Blandade övningar kapitel 1–4

Del I Utan räknare

1 Förenkla

a) $2-4i(3-i)$ b) $(3-i)(4+3i)$ c) i^{24}

2 Derivera

a) $y = 4\sin 0{,}5x$ c) $y = \dfrac{x+1}{x}$

b) $y = 0{,}5x^2 \cdot \ln x$ d) $y = 40(1+2x)^{0{,}25}$

3 Lös ekvationen $8z - z^2 = 25$

4 Ange två vinklar som har samma sinusvärde som 30°. Motivera ditt svar.

5 Bestäm x om $|2x-5| = 1$

6 Skriv följande kvoter på formen $a + bi$

a) $\dfrac{4-5i}{2+i}$ b) $\dfrac{5+i}{i}$

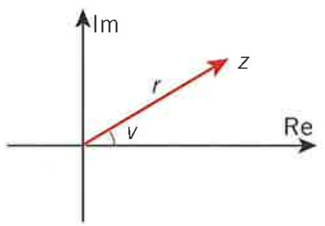
7 Visa med ett indirekt bevis att $0{,}5x + 2 \le 5$ om $x \le 6$.

8 Accelerationen a m/s² ges av formeln $a(t) = 2t^2 + 1$, där t är tiden i sekunder

Beräkna och tolka $\int_1^2 a(t)\,dt$

9 Lös ekvationen $\cos 2x = 0{,}9$ om $\cos 26° = 0{,}9$ (NP)

10 Hur förändras argument och absolutbelopp för ett komplext tal z om det multipliceras med $\dfrac{1}{2}i$?



(NP)

11 Förenkla med lämplig formel $\sin(x + 3\pi/2)$ så långt som möjligt.

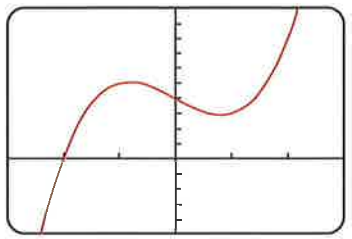
12 Är $y = 2\sin 2x$ en lösning till differentialekvationen $y - 0{,}5y' \cdot \tan 2x = 0$?

13 Skissa grafen till $y = \dfrac{3}{x} + 3x + 3$

14 För funktionen f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(x) = 0{,}5$ för alla x.

Beräkna $\int_2^6 f(x)\,dx$ (NP)

15 Figuren visar grafen till funktionen $y = x^3 - 2x + 4$. Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3 - 2x + 4 = 0$



(NP)

16 Visa att $\dfrac{\sin 2v + \sin v}{2\cos v + 1} = \sin v$ för alla v där uttrycken i båda leden är definierade.

17 Undersök om funktionen har något största och minsta värde.

a) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{5}{1-\cos x}$

18 I den spetsvinkliga triangeln ABC är $\sin A = 0{,}6$.

a) Bestäm värdet av $\sin(B + C)$

b) Bestäm värdet av $\cos(B + C)$ (NP)

19 Bestäm k så att $\int_1^k x^{n-1}\,dx = 1/n$ $(n \ne 0)$

20 Lös ekvationen $z - \bar{z} + \dfrac{1}{z} - i = 0$ (NP)

Del II Med räknare

21 Bestäm $\arg z$ i radianer med tre decimaler och omvandla $z = 5 + 12i$ till

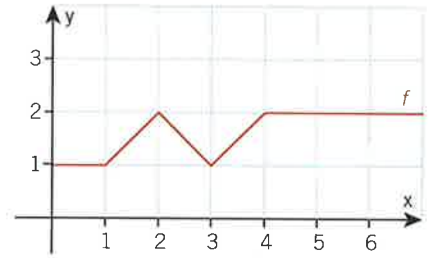
a) polär form b) formen re^{iv}

22 Lös grafiskt ekvationen $\tan 2x = 3$ för x i intervallet $180° < x < 360°$.

23 Bestäm utan räknare största och minsta värde samt period i radianer för $y = 10 - 4\sin 2x$. Kontrollera grafiskt.

24 Figuren visar grafen till funktionen f. Beräkna

a) $\int_4^6 f(x)\,dx$ b) $\int_0^6 f(x)\,dx$



25 Ekvationen $z^2 - 10z + a = 0$, där a är ett reellt tal, är given. Vilket är det största heltal a för vilket ekvationen har reella rötter?

26 Jonte studerar lösningar till ekvationen $z^4 = 1$

Han vet att 1, -1 och i är lösningar. Skissa in lösningarna i ett komplext talplan och förklara för Jonte hur han kan hitta den fullständiga lösningen.

