multipliceras med 0,9. Punkterna bildar en inåtgående spiral.

4315 a) $\sin 3v = 3\sin v - 4\sin^3 v$
b) $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$
Ledtråd:
Utveckla $(\cos v + i\sin v)^3$ på två sätt. Dels med de Moivres formel, dels direkt. Realdelarna respektive imaginärdelarna lika ger sambanden.

4316 a) $\sin 5v =$
$= 16\sin^5 v - 20\sin^3 v + 5\sin v$

b) $\cos 5v =$
$= 16\cos^5 v - 20\cos^3 v + 5\cos v$

Ledtråd:
Gör på motsvarande sätt som i föregående uppgift.

4317 $2\cos nv$

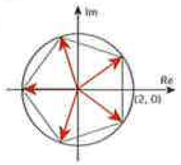
4319 a) $r^5(\cos 5v + i\sin 5v) =$
$= 32(\cos 180° + i\sin 180°)$

b) $r^5 = 32$ dvs $r = 2$
$5v = 180° + n\cdot 360°$,
dvs $v = 36° + n\cdot 72°$

c) $z_1 = 2(\cos 36° + i\sin 36°)$
$z_2 = 2(\cos 108° + i\sin 108°)$
$z_3 = 2(\cos 180° + i\sin 180°)$
$z_4 = 2(\cos 252° + i\sin 252°)$
$z_5 = 2(\cos 324° + i\sin 324°)$

Ledtråd:
Fem rötter till en femtegradsekvation.

d)



4320 a) $z_1 = 4$
$z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$
$z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i$

Ledtråd:
Skriv båda leden i polär form. Vi får $r^3 = 64$ och $3v = 0 + n\cdot 360°$

b) $z_1 = 3i$
$z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
$z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

Ledtråd:
Skriv båda leden i polär form. Vi får $r^3 = 27$ och $3v = 270° + n\cdot 360°$

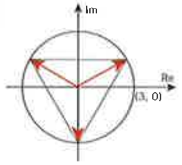
4321 a) $w = 27i$

b) De övriga rötterna har samma absolutbelopp som z_1 och argumenten $30° + 120°$ respektive $30° + 2\cdot 120°$

Motivering:
Rötterna till ekvationen $z^3 = w$ är hörn i en regelbunden triangel med medelpunkt i origo.

c) $z_2 = 3(\cos 150° + i\sin 150°)$
$z_3 = 3(\cos 270° + i\sin 270°)$

d)



4322 $z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$
$z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$
$z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$

Ledtråd:
Rötterna till ekvationen $z^4 = w$ är hörn i en kvadrat.
Argumentet är $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ där $n = 0, 1, 2, 3$

4323 a) $z_1 = 2, z_2 = 2i,$
$z_3 = -2, z_4 = -2i$

b) $z^4 = 16$
Motivering:
Fyra rötter ger att ekvationen är av fjärde graden. En rot $z_1 = 2$ ger ekvationen $z^4 = 16$

4324 a) Tre rötter: $n = 0, 1, 2$
$z = \cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$

b) Fem rötter: $n = 0, 1, 2, 3, 4$
$z = \cos\left(\frac{\pi}{5} + n\cdot\frac{2\pi}{5}\right) +$
$+ i\sin\left(\frac{\pi}{5} + n\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$

c) Fyra rötter: $n = 0, 1, 2, 3$
$z = \cos\left(\frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) +$
$+ i\sin\left(\frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

d) Sex rötter: $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
$z = 3\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$

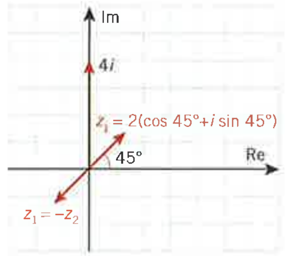
e) Fyra rötter: $n = 0, 1, 2, 3$
$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$

f) Tre rötter: $n = 0, 1, 2$
$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{2\pi}{3}\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(\frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

4325 a) $4(\cos 90° + i\sin 90°)$

b) $z_1 = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$
$z_2 = 2(\cos 225° + i\sin 225°)$
som också kan skrivas
$z = \pm 2(\cos 45° + i\sin 45°)$

c)



4326 $z^3 = -125i$
Lösning:
Figuren visar att ekvationen har tre lösningar. Den är alltså av tredje graden. En lösning är
$z_1 = 5(\cos 90° + i\sin 90°)$.
$z^3 = 125(\cos 270° + i\sin 270°) =$
$= -125i$

4327 a) Två reella och två icke-reella

b) En reell och fyra icke-reella

c) En reell och åtta icke-reella

d) Två reella och 98 icke-reella
Ledtråd:
Endast rötter med argumentet 0° och 180° är reella.

4328 $z^{10} = -1$

4329 $z_1 = \sqrt{2}(\cos 30° + i\sin 30°)$
$z_2 = \sqrt{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$
Ledtråd:
Skriv först högerledet på formen $a + bi$ och skriv sedan om båda leden i polär form.

4330 a) 17
Motivering:
Ekvationen har 17 komplexa rötter, eftersom de komplexa talen omfattar även de reella talen.

b) 4
Motivering:
Rötterna är
$z = \cos v + i\sin v$, där
$v = \frac{2\pi}{17}\cdot k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 16$
För $k = 5, 6, 7, 8$ ligger de i andra kvadranten, 4 rötter

4331 $z_{p+1} = 5^{1/n}\left(\cos\left(\frac{90°}{n} + p\cdot\frac{360°}{n}\right) +\right.$
$\left.+ i\sin\left(\frac{90°}{n} + p\cdot\frac{360°}{n}\right)\right)$ där
$p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

