

Innehåll

1 Talteori	6
1.1 Kongruensräkning	8
Diskret matematik	8
Delbarhetsregler och division med rest	12
Kongruens	16
Beräkningar med kongruenser	19
1.2 Talföljder och induktionsbevis	22
Talföljder och summor	22
Aritmetiska talföljder och summor	25
Geometriskt talföljder och summor	28
Induktionsbevis	32
Att visa olikheter och delbarhet med induktion	36
α-uppgift: Kryptiska meddelanden	39
Historia: Mer om kryptering	40
Problem och undersökningar	42
Tankekarta	43
Blandade uppgifter	44
Kapiteltest	47
2 Mängder, kombinatorik och grafer	48
2.1 Mängdlära	50
Vad är en mängd?	50
Mängdoperationer	53
Venn-diagram	56
2.2 Kombinatorik	60
Multiplikationsprincipen	60
Dirichlets lådprincip	62
Permutationer	64
Kombinationer	67
Kombinatoriska problem	70
Binomialsatsen	75
2.3 Grafteori	78
Vad är en graf?	78
Eulervägar och Eulerkretsar	81
Hamiltonstigar och Hamiltoncykler	85
Eulers polyederformel	89
Historia: Grafteori och de platonska kropparna	92
Problem och undersökningar	94
α-uppgift: På resande fot	96
Tankekarta	97
Blandade uppgifter	98
Kapiteltest	102

3 Differentialekvationer	104
3.1 Vad är en differentialekvation?	106
Lösningen till en differentialekvation	106
Den primitiva funktionen som lösning till en differentialekvation	110
Eulers stegmetod	113
3.2 Differentialekvationer och tillämpningar	117
Homogena differentialekvationer av första ordningen	117
Inhomogena differentialekvationer av första ordningen	123
Modellering med hjälp av differentialekvationer	128
α-uppgift: Jordens befolkning	134
Historia: Väder och väderprognoser	135
Problem och undersökningar	136
Tankekarta	137
Blandade uppgifter	138
Kapiteltest	142
4 Omfångsrika problem	144
4.1 Problemlösning och redovisning	146
Att lösa problem	146
4.2 Redovisningsuppgifter	148
Historia: Matematikens historia	170
Facit	172
Register	196

1 Talteori

DELKAPITEL

1.1 Kongruensräkning

1.2 Talföljder och induktionsbevis

FÖRKUNSKAPER

- Faktorisering av tal
- Algebraiska förenklingar
- Formler
- Direkta och indirekta bevis

CENTRALT INNEHÅLL

- Begreppet kongruens hos hela tal och kongruensräkning.
- Begreppen rekursion och talföljd.
- Induktionsbevis med konkreta exempel från till exempel talteoriområdet.

Det här kapitlet inleder vi med att ta upp primtal, faktorisering och kongruensräkning. Lite förenklat kan man säga att kongruensräkning beskriver beräkningar som regelbundet återvänder till samma resultat. Vår vanliga analoga klocka är ett sådant exempel, där samma tid visas var 12:e timme. Man kan kanske tro att det här är matematik med liten praktisk nytta, men på senare tid har just kongruensräkning visat sig betydelsefull för att utveckla säkra krypteringar, något som blir allt viktigare när ekonomiska transaktioner i dag nästan uteslutande överförs elektroniskt.

I det här kapitlet kommer vi också att bekanta oss med en ny typ av bevisföring, som kallas induktionsbevis. Det är en vanlig metod för att visa att en viss egenskap eller formel gäller för alla naturliga tal.

När du är klar med kapitlet ska du kunna

- primtalsfaktorisera sammansatta tal
- utföra division med rest
- förklara begreppet kongruens och genomföra beräkningar med kongruenser
- beskriva talföljder med rekursiva och slutna formler
- beräkna aritmetiska och geometriska summor
- förstå principen bakom induktionsbevis
- genomföra induktionsbevis

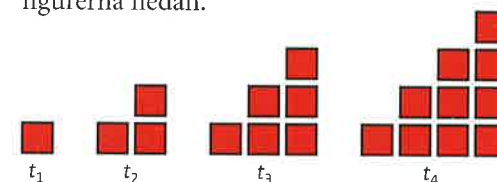
Sophie Germain och primtal

Sophie Germain var en fransk, självlärd matematiker, som efter revolutionsåren i slutet av 1700-talet stod för avgörande bidrag till forskningen om primtal. Vi kallar primtalet p ett *Sophie Germain-primtal*, om även talet $2p + 1$ är ett primtal.

- Är talet 2 ett Sophie Germain-primtal?
- Vilket är det första primtalet, som inte är ett Sophie Germain-primtal?
- Det finns inga Sophie Germain-primtal som slutar på siffran 7. Varför?

Triangeltal

De så kallade triangeltalen kan illustreras av figurerna nedan.



De fyra första triangeltalen är alltså $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$ och $t_4 = 10$.

- Rita figurer som illustrerar t_5 och t_6 samt ange värdet av dem.
- Vilka är triangeltalen t_8 och t_{10} ?
- Ange en formel för det n :te triangeltalet.

1.1 Kongruensräkning

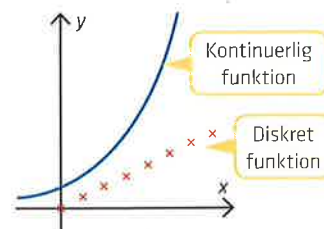
Ordboken

Diskret kommer av latinets *discretus* som betyder åtskild eller förmåga att urskilja.

Diskret matematik

Vad är *diskret matematik*? Ordet diskret betyder ju i vardagssammanhang oftast att någon är finkänslig eller taktfull. Men diskret kan också betyda åtskild eller förmåga att urskilja och det är just betydelsen åtskild som vi avser i fallet diskret matematik. Men hur ska det tolkas?

Ett sätt kan vara att tänka på vad som inte är diskret matematik. Till exempel är derivator och integraler sådant som inte är diskret matematik. Man arbetar där med funktioner som är definierade för alla värden i ett intervall. Sådana funktioner kallar vi för *kontinuerliga*. Jämför kontinuerliga funktioner med diskreta funktioner, som vi introducerade i kurs 3. Diskreta funktioner är endast definierade för isolerade tal i ett intervall.



Inom den diskreta matematiken är det vanligt att man bara arbetar med heltal. Vi inleder med några grundläggande begrepp som *delare*, *faktor* och *primtalsfaktorisering*.

Delare och faktor

Vi säger att 15 är delbart med 5, eftersom $\frac{15}{5} = 3$ och 3 är ett heltal. När ett tal sägs vara delbart med ett annat tal, så är det alltid två heltal som avses. Det är alltså inte meningsfullt att tala om delbarhet för andra tal än heltal, även om t.ex. kvoten $\frac{6,3}{0,9} = 7$ också är ett heltal. Men det är inte nödvändigt att de två heltalen är positiva tal, till exempel är -15 också delbart med 5. I fortsättningen kommer vi i stort sett uteslutande att avse endast positiva tal när vi arbetar med delare.

Delbarhet

Ett heltal a sägs vara delbart med ett heltal $b \neq 0$, om kvoten $\frac{a}{b}$ är ett heltal.

Man säger också att 15 är en multipel av 5, eftersom $15 = 3 \cdot 5$.

När ett tal är delbart med ett annat tal, brukar man också tala om begreppen *delare* och *faktor*. Att 15 är delbart med 5 kan även uttryckas som att 5 är delare till 15 eller att 5 delar 15. Att 5 delar 15 brukar skrivas $5|15$. Men om 5 är en delare till 15, så betyder det också att 5 är en faktor i 15, eftersom $15 = 3 \cdot 5$.

Primtal och primtalsfaktorisering

Delare och faktor

Ett heltal $b \neq 0$ är *delare* till ett heltal a , om även kvoten $\frac{a}{b}$ är ett heltal. Vi säger att b delar a och det skrivs $b|a$.

Ett heltal $b \neq 0$ är en *faktor* i ett heltal a , om b är delare i a .

I kurs 1c använde vi begreppet faktor bland annat när vi talade om *primtalsfaktorisering* av heltal. Att primtalsfaktorisera ett tal, innebär att vi skriver talet som en produkt av primtal.

Primtal

Ett heltal $p > 1$ är ett *primtal* om talets enda positiva delare är 1 och p .

De tio första primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 och 29. Ett positivt heltal (större än 1) som inte är ett primtal kallas för ett *sammansatt tal*. Ett sammansatt tal kan man alltid primtalsfaktorisera.

Till exempel gäller för det sammansatta talet 18 att det har primtalsfaktoriseringen $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ eller, som man ofta skriver, $18 = 2 \cdot 3^2$. Observera att $18 = 3 \cdot 6$ inte är en primtalsfaktorisering av talet 18, eftersom 6 inte är ett primtal. Det finns bara ett enda unikt sätt att primtalsfaktorisera ett tal. Det innebär att 18 inte kan innehålla några andra primtalsfaktorer än just 2, 3 och 3. Detta resonemang kan sammanfattas i aritmetikens fundamentalsats. Satsen kan verka självklar, men är inte helt lätt att bevisa. Beviset av satsen är heller inte en del av denna kurs.

Aritmetikens fundamentalsats

Ett heltal $a > 1$ kan skrivas som en produkt av primtal $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$. Faktoriseringen är entydig med undantag för ordningen mellan faktorerna.

Att faktoriseringen är entydig betyder att den bara kan göras på ett enda sätt. Vi kan förstås skriva $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, men alla tre varianterna räknas som samma faktorisering, eftersom det bara är ordningen mellan faktorerna som skiljer dem åt.

Exempel:

Vilka tal är delare i 12?

Talen 1 och 12 kallas triviala delare till talet 12.

Lösning:

Alla tal är delbara med 1 och sig självt. Det betyder att 1 och 12 är två delare i 12. Dessutom är 12 delbart med 2, 3, 4 och 6.

Svar: Talet 12 har delarna 1, 2, 3, 4, 6 och 12.

Exempel: Skriv 20 som en produkt av primtal.

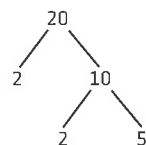
Lösning: I kurs 1c löste vi den här typen av problem genom att dela talet med primtalen i storleksordning och rita ett faktorträd.