27 Kurvorna $y = \dfrac{2}{x}$ och $y = 2x^2$ innesluter tillsammans med x-axeln och linjen $x = 2$ ett begränsat område. Beräkna arean av detta område.

28 En kruka har en form som kan ges av en rotationskropp. Beräkna volymen om x och y mäts i decimeter och volymen motsvarar den rotationsvolym som uppstår då

a) kurvan $y = \sqrt{0{,}5x}$ roterar kring x-axeln mellan $x = 1{,}0$ och $x = 2{,}0$.

b) kurvan $y = 2x^2 - 1$ roterar kring y-axeln mellan $y = 0$ och $y = 1{,}0$.

29 Funktionen $y = A\cos kx + B$ har en lokal maximipunkt $(0, 13)$ och en lokal minimipunkt $(\pi/6, 7)$. Mellan dessa punkter har kurvan inga extrempunkter. Bestäm A, B och k.

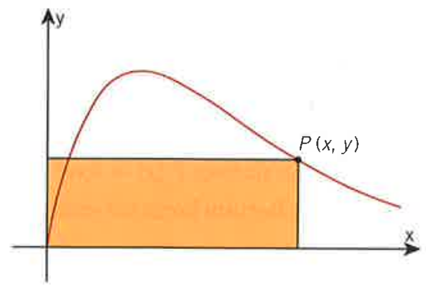
30 En maskin fyller chipspåsar. Chipspåsarnas vikt är normalfördelad med medelvärde 198 g och standardavvikelse 4,5 g.

Till en butik levereras 200 påsar från denna maskin. Hur många av dessa påsar kan förväntas väga mer än 200 gram?

31 Finns det något positivt värde på k så att $\int_0^k (4-x)\,dx < 0$? Motivera.

32 Ange ett polynom med reella koefficienter och lägsta möjliga gradtal som har nollställena 2, i och $-2i$.

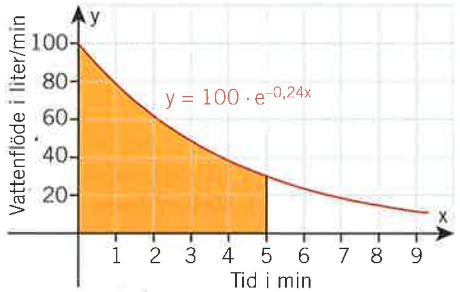
33 Figuren visar grafen till funktionen $y = 4x \cdot e^{-x}$ i intervallet $x \ge 0$. Från en punkt P på kurvan dras linjer mot x-axeln och y-axeln så att en rektangel bildas (se fig).



Visa med hjälp av derivata att rektangelns area har ett lokalt maximum för $x = 2$. (NP)

34 Bestäm på formen $a + bi$ alla sjätterötter ur -64.

35 En vattentank innehåller 2 000 liter vatten. Efter x minuter rinner vatten ut ur tanken med hastigheten $y = 100 \cdot e^{-0,24x}$ liter/min.



a) Uppskatta grafiskt den markerade arean.

b) Beräkna den markerade arean och tolka vad den betyder i detta exempel.

36 Ett halvklotformat hål grävs i marken. Hålets radie ökar med 10 cm/min. Beräkna hur snabbt hålets volym ökar då radien är 1,0 m.

37 I ett rätblock vet vi att två av sidoytorna är 10,0 cm^2 respektive 20,0 cm^2. Undersök med hjälp av derivata vilka värden som summan av kantlängderna kan anta. *(NP)*

38 Undersök om det finns komplexa tal z så att

a) $z/\bar{z} = 2 + i$ b) $z/\bar{z} = (1-\sqrt{3}\,i)/2$

39 Vid ett verktygsprov förändras materialets temperatur y °C på ett sådant sätt att $y' = x^2 + 1$ där x är tiden i minuter. Hur länge dröjer det innan verktygets temperatur är 75 °C om begynnelsetemperaturen är 20 °C ?

40 a) Anta att en primitiv funktion F till $f(x) = x \cdot e^x$ kan skrivas $F(x) = Axe^x + Be^x$

Derivera F och bestäm konstanterna.

b) Tillämpa metoden i a) på att finna en primitiv funktion till $f(x) = x^2e^x$.