4334 a) $z = 5e^{i\pi/2}$
$u = 5e^{i3\pi/2}$

b) $z = 5e^{i3\pi/4}$
$u = 5e^{i5\pi/4}$

4335 a) $e^{i\pi/2}$
Lösning:
$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$

b) $2e^{i\pi}$

c) $3e^{-i3\pi/2}$

d) $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

4336 a) -1 b) 1

c) $\frac{1}{e^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \approx$
$\approx 0{,}025 + 0{,}043i$

d) $e(\cos 1 + i\sin 1) \approx$
$\approx 1{,}47 + 2{,}29i$

4337 $|z| = 6$
$\arg z = \pi/3$
$\text{Re}\, z = 3$
$\text{Im}\, z = 3\sqrt{3}$
Lösning:
$z = 6\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) =$
$= 6\cdot(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 3 + 3\sqrt{3}i$

4338 a) $i^3 = i^2\cdot i = -i$

b) Tre rötter $n = 0, 1, 2$
$z_1 = e^{i\pi/2}$
$z_2 = e^{i7\pi/6}$
$z_3 = e^{i11\pi/6}$

4339 a) $2\cdot e^{i\pi/6}$ b) $e^{\ln 2 + i\pi/6}$

4340 a) $15e^{i8\pi/15}$

b) $-13\,841\,287\,201$

4341 a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = e^{2\pm 3\pi i} =$
$= e^2\cdot e^{\pm 3\pi i} = e^2(\cos(\pm 3\pi) +$
$+ i\sin(\pm 3\pi)) =$
$= e^2(\cos(\pi) + 0) = -e^2$

b) $\exp(\frac{2 + \pi i}{4}) = e^{1/2 + i\pi/4} =$
$= \sqrt{e}\cdot e^{i\pi/4} =$
$= \sqrt{e}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$
$= \sqrt{e}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) =$
$= \sqrt{\frac{e}{2}}(1 + i)$

4342 a) $z = i\left(\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)$

b) $z = \frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right)$

4343 a) $\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \frac{1}{2}$
$(\cos v + i\sin v + \cos(-v) +$
$+ i\sin(-v)) = \frac{1}{2}(2\cos v) =$
$= \cos v$
Ledtråd:
Kom ihåg att
$\cos(-v) = \cos v$ och
$\sin(-v) = -\sin v$

b) $\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \frac{1}{2i}(\cos v +$
$+ i\sin v - \cos(-v) -$
$- i\sin(-v)) = \frac{1}{2i}(2i\sin v) =$
$= \sin v$

Historik: Euler – en produktiv matematiker

1 Felet består i att man antagit att rotlagarna gäller för negativa tal.

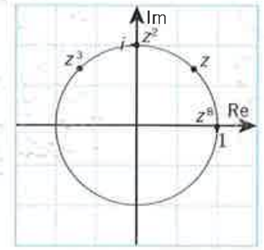
2 Eulers formel ger
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi =$
$= -1 + i\cdot 0 = -1$ och därmed är
$e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$.

3 a) $8e^{i\pi/2}$

b) $2e^{-i\pi/6} = 2e^{i11\pi/6}$

c) $16e^{i\pi/3}$

4



5 a) $6e^{i\pi/6}$

b) $\frac{27}{4}e^{-i\pi/6} = \frac{27}{4}e^{i11\pi/6}$

6 a) $e^3(\cos 1 + i\sin 1) \approx 10{,}9 + 16{,}9i$

b) $e\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= e\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \approx -1{,}92 + 1{,}92i$

7 $\text{VL} = e^{2 + \frac{\pi i}{3}} = e^2\cdot e^{\frac{\pi i}{3}} =$
$= e^2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= e^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^2(1 + i\sqrt{3}) = \text{HL}$

8 a) $\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2}$

b) $\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i}$

c) $\ln i = i\frac{\pi}{2}$

d) $i^i = e^{-\pi/2}$

Ledtråd:
a) och b) Utgå från Eulers formel
c) Utgå från om $z = \ln i$ så är $e^z = i$ och $z = i\frac{\pi}{2}$
d) Utgå från $i^i = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2}$

4403 a) $x = \pm 5$ d) $x = \pm\sqrt{50}$
b) $x = \pm 5i$ e) $x = \pm 2$
c) $x = \pm\sqrt{50}\cdot i$ f) $x = \pm 2i$

4404 a) $x = 4 \pm 3i$
b) $x_1 = 1$ $x_2 = 7$
c) $x = 5 \pm 2i$
d) $z = -2 \pm 5i$

4405 T ex $(x-3)(x-3i)=0$
som kan skrivas
$x^2-(3+3i)x+9i=0$

4406 a) $x_1 = i \quad x_2 = -3i$
b) $x_1 = i \quad x_2 = -2i$
c) $x_1 = i/2 \quad x_2 = -2i$
d) $x_1 = 2i \quad x_2 = -6i$

4407 $z = 1-5i$
Motivering:
Rötterna är konjugerade tal.

4408 Per har fel och Stina har rätt. Han glömmer att koefficienterna måste vara reella för att rötterna ska vara konjugerande tal. Lösningsformeln ger att
$z = -2i \pm 3i$
$z_1 = i \quad z_2 = -5i$

4409 Om $z^2 = w$
a) $z_1 = 4e^{i\pi/4} \quad z_2 = 4e^{i5\pi/4}$
b) $z = \pm 5(\cos 36° + i\sin 36°)$
som också kan skrivas
$z_1 = 5(\cos 36° + i\sin 36°)$
$z_2 = 5(\cos 216° + i\sin 216°)$
c) $z = \pm\sqrt{10}\,(\cos 5° + i\sin 5°)$
d) $z_1 = 3e^{i\pi/3} \quad z_2 = 3e^{i4\pi/3}$

4410 $z^2 - 10z + 29 = 0$
Ledtråd:
Rötterna är konjugerade tal.
$(z-(5+2i))(z-(5-2i)) = 0$

4411 a) $q = 17$ b) $z = 4 \pm i$

4412 a) $z_1 = 1+i \quad z_2 = -1-i$
Ledtråd:
Lös ekvationen på två sätt; med hjälp av de Moivres formel resp genom att ansätta
$z = a + bi$.
b) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