De yttersta grenarna ger sedan primtalsfaktorerna:
 $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

Men att faktorisera så pass små tal som 20 med hjälp av faktorträd är inte nödvändigt. Vi kan lika gärna faktorisera talet med hjälp av ett enkelt resonemang:

Vi vet att $20 = 4 \cdot 5$. Här är 5 ett primtal, men inte 4 eftersom $4 = 2 \cdot 2$. Alltså är primtalsfaktoriseringen $2 \cdot 2 \cdot 5$.

Svar: $2 \cdot 2 \cdot 5$



Exempel: Ange samtliga delare till 45.

Lösning: Alla tal är delbara med 1 och sig självt. Alltså är 1 och 45 två delare till 45.

Ett sätt att finna övriga delare är att gå via primtalsfaktorerna i 45 och sedan kombinera dem på alla tänkbara sätt.

Via faktorträd eller på annat sätt kan vi komma fram till att $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Det ger att talen 3 och 5 är delare till 45.

Genom att kombinera primtalsfaktorerna får vi också delarna

$$3 \cdot 3 = 9, \quad 3 \cdot 5 = 15 \quad \text{och}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \quad \text{Som vi redan kände till}$$

Svar: 45 har delarna 1, 3, 5, 9, 15 och 45.

NIVÅ 1

- 1101** Vilket tal är produkten av
- de fyra första primtalen
 - de fem första primtalen

1102 Skriv talen som en produkt av primtal.

- 52
- 54
- 411
- 256

1103 Ange samtliga delare till talen

- 15
- 16
- 13
- 30

1104 Talet 11 är ett primtal.

- Vilken egenskap är det som gör att 11 är ett primtal?
- Bevisa att 11 är ett primtal.

1105 Vilket är det minsta sammansatta talet?

1106 Varför är 2 det enda jämna primtalet?

1107 Emma och Klara har fått i uppgift att primtalsfaktorisera talet 90. Emmas lösning är:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Medan Klaras lösning är

$$90 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$$

Emma påstår att hon har löst uppgiften rätt och att Klara har gjort fel. Klara säger att både Emmas och hennes lösning är korrekt. Vem har rätt? Motivera ditt svar.

1108 I Hefis mattebok finns uppgiften

Primtalsfaktorisera följande tal:

-25 8 75

Hefi vill inte lösa uppgiften eftersom hon menar att det måste stå fel i boken. Har Hefi rätt eller fel? Motivera ditt svar.

NIVÅ 2

1109 Ett tal a har delarna $1, d_1, d_2, \dots, d_n$ och a . Om vi adderar samtliga delare utom talet självt, så får vi summan $1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$. För vissa tal a gäller att $a = 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Sådana tal kallas *perfekta tal*. Det finns ett perfekt tal som är mindre än 10. Vilket är talet?

1110 För ett tal a med delarna $1, d_1, d_2, \dots, d_n$ och a gäller att talet kallas ett *fattigt tal* om $1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n < a$, dvs. om summan av alla delare förutom talet självt är mindre än talet. Om $1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n > a$, så kallas talet ett *rikt tal* och om $1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n = a$, så är talet ett *perfekt tal*. Vilka tal i intervallet $25 \leq a \leq 30$ är

- fattiga tal
- rika tal
- perfekta tal

1111 Ett sätt att definiera delbarhet är att säga att heltalet a är delbart med heltalet $b \neq 0$, om det finns ett heltal k sådant att $a = bk$. Motivera varför den definitionen betyder samma sak som definitionen av delbarhet på sidan 8.

NIVÅ 3

1112 För vilka värden på heltalet n gäller att $n|0$?

1113 Om två på varandra följande udda tal är primtal, så kallas de för primtalstvillingar. Ett exempel på primtalstvillingar är alltså 5 och 7, medan 43 och 47 inte är primtalstvillingar, eftersom det udda talet 45 ligger mellan dem.

- Ange alla primtalstvillingar upp till 30.
- Det finns endast ett fall där tre på varandra följande udda tal är primtal. Vilka är talen?
- Bevisa att dessa tre tal är det enda fallet där tre på varandra följande udda tal också är primtal.

1114 Låt p och q vara två på varandra följande primtal, större än 2. Visa att $p + q$ alltid är en produkt av minst tre primtalsfaktorer. Det är inte nödvändigt att alla tre faktorerna är olika.



Delbarhetsregler och division med rest

Vi ser direkt att 8 712 är delbart med 2, eftersom det är ett jämnt tal. Däremot är det inte lika självklart att 8 712 är delbart med 9. Vi kan förstas undersöka det genom att utföra divisionen $\frac{8\,712}{9}$

Eftersom kvoten

8 712 / 9 = 968

är ett heltal, så gäller att 9 delar 8 712.

Det kan skrivas 9 | 8712.

Men det finns ett annat sätt att kontrollera om ett tal är delbart med 9 och det är att undersöka talets siffersumma. Talet 8 712 har siffersumman 8 + 7 + 1 + 2 = 18. Det finns en regel som säger att om talets siffersumma är delbar med 9, så är också talet självt delbart med 9. Eftersom siffersumman 18 är delbar med 9, så är därför även 8 712 det. Metoder som den här är användbara i matematiken, eftersom det för riktigt stora tal inte på ett enkelt sätt går att kontrollera delbarheten genom division ens om man har en räknare till hjälp. Anledningen till att metoden med siffersumman fungerar för att undersöka delbarheten kommer du själv att få bevisa i kommande avsnitt.

Delbarhetsregler

Sedan tidigare känner du förmodligen till ett antal regler för att undersöka delbarhet med olika tal. Vi repeterar några av dem här:

Ett tal är delbart med ...	om ...
2	talet är jämnt
3	talets siffersumma är delbar med 3
4	talet som bildas av de två sista siffrorna är delbart med 4
5	talet slutar på 0 eller 5
6	talet är jämnt och dess siffersumma är delbar med 3
8	talet som bildas av de tre sista siffrorna är delbart med 8
9	talets siffersumma är delbar med 9
10	talet slutar på 0

Som du ser finns inte 7 med i uppräknigen. Det beror på att det inte finns något lika enkelt sätt att kontrollera om ett tal är delbart med 7.

Division med rest

6 25 / 4 = 6 kvot, 1 rest

Observera att begreppet kvot i det här sammanhanget inte är riktigt detsamma som det du förmodligen är van vid.

Om a och b är positiva heltal, så gäller för den principala resten att 0 ≤ r < b

Om vi dividerar 25 med 4, så blir resultatet inte ett heltal. Resultatet kan uttryckas på flera olika sätt. Man kan till exempel ange det i blandad form som 6 $\frac{1}{4}$ eller i decimalform som 6,25.

Vi kan också uttrycka resultatet av divisionen $\frac{25}{4}$ med hjälp av kvot och rest. Med kvot avser vi då det hela antal gånger som 4 går i 25. I det här fallet är alltså kvoten 6.

Eftersom 25 = 6 · 4 + 1, ger divisionen $\frac{25}{4}$ resten 1. Vi skriver då $\frac{25}{4} = 6$ rest 1.

Vi behöver inte nödvändigtvis välja kvoten som det maximala antalet gånger som 4 går i 25, utan vi kan ange resultatet som t.ex.

25 / 4 = 4 rest 9 eller 25 / 4 = 7 rest -3

Resten 1 kallas i det här fallet för den principala resten, alltså resten som vi får när vi låter kvoten vara det maximala antalet gånger som 4 går i 25. I fortsättningen kommer vi alltid att mena den principala resten, när vi skriver rest.

Kvot och rest

Om a och b är två heltal och b ≠ 0, så kan kvoten $\frac{a}{b}$ skrivas $\frac{a}{b} = k$ rest r, där både k och r är heltal. Talet k kallas kvot och talet r kallas rest.

Exempel:

Beräkna kvoten och resten vid följande divisioner

- a) 31 / 4 b) 196 / 9 c) 2 / 6

Lösning: a) Eftersom 7 · 4 = 28, så får vi 31 / 4 = 7 rest 3.

b) Ett sätt att bestämma kvoten är att dividera 196 med 9 med hjälp av t.ex. liggande stolen.

21 196 / 9 = 21 kvot, 7 rest

Vi får alltså kvoten 21 och resten 7.

c) Divisionen $\frac{2}{6} = 0 \cdot 6 + 2$ ger kvoten 0 och resten 2.



Exempel: Primtalsfaktorisera talen

- a) 56 b) 1 485

Lösning: a) Vi vet att $56 = 8 \cdot 7$. Eftersom $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ och 2 respektive 7 är primtal, så är primtalsfaktoriseringen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Svar: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ Det kan även skrivas $56 = 2^3 \cdot 7$

- b) Om vi använder metoden med faktorträd, så får vi faktorträdet som du ser här intill. Talet 1 485 har alltså primtalsfaktoriseringen $1\,485 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

Man kan lika gärna resonera sig fram med hjälp av delbarhetsreglerna.

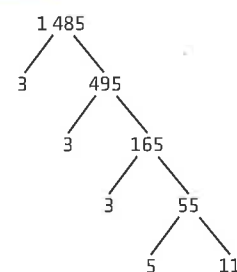
Talet 1 485 är delbart med 5, eftersom det slutar på 5. Vi beräknar $\frac{1\,485}{5} = 297$. Alltså är $1\,485 = 5 \cdot 297$.

297 är delbart med 9, eftersom talets siffersumma är delbar med 9.

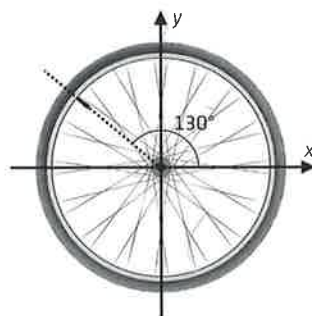
Vi beräknar $\frac{297}{9} = 33$. Alltså är $1\,485 = 5 \cdot 9 \cdot 33$.

Vi vet att $9 = 3 \cdot 3$ och $33 = 3 \cdot 11$. Vi får till slut $1\,485 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$.

Svar: $1\,485 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11$



Exempel: Ventilens läge i ett snurrande cykelhjul bestäms av medelpunktsvinkeln ν . Vid ett visst ögonblick var $\nu = 130^\circ$.



Bestäm vinkeln ν efter att hjulet snurrat ytterligare $1\,000^\circ$.