41 Visa formeln för en cylinders volym med hjälp av en rotationsvolym.

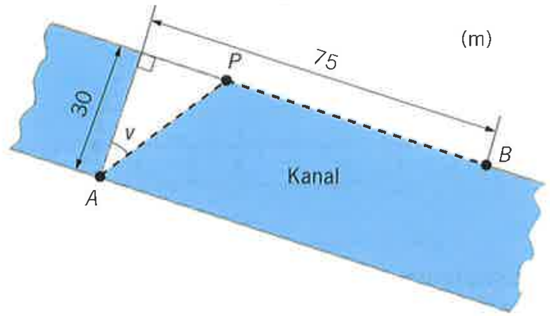
42 Tabellen visar funktionsvärden till en växande funktion $y = f(x)$ för vilken man vet att den är deriverbar och $0 \le f'(x) \le 0,5$ för $x \ge 0$.

x	y
30	5,9
50	8,1
90	11,0

Bestäm ett så litet värde b som du kan för vilket säkert gäller att

$$\int_0^{130} f(x)\,dx \le b$$ *(NP)*

43 Punkterna A och B ligger på var sin sida av en 30 m bred kanal, se figur.



En kabel ska dras från punkt A till punkt B. Kabeln ska först gå genom vattnet till en punkt P och därefter på land längs kanalens kant till punkt B. Kostnaden för kabeldragningen är 2 500 kr/m i vattnet och 1 500 kr/m på land.

Bestäm vinkeln v så att kostnaden för kabeldragningen blir så liten som möjligt. *(NP)*

44 Kurvorna $y = bx^2$ och $y = \ln x$ tangerar varandra. Beräkna konstanten b exakt.

45 Finn alla reella och positiva tal K så att $z = (2 + Ki)^3$ är reellt.

Utredande uppgifter

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

46 a) Välj två komplexa tal z och w sådana att $\text{Im}\, z \ne 0$ och $\text{Im}\, w \ne 0$.
Visa att sambandet $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ gäller för de komplexa tal du valt.

b) Visa att sambandet $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ gäller för alla komplexa tal. *(NP)*

47 Undersök och bestäm ett uttryck för k som ger att

a) $\int_0^k \sin x\, dx = 0$

b) $\int_0^k A \sin bx\, dx = 0$

48 Undersök för vilka komplexa tal, z, som kvadraten z^2 är reell respektive rent imaginär.

Undersök på samma sätt vad som gäller för z^3.

49 Rita och undersök graferna till

$p(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$

$f(x) = x$, $g(x) = x - 3$ och $h(x) = x - 6$

Är något av polynomen f, g, h delare till p?

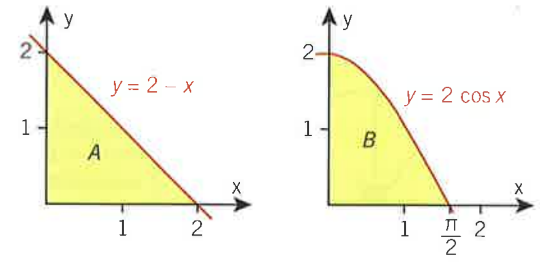
Kan du finna fler polynom som delar p?

50 I den här uppgiften ska du jämföra storleken av areorna av två områden A och B.

Område A begränsas av positiva y-axeln, positiva x-axeln och linjen $y = 2 - kx$.

Område B begränsas av positiva y-axeln, positiva x-axeln och linjen $y = 2 \cos kx$.

Nedan visas areorna som bildas när $k = 1$.



- Beräkna arean av de skuggade områdena A och B när $k = 1$, dvs då $y = 2 - x$ och $y = 2 \cos x$
- Skriv av nedanstående tabell och beräkna de värden som saknas.

k	Arean av A	Arean av B
1		
2		

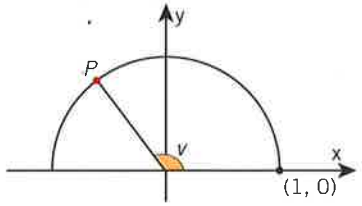
- Jämför areorna av områdena A och B för samma värde på k. Formulera en slutsats för din jämförelse.
- Visa att din slutsats gäller för alla $k > 0$. *(NP)*

REPETITIONSUPPGIFTER

KAPITEL 1 – TRIGONOMETRI OCH FORMLER

Repetitionsuppgifterna är identiska med bokens lösta exempel. För svar och lösning se kapitlets exempel.

1101 *(sidan 9)*



Punkten P har koordinaterna (-0,57; 0,82). Bestäm

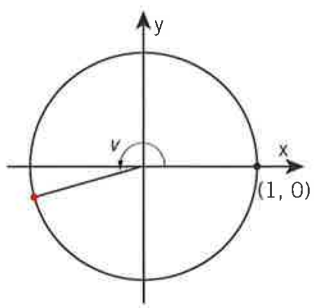
a) $\sin v$ c) $\tan v$
b) $\cos v$ d) v

1102
En triangel har två sidor som är 5 cm och 10 cm med mellanliggande vinkel v. Triangelns area är 20 cm². Beräkna vinkeln v.