4413 $z_1 = 2i, \quad z_2 = -4$
Ledtråd:
$$z = -\frac{4-2i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2i}{2}\right)^2 + 8i} =$$
$$= -2 + i \pm \sqrt{3+4i} =$$
$$= -2 + i \pm \sqrt{(2+i)^2}$$

4414 a) Rötternas summa = 20
Rötternas produkt = 109
b) Rötternas summa = $-p$
Rötternas produkt = q

4415 $z_1 = 3-2i, \quad z_2 = -3+2i$
Ledtråd:
Ansätt $z = a + bi$

4417 a) $\frac{261}{3} = 87$ b) $\frac{1169}{7} = 167$

4418 a) Kvot = 62
Rest = 5
b) Kvot = 1 178
Rest = 6

4419 a) Kvot = $x^2 + 4x + 3$
Rest = 0
b) Kvot = $x^2 + 3x - 4$
Rest = 0

4420 a) Kvot = $7x + 8$
Rest = 0
b) Kvot = $4x^2 + x + 1$
Rest = -6
Ledtråd:
Skriv $4x^3 - 3x^2 + 0x - 7$ i den liggande stolen.

4421 a) Kvot = $x^3 + 2$
Rest = $x - 6$
b) Kvot = $x^4 + 3$
Rest = $-3x + 1$

4422 a) 17
Lösning:
$5 \cdot 3 + 2 = 17$
b) $x^2 - 4$
c) $x^5 + 3x^3 + 3x^2 + x + 6$
Lösning:
$(x^3+2)(x^2+3) + (x^2+x) =$
$= x^5 + 3x^3 + 3x^2 + x + 6$

4423 a) $k = 12$
b) $k = -6$
Ledtråd:
Kvoten = $x^2 - 3$
c) $k = -4$
d) $k = 40$
Ledtråd:
Kvoten =
$= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 20$

4424 Kvoten blir $z^2 + iz - 1 + i$

4425 $p(x) = (x+2)(x+1)(x-4)$
Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x-4)$.

4426 Resten kan högst vara ett andragradspolynom.
Motivering:
Divisionsalgoritmen stannar när resten är mindre än divisorn x^3+1. För polynom betyder mindre än att graden hos resten är lägre än hos divisorn.

4429 a) $x_1 = -4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5$
b) $(x+3)(x-6)^2 = 0$ som kan skrivas $x^3 - 9x^2 + 108 = 0$

4430 a) $x - 1$
Motivering:
$p(1) = 0$ betyder att $(x-1)$ en faktor till $p(x)$.
b) $x = -4$

4431 a) Sant
Motivering:
$p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$
b) Falskt
Motivering:
$p(-1) = (-1)^3 - 1 - 2 = -4$
Polynomet är inte delbart med $x - (-1) = x + 1$
Resten blir -4
c) Sant
Motivering:
$f(1) = 5$
d) Sant
Motivering:
$g(-10) = 0$

4432 a) 8 b) 0 c) -4 d) -2

4433 a) $f(1) = 0$ c) $p(2) = 0$
b) $g(-1) = 0$ d) $h(-3) = 0$

4434 Ja.
Motivering:
$x = 3$ är ett nollställe till polynomet, $f(3) = 0$
Det betyder att $(x-3)$ är en faktor i polynomet.

4435 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$
Ledtråd:
$f(x) = k(x-1)(x-0)(x+2)$
$f(-1) = 4$ ger $k = 2$

4436 a) Om ett polynom är delbart med polynomet $x^2 - 4$ så måste de ha samma nollställen $x = \pm 2$.
b) $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
$h(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

4437 a) $f(3) = 0$
b) $p(-1) = 0$
c) $h(2i) = 0 \quad h(-2i) = 0$
d) $g(-5) = 2632 \quad g(2) = 0 \quad g(3) = 0$
Kommentar:
$g(x)$ är delbart med $x - 2$ och $x - 3$

4438 a) $k = -4$
b) $k = 1{,}5$
Lösning:
$(-3)^3 + k \cdot (-3)^2 - k \cdot (-3) + 9 = 0$
$12k = 18$
$k = 1{,}5$
c) $k = 2$ eller $k = -1$
d) $k = 3$ eller $k = 4$

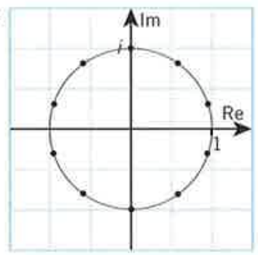
4439 a) $a = \pm 2$ b) Alla a.

4440 $x^3 - 4x - 11$

Historik: Carl Friedrich Gauss

1 Ekvationen har fem rötter.

2



3 Vi har ett polynom $f(x)$ med högsta grad n.
Enl algebrans fundamentalsats finns det minst en rot x_1 till $f(x) = 0$
Enl faktorsatsen är $(x - x_1)$ en faktor till $f(x)$ så
$f(x) = (x - x_1)g(x)$
där $g(x)$ är ett polynom med högsta grad $n - 1$.
Resonemanget upprepas n gånger och vi har visat att det finns exakt n rötter till $f(x)$.

4444 Ekvationen har 30 rötter.

4445 $x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -5$
Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x-1)$.

4446 $x_1 = -5 \quad x_2 = -i \quad x_3 = i$
Ledtråd:
Dividera polynomet med $(x+5)$.

4447 $p(2-5i) = 0$
Ledtråd:
För polynom med reella koefficienter är icke-reella rötter konjugerande par.

4448 $z_1 = 0 \quad z_2 = 2+i \quad z_3 = 2-i$
Ledtråd:
$z(z^2 - 4z + 5) = 0$

4449 a) 4 rötter
Motivering:
Ekvationen är av fjärde graden.
b) $x_1 = 3i$
$x_2 = -3i$
$x_3 = x_4 = 1$

4450 $-6i$ och $4+i$
Ledtråd:
För polynom med reella koefficienter är icke-reella rötter konjugerande par.