Lösning: Vi utför additionen $130^\circ + 1\,000^\circ$ och undersöker vilken resten är vid division med 360° .

$$\frac{130 + 1\,000}{360} = \frac{1\,130}{360} = 3 \text{ rest } 50$$

Det innebär att medelpunktsvinkeln ν är 50° efter att hjulet snurrat $1\,000^\circ$.

Svar: $\nu = 50^\circ$

NIVÅ 1

1115 Vilka primtal är följande tal delbara med?

- a) 36 b) 42
c) 100 d) 1 000

1116 Primtalsfaktorisera talen.

- a) 500 b) 123
c) 849 d) 2 310

1117 Vad blir kvoten och resten när följande tal delas med 4?

- a) 6 b) 19
c) 3 d) 40

1118 Vad visar klockan till höger om

- a) 100 timmar
b) 850 minuter



1119 Vilka rester är möjliga vid division med 6?

1120 Ange ett femsiffrigt tal som är delbart med 9 ö och där siffran 0 inte ingår i talet.

1121 Ge exempel på två tal som ger resten 3 vid division med 11. ö

1122 Nina och Peter ska utföra divisionen $\frac{35}{6}$ genom att ange kvot och rest. Nina skriver

$$\frac{35}{6} = 5 \text{ rest } 5$$

och Peter skriver

$$\frac{35}{6} = 6 \text{ rest } -1$$

Hur kan Nina respektive Peter ha resonerat? Motivera ditt svar.

1123 Bestäm alla primtal i intervallet mellan 110 och 120.

NIVÅ 2

1124 Ange ett sju­siffrigt tal som är delbart med 6 ö och där siffran 0 inte ingår i talet.

1125 Konstruera en uppgift som handlar om att ö utföra en division genom att ange kvoten och resten. I resultatet ska resten vara dubbelt så stor som kvoten.

1126 August, Hugo, Maja och Bernt ska undersöka om 887 är ett primtal.

– Då behöver vi kontrollera om 887 är delbart med något tal som är mindre än 887, säger August.

– Det räcker med att undersöka om 887 är delbart med något primtal som är mindre än 887, säger Hugo.

– Nej, vi behöver bara undersöka om det är delbart med något primtal upp till hälften av 887, alltså ett primtal som inte är större än 443, säger Maja.

– Inte ens det, säger Bernt. Det räcker med att undersöka om 887 är delbart med något primtal mindre än 31, alltså upp till och med 29.

Hur kan August, Hugo, Maja och Bernt ha resonerat? Vem har rätt?

NIVÅ 3

1127 Ett godtyckligt tvåsiffrigt tal kan skrivas AB där A är tiotalssiffran och B är entalssiffran. Visa att om siffersumman $A + B$ är delbar med 9, så gäller också att AB är delbart med 9.

1128 Visa för ett godtyckligt tal, att om talet som bildats av de två sista siffrorna är delbart med 4, så är också hela talet delbart med 4.

1129 Visa att om $a|b$, så gäller att $a^2|b^2$.



Kongruens

Det finns många förlopp där ett visst värde återkommer regelbundet. Ett enkelt exempel är klockan, där samma tid visas var 12:e eller var 24:e timme, beroende på vilken typ av klocka som avses. Om klockan är 10, så kommer en vanlig klocka med visare att efter 5 timmar visa att klockan är 3.

På ett sätt innebär detta att "additionen" $10 + 5$ ger resultatet 3. Det kan vi förklara som att om vi dividerar summan 15 med 12, så får vi resten 3.

Ett liknande exempel är frågan: "Vilken veckodag är det om 79 dagar, om det är en tisdag i dag?" Problemet kan förstås lösas genom att man på ett lämpligt sätt stegar fram i almanackan en dag eller en vecka i taget fram till den 79:e dagen. Vi kan också beräkna det genom att först utföra divisionen

$$\frac{79}{7} = 11 \text{ rest } 2$$

Eftersom det var tisdag i dag, så är det om 79 dagar tisdag plus två dagar, det vill säga torsdag.

I de båda exemplen här ovanför har vi undersökt vilken rest ett heltal har vid division med ett annat heltal. Denna typ av beräkningar kallas ibland *resttermsräkning* eller, av anledningar som strax ska bli tydliga, *kongruensräkning*.

Kongruens

Två olika tal kan förstås ha samma rest vid division med ett visst tal. Det gäller t.ex. när 7 eller 13 delas med 3. Vi har ju

$$\frac{7}{3} = 2 \text{ rest } 1$$

respektive

$$\frac{13}{3} = 4 \text{ rest } 1$$

Två tal som har samma rest vid division med 3 säger man är *kongruenta modulo 3*. Det gäller alltså att 7 är kongruent med 13 modulo 3. Vi skriver det som $7 \equiv 13 \pmod{3}$.

Kongruens

Om två heltal a och b har samma rest vid division med ett heltal n ($n > 1$), så säger vi att a och b är kongruenta modulo n .

Vi skriver det som $a \equiv b \pmod{n}$.

Både talen 22 och 14 har resten 2 vid division med 4. Det betyder alltså att 22 är kongruent med 14 modulo 4.

$$22 \equiv 14 \pmod{4} \quad \frac{22}{4} = 5 \text{ rest } 2 \quad \text{och} \quad \frac{14}{4} = 3 \text{ rest } 2$$

Detta betyder också att skillnaden mellan 22 och 14 är en multipel av 4 och att differensen $22 - 14$ är delbar med 4.

Egenskaper hos kongruenta tal

Om a och b är kongruenta modulo n , så innebär det att

- differensen $a - b$ är en multipel av n
- $a - b$ är delbart med n

$$a - b = kn \text{ eller } a = kn + b \text{ för något heltal } k.$$

Summor och kongruenser

Om vi adderar två tal, vilket tal är då summan kongruent med? Vi undersöker summan av 7 och 16, när vi räknar modulo 6.

Det gäller att

$$7 \equiv 1 \pmod{6} \quad \text{och} \quad \text{Både 7 och 1 har rest 1 vid division med 6 eftersom } \frac{7}{6} = 0 \text{ rest } 1$$

$$16 \equiv 4 \pmod{6} \quad \text{Både 16 och 4 har rest 4 vid division med 6}$$

Vi adderar talen 7 och 16 respektive resterna 1 och 4 med varandra.

$$7 + 16 = 23 \quad \text{och} \quad 1 + 4 = 5$$

Det visar sig att de båda summorna är kongruenta modulo 6, dvs.

$$23 \equiv 5 \pmod{6} \quad \text{Både 23 och 5 har rest 5 vid division med 6}$$

Det verkar alltså som att vi kan beräkna resten till summan genom att beräkna summan av termernas rester. Man kan visa att det alltid är så.

Produkter och kongruenser

På samma sätt undersöker vi produkten av talen 7 och 16, när vi räknar modulo 6. Vi multiplicerar 7 och 16 respektive resterna 1 och 4 med varandra.

$$7 \cdot 16 = 112 \quad \text{och} \quad 1 \cdot 4 = 4$$

Eftersom $112 = 18 \cdot 6 + 4$, så är de båda produkterna kongruenta modulo 6 dvs.

$$112 \equiv 4 \pmod{6} \quad \text{Både 112 och 4 har rest 4 vid division med 6}$$

Vi får alltså samma resultat om vi beräknar resten till produkten som när vi beräknar produkten av faktorernas rester. Även detta gäller allmänt.

Exempel:

Bestäm resten när summan av 114 och 47 divideras med 4.

Lösning:

Vi kan först utföra additionen $114 + 47$ och sedan undersöka resten. Men vi väljer i stället att först beräkna resten när 114 respektive 47 divideras med 4 och sedan addera dessa rester.

$$\frac{114}{4} = 28 \text{ rest } 2 \quad \text{och} \quad \frac{47}{4} = 11 \text{ rest } 3 \quad \text{Detta kan vi uttrycka som två kongruenser: } 114 \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{och} \quad 47 \equiv 3 \pmod{4}$$

Summan av resterna är $2 + 3 = 5$ och eftersom resten är större än 4, så räknar vi modulo 4 på resten.

$$5 \equiv 1 \pmod{4}$$

Svar: Resten är 1.

Vi kan kontrollera genom att räkna $114 + 47 = 161 \equiv 1 \pmod{4}$.

5 har resten 1 vid division med 4 eftersom $5 = 0 \cdot 4 + 1$

Exempel: Bestäm resten när produkten av 87 och 23 divideras med 7.

Lösning: Vi konstaterar först att $87 \equiv 3 \pmod{7}$ och $23 \equiv 2 \pmod{7}$. Sedan beräknar vi produkten av resterna:

$$3 \cdot 2 = 6$$

Det ger $87 \cdot 23 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \pmod{7}$

Vid division med 7 har $87 \cdot 23$ samma rest som $3 \cdot 2$.

Svar: Resten av produkten är 6.

NIVÅ 1

1130 Vilken är resten vid följande divisioner?

a) $\frac{19}{4}$ b) $\frac{5}{7}$

1131 Emelie ska utföra divisionen $\frac{18}{5}$ med rest.

- a) Vilken är kvoten?
b) Vilken är resten?

1132 Ange tre tal som är

- ö** a) kongruenta modulo 5
b) kongruenta modulo 7

1133 Vilka påståenden är ekvivalenta?

- A** $\frac{93}{7} = 13$ rest 2
B $93 \equiv 2 \pmod{7}$
C $93 \equiv 7 \pmod{2}$
D 93 har resten 7 vid division med 13

1134 Nämn en gemensam egenskap för två tal som är kongruenta modulo 10?

1135 Uttryck följande påståenden som kongruenser $a \equiv b \pmod{n}$:

- a) 12 och 17 ger samma rest vid division med 5.
b) $43 - 23$ är delbart med 10.

1136 Om $a \equiv 3 \pmod{7}$ vad är då resten vid divisionen $\frac{a}{7}$?

1137 Ersätt x med minsta möjliga naturliga tal.

- a) $35 + 4\,002 \equiv x \pmod{4}$
b) $803 + 117 \equiv x \pmod{5}$

1138 Ersätt x med minsta möjliga naturliga tal.

- a) $1\,003 \cdot 602 \equiv x \pmod{10}$
b) $7 \cdot 62 \cdot 5 \equiv x \pmod{4}$

NIVÅ 2

1139 a) Ange tre tal som är kongruenta med 1 modulo 8. Minst ett av talen ska vara negativt.