1201
Anta att du vet att $\sin 20° \approx 0,34$, $\cos 20° \approx 0,94$ och $\tan 20° \approx 0,36$.
Bestäm utan räknare värdet av

a) $\cos 740°$ c) $\sin(-380°)$
b) $\tan(-160°)$

1211
Figuren visar en vinkel i tredje kvadranten. Bestäm värdet av $\sin v$ om
$\cos v = -\frac{24}{25}$



1212
Visa att $\frac{1}{\cos^2 v} = 1 + \tan^2 v$

1213
Visa att
$1 - (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

1226
Visa att $\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

1237
Visa sambandet
$\cos(x + 270°) = \sin x$
med additionsformeln för cosinus.

1238
Förenkla $\sin(x + 45°) - \sin(x - 45°)$
Svara exakt.

1254
Bestäm det exakta värdet av
$\sin 2v$ om $\cos v = -\frac{3}{5}$
och v ligger i andra kvadranten.

1301
Ska det vara en implikationspil (⇒) eller en ekvivalenspil (⇔) i rutan mellan påståendena? Motivera ditt svar.

a) $x = 4$ $\boxed{}$ $x^2 = 16$
b) $2x + 3 = 9$ $\boxed{}$ $x = 3$

1302
Sats: Ett jämnt tal och ett udda tal har en produkt som är ett jämnt tal.
a) Undersök satsen med några exempel.
b) Bevisa satsen med ett direkt bevis.
c) Gäller satsens omvändning?

1314
Bevisa med hjälp av ett indirekt bevis satsen:
"Om n^2 är ett jämnt tal, så är n ett jämnt tal."

1315
a, b och c är tre reella tal så att $abc = -10$.
Visa med ett motsägelsebevis att minst ett av talen a, b eller c måste vara negativt.

1401
Ange med en decimal samtliga lösningar till följande ekvationer

a) $\sin x = 0,293$ b) $\sin x = -0,331$

1402
Ange med en decimal samtliga lösningar till följande ekvationer

a) $\cos x = 0,369$ b) $\cos x = -0,369$

1403
Undersök om ekvationen $\sin x = 0,42$ har några lösningar i intervallet $720° < x < 900°$.
Arbeta med hela grader.

1404
Lös ekvationerna och svara med en decimal.

a) $\sin\frac{x}{2} = -0,520$
b) $\cos(3x - 41,2°) = 0,316$

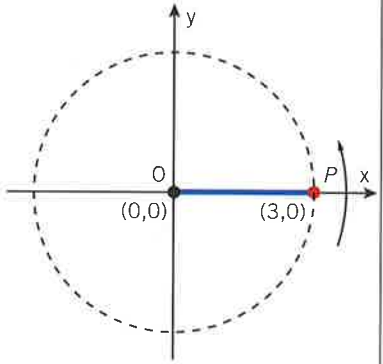
1421
Lös ekvationerna med nollproduktmetoden, dvs genom faktorisering.

a) $4x^2 - x = 0$ b) $5\cos^2 x - \cos x = 0$

1422
Lös ekvationen $2\sin 2x = \sin x$.

1423
Lös ekvationen $\cos^2 x = 3\sin x - 3$.

1501
En vinkels storlek kan bero av tiden, t ex vid rotation. Radien OP med längden 3 l.e. vrider sig moturs med hastigheten 20° per sekund, se figur.



a) Ställ upp en formel för hur y-koordinaten för punkten P varierar med tiden t sekunder.
b) Hur lång tid under ett varv är y-koordinaten för punkten $P \geq 2$?

KAPITEL 2 – TRIGONOMETRI OCH GRAFER

Repetitionsuppgifterna är identiska med bokens lösta exempel. För svar och lösning se kapitlets exempel.

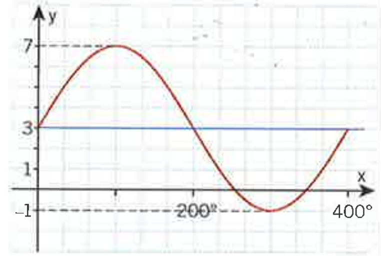
2101 *(sidan 54)*
Funktionen $y = 1,5\sin 2x$ är given.

a) Ange amplitud, största värde och minsta värde.
b) Bestäm perioden.
c) Skissa kurvan för hand och kontrollera med räknare.