4451 $x_1 = -2, \; x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$

4452 $z_{1,2} = \pm i, \; z_3 = 3, z_4 = -2$

4453 $a = 7$ ger lösningarna $x_1 = -1$,
$x_{2,3} = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{23}i)$

4454 $x_{1,2} = \pm 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

4455 $x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = 3$

4456 $z_{1,2} = 1 \pm i, \; z_{3,4} = \pm 1$

4457 $z_{1,2} \pm \sqrt{3}i, \; z_{3,4} = -3 \pm i$

4458 *Lösning:*
$(-3) \cdot 2 \cdot 4 = -24 =$
= konstanttermen med ombytt tecken.
$(-3) + 2 + 4 = 3 =$
= koefficienten framför x^2 med ombytt tecken.

4459 *Lösning:*
Bryt först ut 4 så att vi får en 1:a framför tredjegradstermen:
$4\left(x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + \frac{3}{4}\right) = 0$
$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} =$
= konstanttermen med ombytt tecken.
$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} =$
koefficienten framför x^2 med ombytt tecken.

4460 Antag att ekvationen
$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots$
$+ a_1 x + a_0 = 0$
har rötterna $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$.
Då gäller
$a_{n-1} = -(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)$
$a_0(-1)^n = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n)$

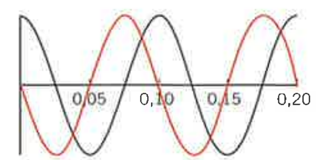
4461 $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$
Ledtråd:
Anta att rötterna till den givna ekvationen är p_1, p_2, p_3.
Då är rötterna till den sökta ekvationen p_1^2, p_2^2, p_3^2.
Använd sedan de tre sambanden mellan rötter och koefficienter på sidan.

4502 $U = \text{Re}\{15e^{i50\pi t}\}$

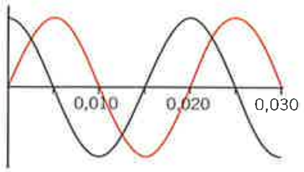
4503 a) 50 Hz
b) Med 230 V menar man att en likströmskrets med spänningen 230 V ger samma effekt som växelspänning med amplitud 325 V.

4504 $I = 10\cos(10\pi t)$
$I = U/R = \text{Re}\{30e^{i10\pi t}/3\} =$
$= \text{Re}\{10\,e^{i10\pi t}\} = 10\cos(10\pi t)$

4505 $I = 1{,}9\cos(20\pi t + \pi/2)$



4506 $I = 9{,}5\cos(100\pi t - \pi/2)$



4507 Han vet att om man multiplicerar med i så är det samma sak som att vrida ett komplext tal 90° ($\pi/2$ radianer).

4508 En kondensator med
$C \approx 0{,}000\,64$ H

En kondensator fasvrider $\pi/2$ radianer.

För att strömmen ska ha amplitud 5 krävs att

$\omega C50 = 5$

$50\pi C50 = 5$

$C = 1/500\pi \approx 0{,}000\,64$ F

4509 En spole med induktans
$L = 0{,}95$ H.

En spole fasvrider med $-\pi/2$ radianer.

För att strömmen ska ha amplitud 1 krävs att

$\frac{30}{L\omega} = 1$

$\frac{30}{L50\pi} = 1$

$L = 0{,}95$ H

4510 $\underline{I} = i\underline{U} = i \cdot Ae^{i\omega t} =$
$= e^{i\pi/2} \cdot Ae^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \pi/2)}$

4511 $\underline{U} = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_0 e^{i\omega t}) =$
$= LI_0 i\omega e^{i\omega t} = i\omega L\underline{I}$

Diagnos 4

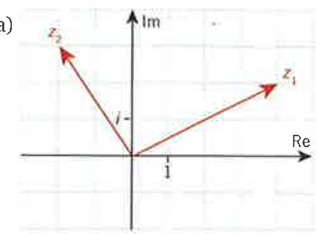
1 a) 2 d) 5
b) –4 e) $26 + 7i$
c) $5 - i$ f) $-14 + 23i$

2 a) $0{,}3 + 0{,}1i$
b) $6/29 - 15/29i$
c) $14/37 - 27i/37$

3 Konjugerade tal har samma realdel, men motsatt imaginärdel.
Tex $2 + 4i$ och $2 - 4i$

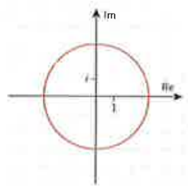
4 a) $-i$ b) 1 c) i

5 a)

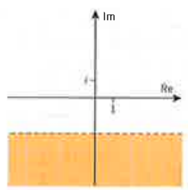


b) $|z_1| = \sqrt{20}$ $|z_2| = \sqrt{13}$
$|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$
Ledtråd:
$z_1 - z_2 = 6 - i$

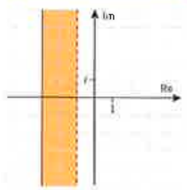
6 a)



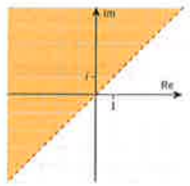
b)



c)

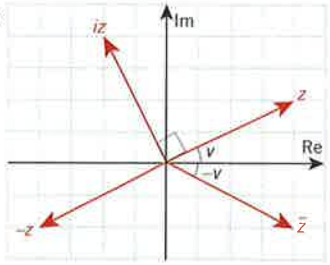


d)



7 a) $z =$
$= 5(\cos 53{,}1° + i\sin 53{,}1°) =$
$= 5(\cos 0{,}927 + i\sin 0{,}927)$
b) $z =$
$= 13(\cos 202{,}6° + i\sin 202{,}6°) =$
$= 13(\cos 3{,}536 + i\sin 3{,}536)$
c) $z =$
$= \sqrt{20}(\cos 116{,}6° + i\sin 116{,}6°) =$
$= \sqrt{20}(\cos 2{,}034 + i\sin 2{,}034)$
d) $z =$
$= \sqrt{29}(\cos 338{,}2° + i\sin 338{,}2°) =$
$= \sqrt{29}(\cos 5{,}903 + i\sin 5{,}903)$