- b) Skriv ett uttryck för samtliga tal som är kongruenta med 1 modulo 8.

1140 I texten på förra uppslaget påstås att om $a \equiv b \pmod{n}$, så gäller att $n \mid (a - b)$. Visa att påståendet följer av definitionen av kongruens.

1141 **ö** Konstruera en uppgift där man ska undersöka differensen av två tal modulo 7. I resultatet ska differensen vara kongruent med 0 modulo 7.

NIVÅ 3

1142 Om du tittar i en almanacka, så ser du att 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 och 12/12 infaller på samma veckodag. Förklara med hjälp av kongruensräkning varför alla dessa datum infaller på samma veckodag.

Beräkningar med kongruenser

Säg att du till exempel vill finna slutsiffran för resultatet av en komplicerad beräkning eller ta reda på vilken veckodag det är om 2^{95} dagar. Att bestämma detta med hjälp av vanliga beräkningar kan vara knepigt, även om man har tillgång till hjälpmedel. Med kongruensräkning är detta ofta mycket enklare, eftersom vi då endast behöver bestämma resten vid division med 10 respektive 7.

I förra avsnittet konstaterade vi först att

$$7 \equiv 1 \pmod{6}$$

och att

$$16 \equiv 4 \pmod{6}$$

Sedan visade vi att också summan $7 + 16 = 23$ är kongruent med summan $1 + 4 = 5$ modulo 6 och att produkten $7 \cdot 16 = 112$ är kongruent med produkten $1 \cdot 4 = 4$ modulo 6. Det vill säga att

$$7 + 16 \equiv 1 + 4 \pmod{6}$$

och

$$7 \cdot 16 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{6}$$

Detta är något som gäller allmänt. Här nedanför har vi sammanfattat några räkneregler för kongruenser.

Räkneregler för kongruenser

Om $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$, så gäller

- 1) $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- 2) $ac \equiv bd \pmod{n}$
- 3) $a^p \equiv b^p \pmod{n}$ p är ett positivt heltal

Vi bevisar här påstående 2). Bevisen för 1) och 3) lämnas som övning.

Eftersom $a \equiv b \pmod{n}$, så finns det ett heltal k_1 sådant att $a = k_1n + b$. På samma sätt finns det ett heltal k_2 , sådant att $c = k_2n + d$ eftersom $c \equiv d \pmod{n}$.

Vi får

$$ac = (k_1n + b)(k_2n + d) = k_1k_2n^2 + k_1nd + k_2nb + bd = (k_1k_2n + k_1d + k_2b)n + bd$$

Eftersom k_1, k_2, n, d och b är heltal, så är också $(k_1k_2n + k_1d + k_2b)$ ett heltal.

Vi sätter $k = k_1k_2n + k_1d + k_2b$ och får

$$ac = kn + bd, \text{ för något heltal } k$$

Men att $ac = kn + bd$ betyder ju att $ac - bd = kn$, dvs. det skiljer ett helt antal n mellan ac och bd . Det innebär att $ac \equiv bd \pmod{n}$. v.s.b.

Om det skiljer ett helt antal n mellan a och b , så är $a \equiv b \pmod{n}$

Exempel: Bestäm det minsta naturliga tal a , som gör att $43 + a \equiv 3 \pmod{6}$.

Lösning: Vi börjar med att undersöka resten när 43 divideras med 6.

$$\frac{43}{6} = 7 \text{ rest } 1, \text{ dvs. } 43 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\text{Så } 43 + a \equiv 1 + a \pmod{6} \quad \text{Enligt räkneregel 1}$$

$1 + a \equiv 3 \pmod{6}$ ger direkt att $a = 2$ är det minsta positiva tal som gör att $43 + a \equiv 3 \pmod{6}$.

Exempel: Vilken blir slutsiffran om man beräknar 477^{42} ?

Lösning: Slutsiffran är resten vid division med 10. För att bestämma slutsiffran räknar vi därför modulo 10. Eftersom $477 \equiv 7 \pmod{10}$ så får vi

$$477^{42} \equiv 7^{42} \pmod{10} \quad \text{Enligt räkneregel 3}$$

$$7^{42} = (7^2)^{21} \quad \text{Enligt potenslagarna}$$

$$(7^2)^{21} \equiv 9^{21} \pmod{10} \quad 7^2 = 49 \text{ och } 49 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$9^{21} = 9 \cdot 9^{20} = 9 \cdot (9^2)^{10} \quad \text{Enligt potenslagarna}$$

$$9 \cdot (9^2)^{10} \equiv 9 \cdot 1^{10} \pmod{10} \quad 9^2 = 81 \text{ och } 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$9 \cdot 1^{10} \equiv 9 \pmod{10}$$

Svar: Talet 477^{42} har slutsiffran 9.

Exempel: Anita konstaterar att i dag är det tisdag. Vilken veckodag är det om 2^{95} dagar?

Lösning: Vi räknar modulo 7 och gör omskrivningar med hjälp av räkneregler för kongruenser och potenser:

$$2^{95} = 2^{2+93} = 2^2 \cdot 2^{93} = 4 \cdot 2^{3 \cdot 31} = 4 \cdot (2^3)^{31} = 4 \cdot 8^{31} \quad \text{Enligt potenslagarna}$$

$$\text{Eftersom } 8 \equiv 1 \pmod{7} \text{ så är } 8^{31} \equiv 1^{31} \pmod{7} \quad \text{Enligt räkneregel 3}$$

Därför gäller

$$4 \cdot 8^{31} \equiv 4 \cdot 1^{31} = 4 \cdot 1 = 4 \pmod{7}$$

$$\text{Så } 2^{95} \equiv 4 \pmod{7}$$

Det betyder med andra ord att 2^{95} har resten 4 vid division med 7 och att om det är tisdag i dag, så är det lördag om 2^{95} dagar.

NIVÅ 1

1143 Bestäm det minsta naturliga talet m , så att

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \equiv m \pmod{3}$

b) $7^5 \equiv m \pmod{3}$

1144 Bestäm det minsta naturliga tal a , som gör att

a) $39 + a \equiv 11 \pmod{7}$

b) $70 \equiv 12 + a \pmod{8}$

c) $7 \cdot a \equiv 15 \pmod{4}$

1145 Låt a och b vara två positiva heltal. När a divideras med 7 blir resten 2. När b divideras med 7 blir resten 3. Vad är resten när

a) $a + b$ divideras med 7

b) $a \cdot b$ divideras med 7

c) $3a + b^2$ divideras med 7

1146 Om det är september månad i dag, vilken månad är det i så fall om 5^{200} månader?

1147 Om klockan nu är 15.00, vad är då klockan om 5^{102} timmar?

NIVÅ 2

1148 Att visa att talet 26 039 är delbart med 13 kan man göra genom att undersöka summan

$$26\,000 + 39 \text{ räknat i modulo } 13$$

a) Visa med hjälp av modularäkning att 26 039 är delbart med 13.

b) Visa på samma sätt att 1 734 är delbart med 17.

1149 Bestäm slutsiffran när man beräknar följande uttryck.

a) 9^{203}

b) 7^{104}

1150 Bestäm det minsta naturliga tal u så att

a) $312 + 7 \cdot 87 - 9 \equiv u \pmod{10}$

b) $4 \cdot 62 - 5u \equiv 2 \pmod{3}$

1151 Bestäm två heltal u som uppfyller att $10^{27} - 1 \equiv 800 \equiv 1 - u \pmod{9}$.

NIVÅ 3

1152 Visa att ett fyrsiffrigt tal alltid är delbart med 9, om talets siffersumma är delbar med 9. Ledning: Vilket tal är det fyrsiffriga talet ABCD kongruent med modulo 9? Hur kan talet skrivas i utvecklad form?

1153 Bestäm alla heltal x som uppfyller kongruens-ekvationerna

a) $2x \equiv 2 \pmod{4}$

b) $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$

c) $5x - 10 \equiv 30 \pmod{7}$

1154 Bevisa att om $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$, så gäller att $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

1155 Bevisa att om $a \equiv b \pmod{n}$, så gäller att $a^p \equiv b^p \pmod{n}$, där p är ett positivt heltal.

1156 Visa att ett tal alltid är delbart med 3, om talets siffersumma är delbar med 3.

Resonemang och begrepp

➤ Beskriv hur man kan gå till väga när man ska primtalsfaktorisera ett tal.

➤ Vad är skillnaden mellan ett primtal och ett sammansatt tal?

➤ Nämn något som utmärker diskret matematik.

➤ Förklara vad det innebär att två tal är kongruenta med varandra modulo 7.

➤ Vad menas med den principala resten då a divideras med b ?

1.2 Talföljder och induktionsbevis

Talföljder och summor

Redan i kurs 1c arbetade vi med talföljder. En *talföljd* är en följd av tal, som till exempel

6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

De tre punkterna säger att talföljden fortsätter efter samma mönster.

eller

3, 87, -22, 23, 0, 14, $\frac{2}{3}$

Talföljden har ett begränsat antal element och består endast av de 7 element vi ser här.

Talen i en talföljd kallas *element*. Den första talföljden fortsätter efter 36 och har inget slut. Talföljden har ett oändligt antal element. Den andra talföljden har ett ändligt antal element, nämligen sju stycken. I den första talföljden ser vi ett tydligt mönster, medan det är svårare att urskilja något mönster i den andra. Här kommer vi främst att ta upp talföljder med ett bakomliggande mönster.

Det är inte alltid nödvändigt att skriva upp alla element i en talföljd, även om antalet är ändligt. Vi kan till exempel skriva 5, 10, 15, ..., 95. Mönstret framgår tydligt och det räcker att visa början och slutet av talföljden.

Rekursiv formel

Talföljden 6, 12, 18, ... kan beskrivas på olika sätt. Ett sätt är att säga att det första elementet är 6 och att man får nästa element genom att addera 6 till det föregående. Om vi kallar elementen i talföljden $a_1, a_2, \dots$, så kan vi beskriva den genom

$$a_1 = 6$$

$$a_n = a_{n-1} + 6 \text{ för } n > 1$$

Här har vi beskrivit talföljden med en *rekursiv formel*. Principen är alltså att man beräknar elementen successivt via deras förhållande till föregående element.