2116
Visa grafiskt att ekvationen $\sin 2x = 0,5$ har fyra lösningar i intervallet $0° \leq x \leq 360°$.

2125
a) Beskriv hur grafen till $y = \sin(x + 45°) - 2$ är förskjuten i förhållande till $y = \sin x$.
b) Bestäm största och minsta värde för funktionen $y = 4 + 3\sin x$

2141
Figuren visar grafen till en sinusfunktion. Bestäm en ekvation av typen $y = A\sin kx + d$ för denna kurva.



2142
Rita en skiss av kurvan
$y = 5\sin 2(x + 45°) - 4$.

2153
a) Vilken period har $y = \tan 2x$?
b) Hur många lösningar har ekvationen $\tan 2x = 0,9$ i intervallet $0° \leq v \leq 360°$?

2154
Bestäm med en decimal samtliga lösningar till ekvationen

a) $\tan 2x = 0,9$
b) $\sin x = -3,1\cos x$

2176
Skriv om funktionen
$y = 7\sin x - 24\cos x$ på formen
$y = c\sin(x - v)$ och ange funktionens största värde.

2201
Omvandla

a) 98,1° till radianer
b) 6,07 radianer till grader.

2202
Bestäm exakt $\sin\frac{\pi}{3}$

2203
Lös följande trigonometriska ekvationer. Svara i radianer med två decimaler.

a) $\sin x = 0,93$ c) $\tan x = 1,9$
b) $\cos 2x = -0,54$ d) $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,98$

2222
En cirkelsektor med radien 2,5 m har medelpunktsvinkeln 0,75 radianer.

a) Bestäm cirkelbågens längd.
b) Bestäm cirkelsektorns area.

2301
Bestäm $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ då $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$

2302
För vilka x-värden har grafen till $f(x) = \sin x$ en tangent med lutningen 0,5? Svara exakt.

2321
Derivera

a) $y = \sin 5x$
b) $y = 3\cos(2\pi x + 3)$
c) $y = (1 + \sin x)^3$
d) $y = \sin^5 2x$

2401
En modell för hur vattentemperaturen y °C på den grekiska ön Naxos varierar under året beskrivs med funktionen
$y = 5\sin(0,0172t - 2,22) + 19$
där t är tiden i dygn räknat från årsskiftet.

a) Bestäm funktionens period och amplitud.
b) Vilken är den lägsta och den högsta vattentemperaturen under året?
c) När kan man tidigast åka till Naxos om man vill att vattentemperaturen ska vara minst 20 °C ?
d) Beräkna $y'(121)$ genom att algebraiskt derivera y.
Kontrollera med räknarens deriveringsfunktion.
e) Tolka värdet av $y'(121)$.

KAPITEL 3 – DERIVATOR OCH INTEGRALER

Repetitionsuppgifterna är identiska med bokens lösta exempel. För svar och lösning se kapitlets exempel.

3101 (*sidan 101*)
Bestäm $y'' + y' + y$ om
$y = e^{2x} + \sin 3x$

3102
Uppskatta $f(3,2)$ med hjälp av approximationen $f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$ om vi vet att $f(3) = 4$ och $f'(3) = -0,5$.

3118
Derivera $y = e^{2x} \cdot \sin x$

3135
Derivera

a) $y = \dfrac{3x}{x^2 + 4}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x}$

3146
Derivera

a) $y = \ln 5x$ b) $y = \dfrac{\ln x^2}{x}$

3147
En linje med lutningen k går genom origo och är tangent till kurvan

$y = \ln x$.

Rita kurvan och tangenten och ange värdet på k.

3148
En influensaepidemi sprider sig i ett samhälle med 2 000 personer. Antalet personer N som insjuknat i influensan t dygn efter det att första personen blivit sjuk följer funktionen

$N(t) = \dfrac{2000}{1 + 1999 \cdot e^{-0,5t}}$

Beräkna och tolka $N'(12)$.

3167
En rektangel har basen $b = 4$ cm och höjden $= 3$ cm. Rektangelns höjd ökar med 0,5 cm/min,

dvs $\dfrac{dh}{dt} = 0,5$ cm/min

a) Ställ upp en formel för hur rektangelns area A beror av tiden t.

b) Bestäm och tolka $\dfrac{dA}{dt}$

c) Bestäm $\dfrac{dA}{dh}$ om $A = b \cdot h$

d) Visa att $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dA}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt}$

3168
En isskulptur har formen av ett klot. Den smälter så att radien minskar med hastigheten 2 mm/h. Med vilken hastighet förändras volymen när radien är 5 dm?