8



9 a) **1** Skriv högerledet i polär form.
2 Sätt $z = r(\cos v + i\sin v)$ och använd de Moivres formel.
3 Båda leden är nu i polär form.
a) Sätt absolutbeloppen lika.
b) Sätt vinklarna lika och ta hänsyn till perioden.
4 De n rötterna har alla samma absolutbelopp (de ligger på en cirkel). Punkt 3b ger argumenten.

b) $z_1 = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) =$
$= 1 + i\sqrt{3}$
$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$
$z_3 = 2(\cos 5\pi/3 + i\sin 5\pi/3) =$
$= 1 - i\sqrt{3}$

10 a) $z_1 = 2$
$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
b) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$
$z_2 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$
$z_3 = \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}$
$z_4 = \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}$

11 a) $\cos\pi + i\sin\pi$
b) $e^2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$
c) $e(\cos(-2) + i\sin(-2))$

12 $z = 3 + i$
Lösning:
$z = a + bi$ ger
$3(a + bi) + (a - bi) = 12 + 2i$
$3a + 3bi + a - bi = 12 + 2i$
$4a + 2bi = 12 + 2i$
Realdelarna lika ger
$4a = 12$
$a = 3$
Imaginärdelarna lika ger
$2b = 2$
$b = 1$

13 a) $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
b) $x_1 = 7i$, $x_2 = -i$
Ledtråd:
Lös ekvationen med *pq*-formeln.
c) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
Ledtråd:
Skriv om båda leden i polär form.

14 a) Resten = 5
Ledtråd:
Beräkna $f(1)$
b) Resten $= f(-2) = -16$

15 $x_1 = 0$ $x_2 = -1$ $x_3 = -3$ $x_4 = 2$
Ledtråd:
Ekvationen kan skrivas
$x(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$
Dividera uttrycket i parentesen med $x + 1$ för att hitta övriga rötter.

Blandade övningar kapitel 4

1 a) $5 + 9i$
b) $9 - 4i$
c) –1
Lösning:
$2i^2 - (-i)^2 = 2 \cdot (-1) - i^2 =$
$= -2 + 1 = -1$
d) $12 - 16i$

2 Alla
Motivering:
Alla talen är komplexa tal, eftersom de komplexa talen omfattar även de reella talen.

3 T ex $z = 6 + 2i$

4 a) $0{,}2 + 1{,}4i$ b) $1 - 5i$

5 a) $\bar{z}$ betyder konjugatet till z
Om $z = a + bi$ så är $\bar{z} = a - bi$
b) $|z|$ betyder absolutbeloppet av z vilket innebär avståndet från origo till z.

6 $z_1 = 0$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = -2 - 3i$
Ledtråd:
Börja med att bryta ut z.

7 $z = -3 + 3i =$
$= \sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{18}e^{i3\pi/4}$

8 a) T ex $z^2 - 2z + 5 = 0$
b) T ex $x^2 - 2x - 3 = 0$

9 Nej.
Motivering:
En division går jämnt upp om resten är noll.
$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$
Då $f(x)$ divideras med $x - 1$ är resten $= f(1)$ och $f(1) = -1$

10 Ja.
Motivering:
$\frac{z}{i} = \frac{z \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i \cdot z}{1} = -i \cdot z$

11 a) $\bar{z} = r(\cos(-v) + i\sin(-v)) =$
$= r(\cos v - i\sin v)$
b) $-z = r(\cos(v + 180°) +$
$+ i\sin(v + 180°)) =$
$= r(-\cos v - i\sin v)$
c) $z^2 = r^2(\cos 2v + i\sin 2v)$
d) $z \cdot \bar{z} = r^2(\cos 0 + i\sin 0)$

12 a) T ex i och $-2i$
b) T ex $5i$ och $1 + i$

13 Ja.
Förklaring:
$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$
$i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$ osv
Ur mönstret kan vi t ex se att $i^{4n} = 1$ (n är ett heltal) vilket ger att $i^{100} = i^{4 \cdot 25} = 1$ och
$i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

14 $z = 0{,}5 - 4i$
Ledtråd:
Sätt in $z = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$ i ekvationen, förenkla VL och jämför med HL.

15 $x_1 = 2$ $x_2 = i$ $x_3 = -i$
Ledtråd:
Dividera polynomet med $x - 2$ för att hitta övriga rötter.

16 $t = -1/3$
Ledtråd:
z är reellt då $\operatorname{Im} z = 0$

17 *Lösning:*
$\frac{6e^{-\frac{i\pi}{3}}}{3e^{\frac{i\pi}{3}}} = 2e^{-i2\pi/3} =$
$= 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$
$= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

18 $z = \frac{(a+bi)^2 - (a-bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{4abi}{a^2+b^2}$
Ledtråd:
Skriv på gemensamt bråkstreck och förenkla.

19 *Ledtråd:*
Faktorisera $(a^2 + b^2)$ och $(c^2 + d^2)$
$(a^2 + b^2) = (a + bi)(a - bi)$
Förenkla sedan
$(a + bi)(c - di)(a - bi)(c + di)$ till
$(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$

20 $z = 29 \pm 13i$

21 a) Absolutbeloppet = 2
Argumentet = 30°

b) Absolutbeloppet = 4
Argumentet = 60°

c) Absolutbeloppet = 5
Argumentet = 270°

d) Absolutbeloppet = 125
Argumentet = 90°
Ledtråd:
$(-5i)^3 = -125i^3 = 125i$

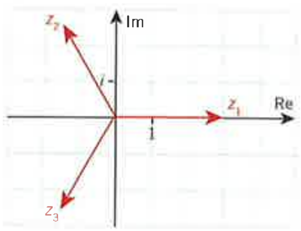
22 a) $6\,(\cos 110° + i \sin 110°)$

b) $1{,}5\,(\cos 30° + i \sin 30°)$

23 Visa att uttryckets värde är noll för $x = -3$.
Faktorsatsen ger då att uttrycket har faktor $(x + 3)$

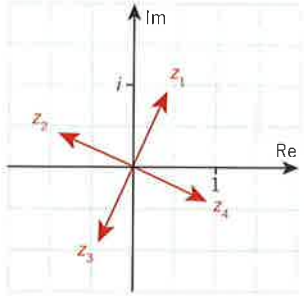
24 Välj en ekvation med icke -reella rötter t ex $z^2 - 2z + 5 = 0$.
Lösningsformeln ger
$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5}$
De två komplexa rötterna är konjugerade tal eftersom de har samma realdel och motsatt imaginärdel.