Sluten formel

Om vi först ger elementen i talföljden ett ordningsnummer

a_n	6	12	18	...
n	1	2	3	...

så ser vi att vi kan beräkna talföljdens element direkt genom formeln

$$a_n = 6n \text{ för } n \geq 1 \quad \text{Till exempel är } a_3 = 6 \cdot 3 = 18$$

Ordningsnumret brukar man kalla *index*. En sådan här formel kallas för en *sluten formel* och med den kan vi direkt beräkna valfritt element i talföljden, utan att vara beroende av att känna till tidigare element i talföljden.

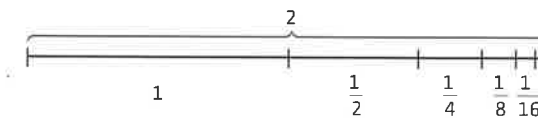
Summan av elementen
i en talföljd

Ibland är man intresserad av att bestämma summan av elementen i en talföljd. Det innebär helt enkelt att man adderar talföljdens element. Om talföljden har ett ändligt antal element, så blir förstås summan ändlig. Men även talföljder med ett oändligt antal element kan ha en ändlig summa.

Till exempel gäller

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Man kan resonera som att bidraget från varje term är tillräckligt litet för att summan inte ska gå mot oändligheten.



Kan du med hjälp av figuren förklara varför $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$?

Summatecknet $\sum$

När man vill teckna summan av en talföljd kan det vara praktiskt att använda *summatecknet* $\sum$. Med hjälp av $\sum$ kan man ofta kort och effektivt beskriva summor med många termer. Om vi till exempel vill teckna summan $5 + 10 + 15 + 20$ med hjälp av summatecken, så noterar vi först att summan innehåller 4 termer. Därefter uttrycker vi termerna med den slutna formeln $a_m = 5m$, där m antar alla heltalsvärden från 1 till 4. Vi kan nu skriva

$$\sum_{m=1}^4 5m$$

som betyder att vi ska beräkna summan av de termer som bildas då m går från 1 till 4. För att teckna summan av en talföljd med oändligt antal element använder vi oändlighetstecknet ∞ . Vi skriver alltså

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}$$

Exempel:

Skriv $\sum_{m=1}^6 (2m+1)$ som en summa av termer.

Lösning:

Vi låter m anta heltalsvärden från 1 till 6 och ser vilka termer som bildas.

$$m = 1 \text{ ger } 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$m = 2 \text{ ger } 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$m = 3 \text{ ger } 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

för $m = 4$, $m = 5$ och $m = 6$ får vi på samma sätt 9, 11 respektive 13.

Vi får $\sum_{m=1}^6 (2m+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ Summan innehåller 6 termer

Exempel: Ange en formel för den talföljd där första elementet är 4 och varje element är 7 större än det föregående.

Lösning: Vi väljer att beskriva talföljden med en rekursiv formel

$$a_1 = 4 \quad \text{Det första elementet är 4}$$

$$a_n = a_{n-1} + 7 \quad \text{för } n \geq 2 \quad \text{Vi får ett element genom att addera 7 till det föregående}$$

Svar $a_1 = 4; a_n = a_{n-1} + 7 \quad \text{för } n \geq 2$

Väljer vi en sluten formel blir svaret i stället
 $a_n = 4 + 7(n-1) = 7n - 3, n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n = 14 + 8 = 22$$

NIVÅ 1

1201 En talföljd definieras genom formeln
 $a_n = 8n + 6$.

- a) Är det en rekursiv eller en sluten formel?
 b) Beräkna a_4 .

1202 Ange det femte elementet i talföljden som beskrivs av

a) $a_n = \frac{n^2}{2} + 3n$ b) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

1203 Skriv summorna utan att använda summatecknet Σ .

a) $\sum_{k=1}^5 4k$ b) $\sum_{k=0}^4 (3^k + 1)$

1204 Skriv summorna med hjälp av summatecknet Σ och tillhörande formel.

- a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$
 b) $2 + 5 + 8 + 11 + 14$
 c) $7 + 14 + 21 + \dots + 133$

1205 Figurerna är byggda av tändstickor.



- a) Hur många stickor behövs för att bygga den 10:e figuren?
 b) Beskriv antalet stickor i varje figur med hjälp av en rekursiv respektive sluten formel.

1206 Beskriv följande talföljder med en sluten formel

a) 1, 4, 9, 16, 25 b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

1207 Vilket element har värdet 98 i talföljden som beskrivs av

a) $a_n = 22 + 4n$ b) $b_n = 2 \cdot 7^{n-1}$

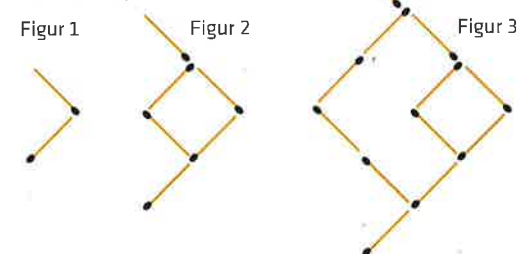
NIVÅ 2

1208 Teckna summan med hjälp av summatecknet Σ och tillhörande slutna formler.

a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$
 b) $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192$

1209 Hur många stickor finns det i den

- a) 4:e figuren
 b) n :te figuren



NIVÅ 3

1210 Skriv summan $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$ med hjälp av summatecknet Σ och en sluten formel.

Aritmetiska talföljder och summor

I talföljden 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... är differensen mellan två på varandra följande element 3. Talföljden är ett exempel på en *aritmetisk talföljd*. I en aritmetisk talföljd är differensen mellan två på varandra följande element konstant.

Aritmetisk talföljd

En talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ är en aritmetisk talföljd om

$$a_n - a_{n-1} = d$$

för alla element i talföljden och d är en konstant.

Elementen i en aritmetisk talföljd kan beskrivas med den slutna formeln

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

I en aritmetisk talföljd är differensen mellan två på varandra följande element konstant.

Aritmetisk summa

I summan

$$8 + 19 + 30 + \dots + 272$$

är termerna element från en aritmetisk talföljd. En sådan summa kallas för en *aritmetisk summa*. Den första termen är 8 och differensen mellan termerna är 11. Termerna i summan kan därför beskrivas av den slutna formeln

$$8 + 11(m-1) = 8 + 11m - 11 = 11m - 3$$

Summan består av 25 termer och kan skrivas

$$\sum_{m=1}^{25} (11m - 3)$$

Det går förstås att beräkna summan genom att på vanligt sätt summera samtliga 25 termer. Men det finns en välkänd formel för beräkning av aritmetiska summor. Den tog vi upp redan i kurs 1c. Formeln är effektiv framförallt när summan har många termer.

Aritmetisk summa

I en aritmetisk summa består termerna av elementen i en aritmetisk talföljd. Om en aritmetisk summa har n stycken termer med a_1 som första term och a_n som sista term, så kan summan s_n av de n termerna beräknas med formeln

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Exempel: I en aritmetisk talföljd med 12 element är det första elementet 18. Differensen mellan två på varandra följande element är 4.

- Vilka är talföljdens element?
- Beskriv talföljden med en sluten formel.

Lösning: a) Eftersom talföljden innehåller 12 element, så kommer det sista elementet att vara

$$18 + 11 \cdot 4 = 62$$

Svar: Talföljdens element är 18, 22, 26, ..., 62

- Varje element i en aritmetisk talföljd kan skrivas

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Vi får därför

$$a_n = 18 + (n-1) \cdot 4 = 14 + 4n, \text{ för } n = 1, 2, \dots, 12$$

Svar: $a_n = 14 + 4n$, för $n = 1, 2, \dots, 12$.

Exempel: a) Teckna summan $s = 3 + 5 + 7 + \dots + 357$ med hjälp av summatecknet Σ och en sluten formel.

- Beräkna därefter summan.

Lösning: a) Vi ser att det är en aritmetisk summa med differensen 2 och första termen 3. Termerna i summan kan därför beskrivas med den slutna formeln

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

där a_n är termen med index n . Den sista termen i summan är 357. Antalet termer n kan därför beräknas med ekvationen

$$357 = 2n + 1$$

$$2n = 357 - 1$$

$$n = 178$$

Summan s_{178} av de 178 termerna kan alltså skrivas

$$s_{178} = \sum_{n=1}^{178} (2n + 1)$$

- Formeln för aritmetisk summa $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ger

$$s_{178} = \frac{178 \cdot (3 + 357)}{2} = 32\,040$$

NIVÅ 1

1211 Ange en aritmetisk talföljd med 8 element, vars första element är 7 och differensen är $d = 4$.

1212 I en aritmetisk talföljd är $a_1 = 3$ och $d = 1,2$. Bestäm a_{10} .

1213 Summan $4 + 7 + 10 + \dots + 70$ innehåller 23 termer.

- Varför är det en aritmetisk summa?
- Beräkna summan.

1214 En aritmetisk talföljd har $a_1 = 102$ och $d = -3$.

- Bestäm a_{21}
- Bestäm summan av de 21 första elementen.

1215 Den slutna formeln $a_n = 3n - 1$, där $n = 1, 2, 3, \dots$ beskriver en talföljd.

- Bestäm de 4 första elementen i talföljden.
- Är talföljden aritmetisk?
- Beskriv talföljden med en rekursiv formel.

1216 Hur många element finns i den aritmetiska talföljden

$$7, 10, 13, 16, \dots, 298?$$

1217 Beräkna den aritmetiska summan $5 + 9 + 13 + \dots + 61$.

1218 I en aritmetisk talföljd är $a_5 = 41$ och $a_9 = 69$. Bestäm talföljdens första element, a_1 .

NIVÅ 2

1219 Beräkna summan av de 25 första termerna i den aritmetiska talföljd som beskrivs av formeln

- $a_n = 2 + 6n$
- $b_1 = 4; b_n = 11 + b_{n-1}$ för $n > 1$

1220 Figurerna visar ett mönster som bildas av prickar.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

- Hur många prickar behöver man för att bilda figur 4 respektive figur 5?
- Ange en sluten formel som beskriver antalet prickar i figur n .
- Hur många prickar innehåller figur 1 till och med 100 sammanlagt?

1221 En aritmetisk talföljd innehåller elementen 9, 7, 5, 3, ...

- Beskriv talföljden med en sluten formel.
- Bestäm en förenklad formel för summan av de n första termerna i talföljden.