3201
Skissa med hjälp av derivata grafen till $y = x^3/3 - x^2 - 8x$ i intervallet $0 \le x \le 10$ och bestäm funktionens största och minsta värde i intervallet. Kontrollera med grafräknare.

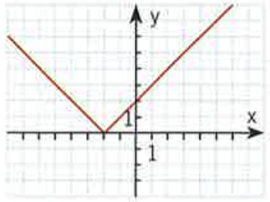
3202
Bestäm med derivata koordinaterna för de lokala extrempunkterna till kurvan $y = (x^2 - 3)e^x$. Rita en enkel skiss av kurvan som kontroll.

3216
$f(x) = |2x - 1|$. Beräkna x om $f(x) = 2$

3217
Rita grafen till

a) $y = |2x|$ b) $y = |2x - 6|$

3218
Figuren visar grafen till en funktion f.

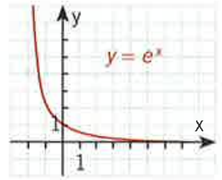


a) Bestäm funktionen.

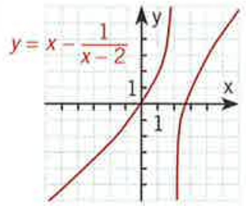
b) Är funktionen kontinuerlig och deriverbar för alla x-värden? Motivera.

3232
Ange grafens asymptoter.
Motivera ditt svar.

a)



b)



3233
a) Skissa grafen till $y = \dfrac{x^2 + 16}{4x}$ med hjälp av derivata.

b) Ange eventuella asymptoter till kurvan.

3301
Differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = -0,2y$ är given.

a) Visa att $y = Ce^{-0,2x}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Bestäm C så att villkoret $y(1) = 50$ är uppfyllt.

3312
En biolog har studerat en stor fågelkoloni under tio år. Biologen finner att under hela studien har antalet fåglar minskat med en hastighet som motsvarat 4% av det totala antalet fåglar.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver förändringen.

3313
En stek som har temperaturen 20 °C sätts in i en ugn som håller 175 °C. Enligt en matematisk modell stiger då stekens temperatur y °C med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferensen $(175 - y)$.

Det ger differentialekvationen

$\dfrac{dy}{dt} = k(175 - y)$

där t är tiden i minuter sedan steken sattes i ugnen.

a) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ är en lösning till $y(0) = 20$.

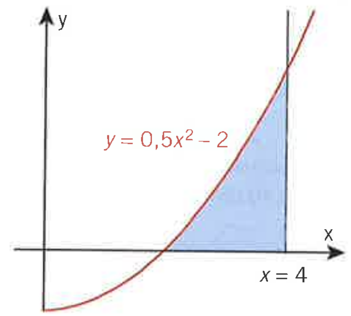
b) Visa att $y = 175 - 155 \cdot e^{-kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

c) Efter 30 minuter är stekens temperatur 45 °C.

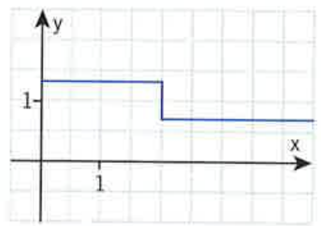
Vilken är temperaturen efter 70 minuter?

3401
Bestäm den primitiva funktionen F till $f(x) = x^2 + \sin 2x$ för vilken $F(0) = 1$.

3402
Beräkna det färgade områdets area.



3416
Uppskatta $\int_0^4 f(x)dx$ om $f(x)$ ges av grafen



3417
Beräkna ett närmevärde med två decimaler till $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ med

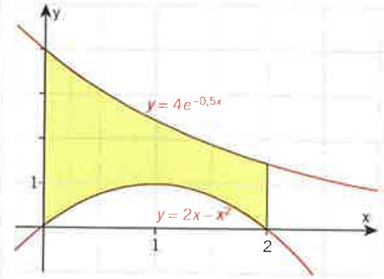
a) en mittpunktsrektangel

b) ett parallelltrapets.

c) Jämför svaren i a) och b) med hjälp av räknarens integralverktyg.

3429
Det färgade området i figuren begränsas av kurvorna

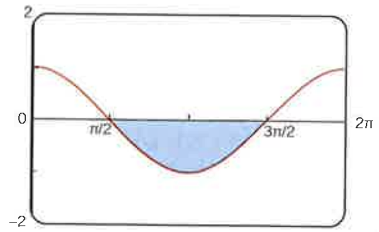
$y = 4e^{-0,5x}$ och $y = 2x - x^2$ samt y-axeln och linjen $x = 2$.