25 a) $z_1 = 3\,(\cos 0° + i \sin 0°)$
$z_2 = 3\,(\cos 120° + i \sin 120°)$
$z_3 = 3\,(\cos 240° + i \sin 240°)$



Ledtråd:
Alla lösningarna har samma absolutbelopp och är symmetriskt fördelade i talplanet.

b) $z_1 = 1\,(\cos 67{,}5° + i \sin 67{,}5°)$
$z_2 = 1\,(\cos 157{,}5° + i \sin 157{,}5°)$
$z_3 = 1\,(\cos 247{,}5° + i \sin 247{,}5°)$
$z_4 = 1\,(\cos 337{,}5° + i \sin 337{,}5°)$

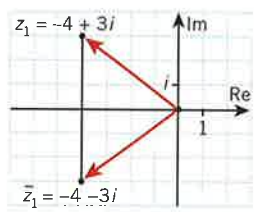


26 *Förklaring:*
De tre rötterna till ekvationen
$z^3 = w$
är hörn i en liksidig triangel.
Argumenten är v, $v + 120°$ och $v + 2 \cdot 120°$.
Detta gäller ej för rötterna i Elnas lösning.

27 a) $x = 1$, $x = -3$ och $x = 3$

b) $(x - 1)$, $(x + 3)$, $(x - 3)$,
$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$,
$(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$,
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$
samt $p\,(x)$ självt.

28 a)



b) 12 areaenheter

c) $|ab|$ areaenheter
Ledtråd:
I det givna exemplet är $a = -4$ och $b = 3$.
$ab = -12$. Det behövs alltså ett absoluttecken för att få ett positivt resultat.

29 *Lösning:*
Alt 1: Man utför divisionen $\frac{p(x)}{x-3}$ och ser om resten är noll, i så fall är $(x - 3)$ en delare.
Alt 2: Man beräknar $p(3)$.
Om $p(3) = 0$ är $(x - 3)$ en delare.

30 $e^{\ln\sqrt{2} + \pi i/4}$
Lösning:
$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$
$= e^{\ln\sqrt{2}} \cdot e^{\pi i/4} = e^{\ln\sqrt{2} + \pi i/4}$

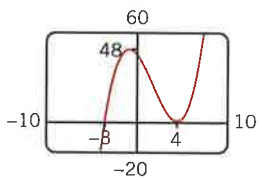
31 $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$
symmetri ger
$z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \sin 135°) =$
$= -1 + i$
$z_3 = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i \sin 225°) =$
$= -1 - i$
$z_4 = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i \sin 315°) =$
$= 1 - i$

32 $2\,(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12) \approx$
$\approx 1{,}93 + 0{,}52i$
$2\,(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4) =$
$= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$2\,(\cos 17\pi/12 + i \sin 17\pi/12) \approx$
$\approx -0{,}52 - 1{,}93i$

33 $n = 0, n = \pm 1$
Ledtråd:
$(n + i)^4 =$
$= n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$

34 0
Ledtråd:
Skriv $1 + i$ och $1 - i$ på polär form och använd de Moivres formel.

35 $x_1 = -3$, $x_{2,3} = 4$



Ledtråd:
$(x^3 - 5x^2 - 8x + 48)/(x - 4)^2 = x + 3$

36 Du ska visa att $f(x) = 0$ för de x-värden som är nollställen till tredjegradspolynomet, dvs att $f(0) = 0, f(0{,}5) = 0$ och $f(1) = 0$

37 a) $\frac{1}{z}$ ligger i område G
Lösning:
$\frac{1}{z} = \frac{1}{-0{,}4 + 0{,}1i} =$
$= \frac{(-0{,}4 - 0{,}1i)}{(-0{,}4 + 0{,}1i)(-0{,}4 - 0{,}1i)} =$
$= -\frac{0{,}4}{0{,}17} - \frac{0{,}1}{0{,}17}i \approx -2{,}4 - 0{,}6i$

b) $\frac{1}{z}$ ligger i område F.
Motivering:
$z = a + bi$ ligger i 1:a kvadranten i B.
$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$
$\frac{1}{z}$ ligger i 4:e kvadranten.
I område B är $|z| > 1$ vilket ger $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} < 1$
$\frac{1}{z}$ ligger alltså i område F.

c) $\frac{1}{\bar{z}}$ ligger i område D.
Motivering:
$z = a + bi$ ligger i 1:a kvadranten i B.
$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - bi} = \frac{a + bi}{a^2 + b^2}$
$\frac{1}{\bar{z}}$ ligger i 1:a kvadranten.
I område B är $|z| > 1$ och $|z| = |\bar{z}|$
vilket ger $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} < 1$
$\frac{1}{\bar{z}}$ ligger alltså i område D.