NIVÅ 3

1222 Visa att en aritmetisk summa med oändligt antal termer $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ alltid saknar egentligt gränsvärde om $a_1 \neq 0$. Här innebär det att du ska visa att summan antingen går mot ∞ eller $-\infty$.



Geometrisk talföljd och summor

I talföljderna

1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 512

och

4, -12, 36, -108, ...

är kvoten mellan två på varandra följande element konstant. I den första talföljden är kvoten $k = 2$. Det kan vi se genom att

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \dots = 2$$

I den andra talföljden är $k = -3$. En talföljd där kvoten mellan två på varandra följande element är konstant kallas en *geometrisk talföljd*. Geometrisk talföljd kan t.ex. beskriva hur ett kapital eller en population förändras med en konstant faktor under en viss tid. Om värdet av ett kapital på 4 000 kr i en räntefond ökar med 3,2 % per år, så kan du se av tabellen här intill hur kapitalet ökar med tiden. Efter t år kommer värdet av kapitalet att vara $4\,000 \cdot 1,032^t$ kr.

Tiden (år)	Kapitalets värde (kr)
0	4 000
1	$4\,000 \cdot 1,032 = 4\,128$
2	$4\,000 \cdot 1,032^2 = 4\,260$
3	$4\,000 \cdot 1,032^3 = 4\,396$
...	...
t	$4\,000 \cdot 1,032^t$

Kapitalets värde i kronor i en följd av år är

4 000; $4\,000 \cdot 1,032$; $4\,000 \cdot 1,032^2$; $4\,000 \cdot 1,032^3$ osv.

och bildar alltså en geometrisk talföljd. Det är inte ovanligt att man på detta sätt skriver talföljdens element i potensform.

Geometrisk talföljd

I en geometrisk talföljd är kvoten mellan två på varandra följande element konstant.

En talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ är en geometrisk talföljd om $\frac{a_n}{a_{n-1}} = k$ för alla element i talföljden och k är en konstant.

Elementen i en geometrisk talföljd kan beskrivas med den slutna formeln $a_n = a_1 k^{n-1}$.

Geometrisk summa

I summan $4\,000 + 4\,000 \cdot 1,032 + 4\,000 \cdot 1,032^2 + 4\,000 \cdot 1,032^3 + \dots$ är termerna element i den geometriska talföljden här ovanför. En sådan summa kallas en *geometrisk summa*. Den här summan beskriver det totala värdet i en fond efter ett visst antal år, om man varje år sätter in 4000 kr och den årliga tillväxten är 3,2 %. Till exempel beräknas fondens värde efter tre år med den geometriska summan $4\,000 + 4\,000 \cdot 1,032 + 4\,000 \cdot 1,032^2$. För att förstå det kan vi resonera så här:

Det är 4 000 kr som är precis nyinsatta, 4 000 kr som stått inne i fonden i ett år, och 4 000 kr som stått inne i två år. Det sammanlagda nuvarande värdet av beloppen är $4\,000 + 4\,000 \cdot 1,032 + 4\,000 \cdot 1,032^2$, som alltså är en geometrisk summa med tre termer.

Precis som för en aritmetisk summa, så finns det en välkänd formel för att beräkna geometriska summor.

Geometrisk summa

I en geometrisk summa består termerna av elementen i en geometrisk talföljd. Om en geometrisk summa har n stycken termer med a_1 som första term och kvoten k , så kan summan s_n av de n termerna beräknas med formeln

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \text{ där } k \neq 1$$

I Matematik Origo kurs 1c motiverade vi formeln med ett räkneexempel. Du kommer själv att få bevisa formeln i uppgift 1232. I kommande avsnitt kommer du också att få bevisa formeln på ett annat sätt.

Som vi ser av formeln kan en geometrisk summa beräknas med hjälp av första termen, värdet av kvoten samt antalet termer. Om vi t.ex. vill beräkna summan $4\,000 + 4\,000 \cdot 1,032 + 4\,000 \cdot 1,032^2 + \dots + 4\,000 \cdot 1,032^{10}$, så börjar vi med att konstatera att det är en geometrisk summa där $a_1 = 4\,000$; $k = 1,032$ och $n = 11$.

Med hjälp av formeln för geometrisk summa får vi sedan

$$s_{11} = \frac{4\,000(1,032^{11} - 1)}{1,032 - 1} \approx 51\,761$$

Exempel:

I en geometrisk talföljd är det tredje elementet 147 och det fjärde elementet 1 029.

a) Bestäm kvoten k . b) Beskriv talföljden med en formel.

Lösning:

a) I en geometrisk talföljd är kvoten av två på varandra följande element konstant. Vi kan därför beräkna kvoten genom att dividera det fjärde och det tredje elementet på varandra.

$$k = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1\,029}{147} = 7$$

b) En geometrisk talföljd kan beskrivas med formeln $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$, där a_1 är talföljdens första element och k är kvoten. Eftersom vi redan beräknat kvoten k återstår bara att ta reda på a_1 . Vi utnyttjar att $a_3 = 147$ och får ekvationen

$$147 = a_1 \cdot 7^{3-1}$$

$$147 = a_1 \cdot 7^2 \text{ vilket ger } a_1 = \frac{147}{49} = 3$$

Svar: Den geometriska talföljden kan beskrivas med formeln:

$$a_n = 3 \cdot 7^{n-1}, n \geq 1$$

Exempel:

En summa beskrivs av uttrycket $\sum_{m=0}^{15} 3\,000 \cdot 1,019^m$.

- Motivera varför summan är en geometrisk summa.
- Beräkna summan.

Lösning:

- Vi kan skriva summan

$$\sum_{m=0}^{15} 3\,000 \cdot 1,019^m = 3\,000 + 3\,000 \cdot 1,019 + 3\,000 \cdot 1,019^2 + \dots + 3\,000 \cdot 1,019^{15}$$

Kvoten k mellan två på varandra följande termer är $k = 1,019$. Det betyder att det är en geometrisk summa.

- Den första termen är $a_1 = 3\,000$, kvoten är $k = 1,019$ och antalet termer är $n = 16$. Vi får summan

$$s_{16} = \frac{3\,000(1,019^{16} - 1)}{1,019 - 1} \approx 55\,500$$

Exempel:

I början av januari varje år sätter Catrine in 3 000 kr på ett konto. Räntesatsen är 4,3 %. Catrine sätter in pengar vid totalt åtta tillfällen. Hur mycket pengar finns på kontot omedelbart efter den sista insättningen?

Lösning:

Catrine får olika mycket ränta på sina insättningar, eftersom pengarna funnits på kontot under olika lång tid. Tabellen visar hur mycket varje insättning är värd när pengarna tas ut.

År	1	2	3	4	5	6	7
Insättning	3 000	3 000	3 000	...	...	...	3 000
							$3\,000 \cdot 1,043^7$
							$3\,000 \cdot 1,043^6$
							$3\,000 \cdot 1,043^5$
							...
							3 000
							3 000
							3 000 + ... + 3 000 · 1,043 ⁷

Det totala kapitalet s_8 efter 8 insättningar:

$$s_8 = 3\,000 + 3\,000 \cdot 1,043 + \dots + 3\,000 \cdot 1,043^7 \text{ kr}$$

Uttrycket är en geometrisk summa där den första termen $a_1 = 3\,000$, kvoten $k = 1,043$ och antalet termer $n = 8$.

$$s_8 = \frac{3\,000(1,043^8 - 1)}{1,043 - 1} \approx 27\,900 \text{ kr} \quad s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$$

Svar: Kapitalet efter sista insättningen är ungefär 27 900 kr.

NIVÅ 1

- 1223** a) Bestäm a_1 och k i den geometriska talföljden 2, 6, 18, 54, ...

- Beskriv talföljden med en formel.

- 1224** En geometrisk talföljd beskrivs av formeln $a_n = 0,7 \cdot (-5)^{n-1}$ för $n = 1, \dots, 5$

- Hur många element innehåller talföljden?
- Bestäm det första och det sista elementet.

- 1225** $52 + 52 \cdot 1,8 + 52 \cdot 1,8^2 + \dots + 52 \cdot 1,8^{14}$ är en geometrisk summa.

- Hur många termer finns i summan?
- Använd formeln för geometrisk summa och beräkna summan här ovanför.

- 1226** Beräkna den geometriska summan $2\,000 + 2\,000 \cdot 1,025 + 2\,000 \cdot 1,025^2 + \dots + 2\,000 \cdot 1,025^7$.

- 1227** Beräkna värdet av de geometriska summorna

$$\text{a) } \sum_{m=1}^{12} 1,20^m \quad \text{b) } \sum_{m=1}^{20} 0,9^m$$

- 1228** Lindas hund Karo ska äta en penicillinkur. Han ska ha en tablett på 20 mg varje morgon och kväll i 7 dagar. Man uppskattar att ungefär 35 % av penicillinet bryts ner mellan varje tablett.

- Hur skulle den geometriska summan se ut som visar mängden penicillin i Karos kropp direkt efter det sista intaget.
- Hur stor mängd penicillin finns i så fall i Karos kropp efter intag av den sista tabletten?

- 1229** Josefin sätter in 5 000 kr på banken i början av varje år i 10 år. Räntan är 1,75 %. Hur mycket har hon på banken direkt efter den 10:e insättningen?

NIVÅ 2

- 1230** Talen $x - 4$, x och $x + 12$ är tre på varandra följande element i en geometrisk talföljd. Bestäm vilka tal det är.

- 1231** I en geometrisk talföljd är summan av det första elementet och det tredje elementet 25. Summan av det andra och det fjärde elementen är 50. Bestäm en formel för talföljden.

- 1232** Formeln för en geometrisk summa med n termer kan skrivas $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$. Bevisa att formeln gäller genom att följa stegen

- Teckna summan $s_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \dots + a_1k^{n-1}$
- Teckna summan ks_n
- Ställ upp ett uttryck för $ks_n - s_n$
- Förenkla uttrycket
- Lös ut s_n

NIVÅ 3

- 1233** Bestäm de heltal n för vilka

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^m < 2^{100}$$

- 1234** I en geometrisk talföljd med oändligt antal element gäller under vissa omständigheter att elementen $a_n = a_1k^{n-1}$ närmar sig ett visst värde. Man säger att elementen går mot ett gränsvärde. Det innebär att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1k^{n-1} = A$, där A är gränsvärdet.