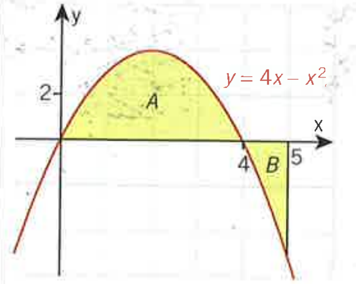
a) Beräkna områdets area.

b) Kontrollera värdet på integralen med hjälp av räknarens integralfunktion.

3430
Figuren visar kurvan $y = \cos x$. Beräkna arean A av det färgade området.



3447



a) Beräkna areorna A och B.

b) Beräkna integralen $\int_0^5 (4x - x^2)\,dx$

c) Tolka integralen i b) geometriskt.

3462
Hastigheten för en bil som accelererar kan under ett tidsintervall ges av formeln $v(t) = 10 + 2,4t^2$ $0 \le t \le 4$ där v är hastigheten i m/s efter t sekunder.

Hur långt hinner bilen under den tredje sekunden, $t = 2,0$ till $t = 3,0$?

3463
Vid ett försök uppskattas antalet bakterier öka med hastigheten y bakterier/min enligt formeln

$y = 1000\,e^{0,2x}$ $0 \le x \le 20$

där x är antalet minuter efter försökets början.
Hur många minuter tar det för antalet bakterier att öka med 100 000 st?

3478
I en stor stad är längden hos män normalfördelade med medelvärdet 178 cm och standardavvikelsen 6 cm. Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald man är

a) mellan 175 cm och 185 cm

b) längre än 195 cm.

3479
Beräkna sannolikheten för att ett slumpvis valt värde i ett normalfördelat material ligger i intevallet $\mu \pm 0,5\sigma$.

3480
En äldre typ av glödlampor har en livslängd x timmar som kan beskrivas av en exponentialfördelning med täthetsfunktionen

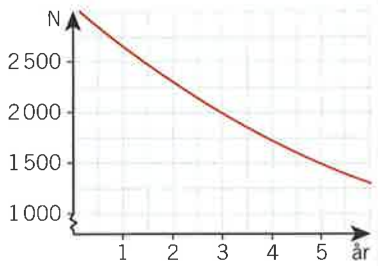
$f(x) = 0{,}0050 \cdot e^{-0{,}0050x}, x > 0.$

Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald glödlampa har en livslängd

a) mellan 100 och 200 timmar

b) på minst 200 timmar

3501
Antalet fåglar N i en koloni ändras efter x år enligt grafen



Vilket värde ger detta för $\int_2^5 N'(x)\,dx$? Tolka ditt svar.

3521
Ozzy påstår att arean under kurvan

$y = 1/x^2$

är begränsad för intervallet $x \geq 1$. Har han rätt? Motivera.

3601
Beräkna det exakta värdet av rotationskroppens volym för det område som begränsas av kurvan $y = 4 - x^2$ och koordinataxlarna när det roterar runt

a) x-axeln b) y-axeln

KAPITEL 4 – KOMPLEXA TAL

Repetitionsuppgifterna är identiska med bokens lösta exempel. För svar och lösning se kapitlets exempel.

4101 *(sidan 186)*
Bestäm realdelen och imaginärdelen för det komplexa talet

a) $-2 + i$ c) $-i$

b) $5 - 4i$ d) 3

4102
Lös ekvationen

a) $z^2 + 10 = 6$ b) $z^2 - 6z + 25 = 0$

4114
Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ till

a) $z = 4 + 3i$ c) $z = -2i$

b) $z = 1 - i$ d) $z = 5$

4115
Låt $z = 5 - 3i$ och $u = -2 + 4i$ och beräkna, dvs skriv på formen $a + bi$

a) $z + u$ c) $z \cdot u$

b) $z - u$ d) $\frac{z}{u}$

4132
Bevisa att likheten gäller.

a) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

4201
a) Rita $u = 2 + i$ och $z = 1 + 3i$ som vektorer i det komplexa talplanet. Rita också in $u + z$ och beräkna $|u + z|$.

b) Rita $u = 2 + i$ och $w = 3 + 4i$ som vektorer i det komplexa talplanet. Rita också in $w - u$ och beräkna $|w - u|$.