38 a) 3 reella och 0 icke-reella lösningar
Motivering:
En tredjegradsekvation har tre komplexa rötter. Funktionen i figuren har tre nollställen. Detta ger att de komplexa rötterna även är reella rötter.

b) T ex en funktion med nollställena
$x_1 = 2 \quad x_2 = i \quad$ och $\quad x_3 = -i$.
En tredjegradsfunktion med dessa nollställen är tex
$y = (x - 2)(x - i)(x + i)$
som också kan skrivas
$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$

c) Jämför med möjliga grafer till en tredjegradsfunktion.
0 reella nollställen är omöjligt, alla grafer skär x-axeln minst 1 gång.
2 reella nollställen är möjligt om den ena är en dubbelrot, t ex $y = (x - 1)(x - 3)^2$
3 reella nollställen är möjligt, t ex $y = x(x - 1)(x + 1)$

39 a) T ex $z_1 = 3$ och $z_2 = 4i$ ger
$z_1 + z_2 = 3 + 4i$
$|z_1| = 3 \quad |z_2| = 4$ och
$|z_1 + z_2| = 5$
$|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$
Ett motexempel räcker för att visa att påståendet är falskt.

b) T ex $z_1 = 3i$ och $z_2 = 4i$ ger
$z_1 + z_2 = 7i$
$|z_1| = 3 \quad |z_2| = 4$ och
$|z_1 + z_2| = 7$
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
Talen måste ligga på samma stråle som utgår från origo

c) Sätter vi t ex
$|A(\cos\alpha + i\sin\alpha) + B(\cos\beta + i\sin\beta)| = A + B$
ger det att
$\sqrt{(A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta)^2} = A + B$
vilket efter förenkling med trigonometriska formler ger
$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta)} = A + B$
som är lika om
$(\alpha - \beta) = 0° + n \cdot 360°$
dvs $\alpha = \beta + n \cdot 360°$

Blandade övningar kapitel 1–4

1 a) $-2 - 12i$

b) $15 + 5i$

c) 1

Ledtråd:
$i^4 = 1$

2 a) $y' = 2\cos 0{,}5x$

b) $y' = x \cdot \ln x + 0{,}5x$

c) $y' = -\frac{1}{x^2}$

d) $y' = 20(1 + 2x)^{-0{,}75}$

3 $z_1 = 4 + 3i, z_2 = 4 - 3i$

4 T ex 150° och 390°
Motivering:
$\sin(180° - v) = \sin v$
$\sin(v + n \cdot 360°) = \sin v$

5 $x = 3$ eller $x = 2$

6 a) $\frac{3}{5} - \frac{14}{5}i = 0{,}6 - 2{,}8i$

b) $1 - 5i$

7 *Ledtråd:*
Visa att $x > 6$ ger $0{,}5x + 2 > 5$.

8 $\int_1^2 a\,(t)\,dt = 17/3$
Tolkning:
Under tiden $t = 1$ s till $t = 2$ s ökar hastigheten med 5,7 m/s

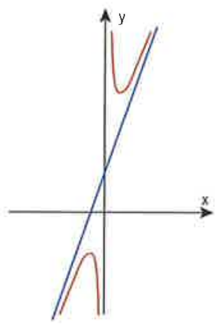
9 $x = \pm 13° + n \cdot 180°$.
Ledtråd:
$2x = \pm 26° + n \cdot 360°$.

10 Argumentet ökar med 90° och absolutbeloppet halveras.
Ledtråd:
$i/2 = 1/2(\cos 90° + i \sin 90°)$

11 $-\cos x$
Ledtråd:
Använd additionsformeln för sinus.

12 Ja.
Ledtråd:
Visa att VL = HL, utnyttja att $\tan 2x = \sin 2x/\cos 2x$

13



Lokalt max: $(-1, -3)$
Lokalt min: $(1, 9)$
Asymptot: y-axeln, $y = 3x + 3$

14 16
Ledtråd:
$f(x) = 0{,}5x + 2$

15 $x_1 = -2,\ x_2 = 1 - i,\ x_3 = 1 + i$
Ledtråd:
$$\frac{x^3 - 2x + 4}{x + 2} = x^2 - 2x + 2$$

16 *Lösning:*
$$\text{VL} = \frac{\sin 2v + \sin v}{2\cos v + 1} = \frac{2\sin v \cos v + \sin v}{2\cos v + 1} = \frac{\sin v\,(2\cos v + 1)}{2\cos v + 1} = \sin v = \text{HL}$$

17 a) Minsta värde: $-0{,}5$
Största värde: $0{,}5$
Ledtråd:
Visa med derivata att
$y < 0$ och avtagande för $x < -1$
$y > 0$ och avtagande för $x > 1$
dvs minsta och största värde ges av extrempunkterna då $x = -1$ och $x = 1$

b) Minsta värde: 2,5
Största värde: saknas, y växer obegränsat då $\cos x$ närmar sig 1.

18 a) $\sin(B + C) = 0{,}6$
Ledtråd:
$B + C = 180° - A$.

b) $\cos(B + C) = -0{,}8$
Ledtråd:
Använd trigonometriska ettan.
ABC spetsvinklig ger att $(B + C) > 90°$.

19 $k = 2^{1/n}$

20 $z_1 = i$ och $z_2 = -i/2$
Ledtråd:
Ansätt $z = a + bi$, sätt in förenkla och identifiera.

21 a) $z = 13(\cos 1{,}176 + i \sin 1{,}176)$
b) $z = 13e^{1{,}176i}$

22 $x \approx 216°$ och $x \approx 306°$

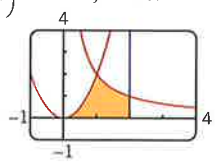
23 $y_{max} = 14$, $y_{min} = 6$, Perioden $= \pi$ rad.

24 a) 4 b) 9,5
Ledtråd:
Tolka integralen som area och räkna rutor.

25 $a = 25$

26 *Förklaring:*
n:te rötterna till ett komplext tal ligger alltid symmetriskt i talplanet på samma avstånd till origo. Fjärde roten är här $-i$.