- Vilket villkor måste gälla för att gränsvärdet A ska existera, dvs. att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1k^{n-1} = A$?
- Det finns bara två värden som A kan anta om gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1k^{n-1} = A$ existerar. Vilka är dessa två värden?

- 1235** I en viss geometrisk summa med oändligt antal termer gäller att absolutbeloppet av kvoten k är $|k| < 1$.

- Visa att summan kan beräknas med formeln $s = \frac{a_1}{1 - k}$
- Varför måste $|k| < 1$?

Induktion av latinets *inductio*, som betyder leda in eller dra in.

Induktionsbevis

Induktionsbevis

I kurs 4 behandlade vi olika typer av bevis. En metod är *direkt bevisföring*, där man från en given utgångspunkt via logiska resonemang visar att ett påstående är sant. En annan typ är *indirekta bevis*, där man t.ex. bevisar att ett påstående är sant genom att visa att det motsatta alternativet är omöjligt.

Vi ska nu ta upp en tredje typ av bevis, som kallas *induktionsbevis*. Principen kan liknas vid en rad av dominobrickor som välter. Om en bricka välter, så puttar den ner nästa, som i sin tur puttar ner ytterligare en. På det viset välter alla brickor som en följd av att någon välter den första.

När man genomför ett induktionsbevis inleder man med att visa att egenskapen gäller för det första talet. Sedan visar man att om egenskapen gäller för ett tal, vilket som helst, så gäller den för det direkt följande talet, oavsett var i uppräknigen man befinner sig.

Som exempel visar vi att påståendet $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ är sant för alla värden av n .

Vi börjar med att visa att påståendet gäller för $n = 1$, dvs. vi börjar med att visa att $VL = HL$ när $n = 1$.

$VL = 1$ Summan innehåller bara en term

$HL = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ Vi sätter in $n = 1$ i formeln

$VL = HL$, dvs. påståendet är sant för $n = 1$.

Nu antar vi att påståendet är sant för ett visst värde av n , vi kallar det värdet för p . Alltså antar vi att för $n = p$ gäller $1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Vi ska nu undersöka om detta medför att påståendet är sant även för nästa värde på n , dvs. för $n = p + 1$.

Vi undersöker VL och HL för $n = p + 1$ och använder vårt induktionsantagande. I VL summerar vi alla termer från 1 till $p + 1$.

$VL_{p+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p + 1)$ Använd induktionsantagandet för att skriva om de p första termerna

$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ enligt induktionsantagandet.

Vi har brutit ut den gemensamma faktorn $(p + 1)$

$$VL_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}$$

I HL sätter vi in $p + 1$ direkt i formeln.

$$HL_{p+1} = \frac{(p+1)((p+1)+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Vi har satt in $n = p + 1$ i formeln $\frac{n(n+1)}{2}$

Alltså är $VL_{p+1} = HL_{p+1}$, dvs. $VL = HL$ även för $p + 1$.

Vi har nu visat att påståendet är sant för $n = 1$ och att om påståendet är sant för ett visst tal p , så är det också sant för nästa tal $p + 1$. Detta gör att vi kan dra slutsatsen att påståendet också är sant för alla tal $n > 1$.

Detta kan liknas vid att om bara brickorna kommer i rörelse, så kommer alla brickor att välta. Induktionsbasen garanterar att brickorna börjar välta. Eftersom påståendet är sant för $n = 1$ och för två på varandra följande tal, så är ju påståendet sant för $n = 2$. Men då är det också sant för $n = 3$, vilket leder till att det är sant för $n = 4$, osv. Vi kan dra slutsatsen att påståendet är sant för alla positiva heltal.

Strategi för induktionsbevis

Om man vill visa att ett påstående är sant för alla heltal $n \geq a$, så kan man göra på följande sätt:

- **Induktionsbas:** Visa att påståendet är sant för $n = a$.
- **Induktionsantagande:** Anta att påståendet är sant för ett visst värde på n , t.ex. $n = p$, dvs. anta att $VL_p = HL_p$
- **Induktionssteg:** Visa med hjälp av induktionsantagandet att påståendet då är sant även för $n = p + 1$, dvs. att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$
- **Slutsats:** Eftersom påståendet är sant för $n = a$ och för två på varandra följande tal, så är påståendet sant för alla tal $n \geq a$.

Att visa att $HL_{p+1} = VL_{p+1}$ gör man t.ex. genom att i VL_{p+1} använda antagandet för att skriva om alla termer utom den som innehåller just $p + 1$. I HL_{p+1} sätter man in $p + 1$ direkt i formeln. Sedan förenklar man båda leden, så att det framgår att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$.

Exempel:

Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Lösning:

Vi inleder med att visa att påståendet är sant för $n = 1$. Induktionsbas

$$VL = \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 \quad \text{respektive} \quad HL = 1^2 = 1$$

Så $VL = HL$ för $n = 1$.

Anta nu att påståendet är sant för något visst n , säg $n = p$. Det innebär att

$$VL_p = \sum_{k=1}^p (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (2p-1) = p^2 = HL_p \quad \text{Induktionsantagande}$$

Vi undersöker vad som i så fall gäller för det följande talet, $n = p + 1$.

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = \quad \text{Enligt induktionsantagandet}$$

$$= 1 + 3 + \dots + (2p-1) + (2p+1) = p^2 + 2p + 1$$

$$HL_{p+1} = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 \quad \text{Vi sätter in } n = p + 1 \text{ direkt i HL}$$

Alltså gäller $VL = HL$ även för $n = p + 1$, om det gäller för $n = p$. Tillsammans med att vi visat att likheten gäller för $n = 1$, så kan vi därför dra slutsatsen att likheten gäller för alla $n \geq 1$, v.s.v.

**Exempel:**

Visa med hjälp av induktion att summan

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$$

kan beräknas med uttrycket $2^{n+1} - 1$ för $n \geq 0$.

Lösning:

Induktionsbas:

För $n = 0$ gäller $VL = 1$ och $HL = 2^{0+1} - 1 = 1$, så $VL = HL$.

Induktionsantagande:

Vi antar att uttrycket är sant för något visst $n = p$, dvs. att

$$VL_p = 1 + 2 + \dots + 2^p = 2^{p+1} - 1 = HL_p$$

Induktionssteg:

För $n = p + 1$ gäller då

$$VL_{p+1} = 1 + 2 + \dots + 2^p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1} = 2 \cdot 2^{p+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$$

$$1 + 2 + \dots + 2^p = 2^{p+1} - 1 \text{ enligt induktionsantagandet.}$$

$$HL_{p+1} = 2^{(p+1)+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$$

Sätter in $n = p + 1$ i uttrycket $2^{n+1} - 1$

Så om $VL_p = HL_p$, gäller också $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Tillsammans med att vi visat att $VL = HL$ för $n = 0$ innebär det att påståendet är sant för alla värden på $n \geq 0$.

NIVÅ 1

1236 Likheten $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = 2n + n^2$ gäller för alla värden av $n \geq 1$.

a) Visa att likheten gäller för $n = 1$.

b) Visa att

$$3 + 5 + 7 + \dots + (2p + 1) + (2(p + 1) + 1) = 2(p + 1) + (p + 1)^2$$

om man antar att

$$3 + 5 + 7 + \dots + (2p + 1) = 2p + p^2.$$

c) Förklara vad du har bevisat i a) och b).

1237 Visa med hjälp av induktion att $7 + 11 + 15 + \dots + (7 + 4(n - 1)) = 2n^2 + 5n$ för alla heltal $n \geq 1$.

1238 Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{m=1}^n (3m + 2) = \frac{7n + 3n^2}{2}$$

NIVÅ 2

1239 Summan av de n första positiva udda talen är 1 för $n = 1$

$$1 + 3 = 4 \text{ för } n = 2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 \text{ för } n = 3, \text{ osv.}$$

a) Konstruera en formel för att beräkna summan $s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + a_n$ där a_n är det n :te udda talet. Ledning: Testa att beräkna fler summor, t.ex. för $n = 4, 5, 6$.

b) Hur kan talet a_n skrivas med hjälp av n ?

c) Genomför ett induktionsbevis som bevisar att din formel gäller för alla värden på n .

d) Det går också att visa formelns giltighet med hjälp av formeln för en aritmetisk summa. Gör det och jämför därefter med ditt induktionsbevis.

1240 Visa med hjälp av induktion att

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

för alla positiva heltal n .

1241 Visa med hjälp av ett induktionsbevis att formeln

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$$

för att beräkna en geometrisk summa är korrekt. Du kan använda följande steg som hjälp för ditt bevis:

Induktionsbas: Visa att formeln stämmer för $n = 1$, dvs. visa att $s_1 = a_1$ som ju är den geometriska summan bestående av 1 term.

Induktionsantagande: Anta att formeln stämmer för ett visst n , säg $n = p$, dvs. anta att $VL_p = HL_p$.

Visa att om formeln stämmer för $n = p$, så stämmer den också för $n = p + 1$. Det gör du genom att visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ där

$VL_{p+1} = a_1k \dots + a_1k^{p-1} + a_1k^p$ och där du använder induktionsantagandet för att skriva om de p första termerna.

I HL_{p+1} sätter du direkt in $p + 1$ i formeln.

Förenkla och visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$.

Motivera varför detta bevisar att formeln är sann för alla n .

1242 Mikael genomför ett induktionsbevis genom att först visa att påståendet är sant för $n = 1$. Sedan antar han att påståendet är sant för $n = k + 1$ och visar att det medför att påståendet också är sant för $n = k + 2$. Slutligen drar han slutsatsen att påståendet är sant för alla n . Har Mikael rätt? Motivera ditt svar.