4217
Skriv det komplexa talet på polär form, där $0 \leq \arg z < 2\pi$.

a) $z = 2 + 3i$ c) $z = 2 - 2i$

b) $z = -2$

4218
Skriv talet $z = -2 + 4i$ i polär form. Ange argumentet i grader med en decimal, $0° \leq \arg z < 360°$.

4219
a) Skriv det komplexa talet z på formen $a + bi$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

b) Bestäm $\arg \bar{z}$ om

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

4236
Låt $z = 2(\cos 70° + i\sin 70°)$ och $u = 1{,}5(\cos 145° + i\sin 145°)$.

a) Beräkna $z \cdot u$ och tolka resultatet grafiskt.

b) Beräkna $z \cdot \bar{z}$

4237
Beräkna kvoten $\frac{z_1}{z_2}$ respektive $\frac{z_2}{z_1}$ då

a) $z_1 = 4(\cos 80° + i\sin 80°)$, $z_2 = 4(\cos 35° + i\sin 35°)$ $(0 \leq \arg z \leq 360°)$

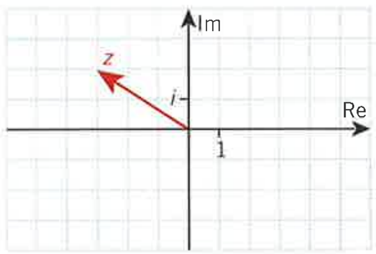
b) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$(-\pi \leq \arg z \leq \pi)$

4238
Skriv $z = (\sqrt{3} + i)(2 + 2i)$ på polär form, utan att först skriva z på formen $a + bi$

4254
Figuren visar det komplexa talet z.



a) Bestäm $w_1 = iz$

b) Bestäm $w_2 = iz + 5 + 4i$

c) Markera z, w_1 och w_2 i ett talplan.

4301
Förenkla $(1 + i\sqrt{3})^{15}$ med de Moivres formel.

4302
Skriv det komplexa talet

$$z = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^8$$

på formen $a + bi$. Svara exakt.

4303
Utveckla $(\cos y + i\sin y)^2$ dels med de Moivres formel, dels med kvadreringsregeln. Vilken formel ger detta för

a) $\cos 2y$ b) $\sin 2y$?

4318
a) Lös ekvationen $z^3 = 8i$. Svara på formen $a + bi$.

b) Rita in rötterna i ett komplext talplan.

4332
Skriv på formen $a + bi$

a) $e^{\frac{3\pi}{4}i}$ b) e^{2-3i}

4333
Finn något värde på z sådant att $e^z = -2$.

4401
Lös ekvationen

a) $x^2 - 8x + 17 = 0$

b) $x^2 + 4ix + 5 = 0$

4402
Skriv en andragradsekvation med reella koefficienter som har en rot $3 + i$.

4416
Utför divisionen $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 9}{x - 2}$

Ange kvoten och en eventuell rest.

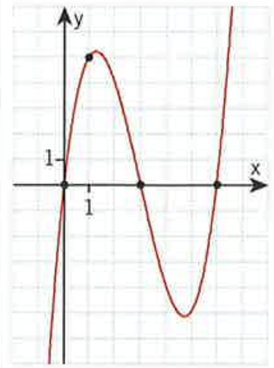
4427
Visa att polynomet

a) $f(x) = x^3 + 3x - 14$ har en faktor $x - 2$

b) $g(x) = x^5 + 32$ har en faktor $x + 2$

c) $h(x) = x^3 - 20x + 35$ ger resten 10 vid division med $x + 5$.

4428
Vilket tredjegradspolynom $g(x)$ beskriver kurvan?



4441
Vi har polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Ekvationen $f(x) = 0$ har en rot $x = 2$. Lös ekvationen $f(x) = 0$ fullständigt och kontrollera ditt svar grafiskt.

4442
Vi har polynomet
$p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2$

a) Visa att $z = i$ är ett nollställe till $p(z)$.

b) Bestäm samtliga nollställen till $p(z)$.

c) Skär grafen till $y = p(z)$ x-axeln? Motivera ditt svar.

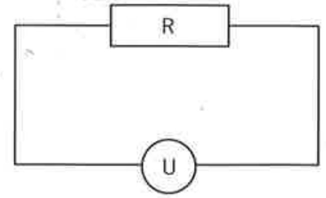
d) Skissa grafen $y = p(z)$.

4443
Lös ekvationen $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$.

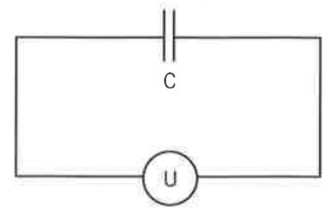
4501
Spänningen $U = 20\cos(100\pi t)$

Vad är strömmen

a) genom ett motstånd med resistansen $R = 5\,\Omega$?



b) över en kondensator med kapacitansen $C = 0{,}001$ F?



c) över en spole med induktansen $L = 0{,}002$ H?