27 $\left(\frac{2}{3} + \ln 4\right)$ a.e. $\approx 2{,}05$ a.e.
Ledtråd:



$$A = \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx$$

28 a) 2,4 dm³ $(3\pi/4)$
Ledtråd:
Beräkna $\int_1^2 \pi(\sqrt{0{,}5x})^2\,dx$

b) 4,7 dm³ $(3\pi/2)$
Ledtråd:
Beräkna $\int_0^1 \pi x^2\,dy = \int_0^1 \pi(y + 1)\,dy$

29 $A = 3$, $B = 10$ och $k = 6$
Ledtråd:
Perioden $= 2\pi/k$
$\pi/6$ är en halv period.

30 Ca 66 st.

31 Ja, alla $k > 8$.
Motivering:
För $k > 8$ är arean under x-axeln i intervallet $0 < x \leq k$ större än arean ovanför x-axeln.

32 T ex $(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)$
Förklaring:
Icke reella rötter förekommer i konjugerade par, dvs rötterna är $2, i, -i, -2i, 2i$.

33 *Lösning:*
$A = x \cdot 4xe^{-x} = 4x^2e^{-x}$ $\quad x > 0$
$A' = 4xe^{-x}(2 - x)$
$A'(x) = 0$ för $x = 0$ och $x = 2$.
$A'(1) > 0$ och $A'(3) < 0$
dvs derivatans teckenväxling ger lokalt max då $x = 2$.

34 $z_1 = \sqrt{3} + i$ $\quad z_4 = -\sqrt{3} - i$
$z_2 = 2i$ $\quad z_5 = -2i$
$z_3 = -\sqrt{3} + i$ $\quad z_6 = \sqrt{3} - i$
Ledtråd:
De Moivres formel ger:
$r^6(\cos 6v + i \sin 6v) =$
$= 64(\cos 180° + i \sin 180°)$

35 a) Ca 300 a.e.
Ledtråd:
Räkna rutor eller beräkna t ex arean för två parallelltrapetser.
Utnyttja t ex att $y(2) \approx 62$ och $y(5) \approx 30$.

b) Under de 5 första minuterna rinner det ut 290 liter vatten.

36 Volymen ökar med 0,63 m³/min
Ledtråd:
Kedjeregeln ger:
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$
Halvklot ger:
$$V = \frac{2\pi r^3}{3} \text{ och } \frac{dV}{dr} = 2\pi r^2$$

37 Summan, $s \geq 43{,}8$ cm $(2\sqrt{480})$
Ledtråd:
Rätblock med måtten x cm $\times$ y cm $\times$ z cm ger
$xz = 20$ och $yz = 10$
$s = 4x + 4y + 4z =$
$= 6x + 80/x$ $\quad x > 0$

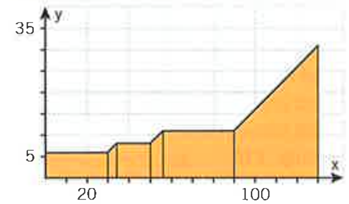
38 a) Nej.
b) Ja, t ex $z = -\sqrt{3} + i$

39 Ca 5,3 min
Ledtråd:
Lös ekvationen $\int_0^k (x^2 + 1)\,dx = 55$

40 a) $A = 1$, $B = -1$
b) $F(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

41 *Ledtråd:*
Låt t ex $y = r$ rotera kring x-axeln mellan linjerna $x = 0$ och $x = h$.

42 $b = 1\,605{,}75$
Lösning:



Figuren visar största möjliga område som $y = f(x)$ kan begränsa.

Arean =
$= 30 \cdot 5{,}9 + 2{,}2 \cdot 14 + 15{,}6 \cdot 8{,}1 +$
$+ 2{,}9 \cdot 19{,}1 + 34{,}2 \cdot 11 + 20 \cdot 42 =$
$= 1\,605{,}75$

$$\int_0^{130} f(x)\,dx \leq 1\,605{,}75$$

43 $v \approx 37°$
Ledtråd:
Totala kostnaden ges av
$$K = 2\,500 \cdot \frac{30}{\cos v} + 1\,500 \cdot (75 - 30\tan v)$$
Lös grafiskt.

44 $b = \frac{1}{2e}$
Ledtråd:
$$\begin{cases} bx^2 = \ln x \\ 2bx = \frac{1}{x} \end{cases}$$

45 $K = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

46 a) *Lösning:*
T ex $z = 1 + 2i$ och $w = 3 + 4i$
$zw = (1 + 2i)(3 + 4i) =$
$= -5 + 10i$
$\overline{zw} = -5 - 10i$
$\bar{z} \cdot \bar{w} = (1 - 2i)(3 - 4i) =$
$= -5 - 10i$

b) *Ledtråd:*
Beviset genomförs på likartat sätt med talen $z = a + bi$ och $w = c + di$, där $b \neq 0$ och $d \neq 0$

47 a) $k = n \cdot 2\pi$
b) $k = n \cdot 2\pi/b$

48 *Ledtråd:*
$z = r(\cos v + i \sin v)$ ger
$z^2 = r^2(\cos 2v + i \sin 2v)$
z^2 är reellt om
$2v = 0$ eller $2v = \pi$.
dvs $v = 0$ eller $v = \pi/2$
Imaginärt om $2v = \pm\pi/2$
dvs $v = \pm\pi/4$
På liknande sätt undersöks
$z^3 = r^3(\cos 3v + i \sin 3v)$

49 $g(x) = x - 3$ är delare till $p(x)$ då $x = 3$ är nollställe till $p(x)$.

$p(x)$ har även nollställen $x = -2$ varför $(x + 2)$ också är delare.
Resterande delare är
$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$
samt de kvoter vi får när vi delar $p(x)$ med delarna ovan.

50
- $A = B = 2$ a.e.
-

k	area A	area B
1	2	2
2	1	1

Areorna är lika

- Visa att arean i båda fallen blir $2/k$ a.e.
Ledtråd:
A: $(2/k \cdot 2)/2$
$$B: \int_0^{\frac{\pi}{2k}} 2\cos kx\,dx = \left[\frac{2\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2k}}$$