1243 Visa med hjälp av induktion att för alla heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

1244 Visa att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

NIVÅ 3

1245 Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot 2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

1246 Visa med hjälp av induktion att antalet diagonaler d_n i en regelbunden n -hörning är

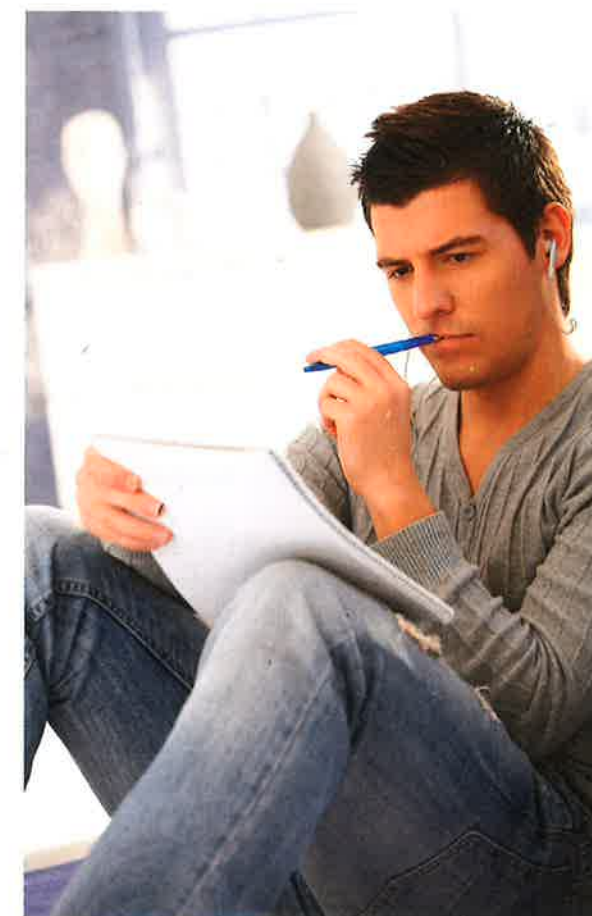
$$d_n = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Antag att formeln gäller för en p -hörning. Vad händer om du lägger till ett hörn?

1247 Visa att

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n - 1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

för de värden på x där nämnaren i HL är definierad.



Att visa olikheter och delbarhet med induktion

I föregående avsnitt använde vi induktionsbevis för att visa hur olika summor direkt kunde beräknas med hjälp av formler. Men med hjälp av induktion kan man också bevisa olikheter eller påståenden om delbarhet.

Säg att vi med hjälp av induktion vill bevisa en olikhet och att vi med hjälp av induktionsantagandet har kommit fram till att vi behöver bevisa att $n^2 + 10 \geq 6n$ för alla n . I det här fallet, och i många liknande fall, är det enklare att först skriva om uttrycket och i stället bevisa att

$$n^2 - 6n + 10 \geq 0$$

Den här olikheten är bevisad om VL går att skriva som en kvadrat, eftersom en kvadrat aldrig kan vara negativ.

$$VL = n^2 - 6n + 10 = n^2 - 6n + 9 + 1 = (n - 3)^2 + 1 > (n - 3)^2 \geq 0 = HL$$

$$(n - 3)^2 \geq 0$$

När vi skrivit om delar av VL som en kvadrat, kan vi dra slutsatsen att $VL \geq 1$ eftersom kvadrattermen som minst är noll. Därmed gäller även att $VL \geq 0$ och påståendet är bevisat.

Exempel: Visa att $3|(n^3 + 3n^2 + 2n + 3)$ för alla $n \geq 0$.

Lösning: Vi sätter in $n = 0$ och beräknar uttryckets värde. Det ger resultatet 3 och eftersom $3|3$, så är påståendet sant för $n = 0$.

Nu antar vi att påståendet är sant för ett visst värde av n , säg $n = p$, dvs. vi antar att $3|(p^3 + 3p^2 + 2p + 3)$.

Vi undersöker uttrycket för $n = p + 1$.

$$\begin{aligned} (p + 1)^3 + 3(p + 1)^2 + 2(p + 1) + 3 &= \\ &= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + 3p^2 + 6p + 3 + 2p + 2 + 3 \end{aligned}$$

Vi skriver om uttrycket så att en del av det är identiskt med uttrycket i induktionsantagandet

$$\begin{aligned} p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + 3p^2 + 6p + 3 + 2p + 2 + 3 &= \\ &= (p^3 + 3p^2 + 2p + 3) + (3p^2 + 9p + 6) \end{aligned}$$

Induktionsantagandet säger att 3 delar den första termen och eftersom den andra termen kan skrivas $3(p^2 + 3p + 2)$, så delar 3 även den andra termen. Därmed gäller att 3 delar hela uttrycket.

Det resonemang vi har fört gör att vi kan dra slutsatsen att påståendet är sant för alla $n \geq 0$, v.s.v.

Exempel: Visa med hjälp av induktion att $2^n > n^2$ för alla $n > 4$.

Lösning: Vi inleder med att visa att olikheten gäller för $n = 5$.

$VL = 2^5 = 32$; $HL = 5^2 = 25$ och eftersom $32 > 25$, så är påståendet alltså sant för $n = 5$.

Nu antar vi att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = p$, dvs. att $2^p > p^2$.

Sedan undersöker vi vad som gäller för $n = p + 1$.

Vi ska alltså visa att $VL_{p+1} > HL_{p+1}$. Det är ofta enklare att visa att $VL_{p+1} - HL_{p+1} > 0$. Vi ställer därför upp uttrycket $VL_{p+1} - HL_{p+1}$ och förenklar sedan.

$$VL_{p+1} - HL_{p+1} = 2^{p+1} - (p + 1)^2 = 2^{p+1} - (p^2 + 2p + 1) = 2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1$$

Nu använder vi induktionsantagandet $2^p > p^2$ och skriver om första termen:

$$2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1 > 2p^2 - p^2 - 2p - 1 = p^2 - 2p - 1$$

$$\text{Om } 2^p > p^2, \text{ så måste } 2 \cdot 2^p - p^2 - 2p - 1 > 2p^2 - p^2 - 2p - 1$$

Det sista uttrycket, $p^2 - 2p - 1$, är alltså mindre än $VL_{p+1} - HL_{p+1}$ och om det ändå är positivt, så måste förstås $VL_{p+1} - HL_{p+1} > 0$ också gälla.

Vi fortsätter att skriva om och tar hjälp av kvadratkomplettering

$$p^2 - 2p - 1 = p^2 - 2p + 1 - 2 = (p - 1)^2 - 2$$

Eftersom $p > 4$, så måste $(p - 1)^2 - 2 > (4 - 1)^2 - 2 = 7 > 0$ och därmed gäller alltså även $VL_{p+1} - HL_{p+1} > 0$

Vi har visat att påståendet är sant för $n = 5$ och för två på varandra följande heltal större än 4. Påståendet är därmed sant för alla $n > 4$.

NIVÅ 1

1248 För alla heltal $n > 0$ gäller att $n^3 + 2n$ är delbart med 3.

- Visa att påståendet är sant för $n = 1$.
- Visa att $(p + 1)^3 + 2(p + 1)$ är delbart med 3 om $p^3 + 2p$ också är delbart med 3.
- Förklara vad du har visat i a) och b).

1249 Moa har fått i uppgift att visa olikheten $m^2 > 4m - 4$ för alla reella tal $m > 2$. "Den här uppgiften kan jag lösa med induktion", tänker Moa.

- Moas påstående stämmer inte. Förklara för Moa varför hon inte kan lösa den här uppgiften med induktion.
- Visa olikheten genom att skriva om den på formen $VL - HL > 0$.

- 1250** William har fått i uppgift att med hjälp av induktion visa att $3^n \geq 2n + 1$ för alla heltal $n \geq 0$. Läs noga igenom hans lösning nedan och försök att på de markerade ställena förklara varför likheterna/olikheterna före markeringarna gäller.

Vill visa att $3^n \geq 2n + 1$ för alla heltal $n \geq 0$.

Induktionsbas: $n = 0$ ger $VL = 3^0 = 1$ och $HL = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, alltså är $VL \geq HL$ för $n = 0$

Induktionsantagande: Antar att påståendet är sant för $n = p$, dvs. antar att $3^p \geq 2p + 1$.

Induktionssteg: Vill visa att detta medför att påståendet är sant också för nästkommande tal, dvs. för $n = p + 1$.

$$VL = 3^{p+1} = 3 \cdot 3^p \quad \text{a)}$$

$$HL = 2(p+1) + 1$$

$$VL \geq HL \Leftrightarrow VL - HL \geq 0$$

$$VL - HL = 3 \cdot 3^p - (2(p+1) + 1) = \quad \text{b)}$$

$$= 3^p + 3^p + 3^p - (2p + 2 + 1) =$$

$$= 3^p + 3^p + 3^p - (2p + 1) - 2 \geq \quad \text{c)}$$

$$\geq 3^p + 3^p - 2 \geq \quad \text{d)}$$

$$\geq 3^0 + 3^0 - 2 = 0$$

Alltså är $VL - HL \geq 0$ och därmed $VL \geq HL$ även för $n = p + 1$.

Tillsammans med att påståendet är sant för $n = 0$ ger detta att $3^n \geq 2n + 1$ för alla heltal $n \geq 0$.

- 1251** Visa med hjälp av induktion att för heltal $n \geq 0$ gäller att $3|(n^3 - n)$.

- 1252** Visa att för alla heltal $n \geq 0$ gäller att $6|n(2n+1)(7n+1)$.

- 1253** Visa med hjälp av induktion att $2^n > 4n$ för alla heltal $n \geq N$ för ett visst värde på N .

- Bestäm ett värde på N samt visa att olikheten gäller för detta värde på N .
- Hur ser olikheten ut för $n = p$? Formulera induktionsantagandet.
- Du ska nu visa att påståendet är sant också för $n = p + 1$. Du ska alltså visa att $2^{p+1} > 4(p+1)$ under förutsättning att påståendet är sant för $n = p$. Tips: Skriv om olikheten du ska visa som $2^{p+1} - 4(p+1) > 0$ och utnyttja induktionsantagandet.
- Förklara vilken slutsats du kan dra när du genomfört a)–c).

NIVÅ 3

- 1254** Visa med hjälp av induktion att $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ för positiva heltal n .

- 1255** Visa att för $n > 0$ gäller att
- $3|2^{2n-1} + 1$
 - $5|2^{4n-2} + 1$

Kryptiska meddelanden

Agenterna Alfrida och Bertil vill skicka kodade meddelanden till varandra. De har en krypteringsmetod, men den bygger på att båda känner till nyckeln, som är ett tal. De är långt från varandra och vågar så klart inte meddela nyckeln via telefon eller annat vanligt kommunikationsmedel. Men de vet ett sätt att meddela den öppet.

Först bestämmer de två positiva heltal m och n och det kan göras helt öppet. De väljer $m = 3$ och $n = 5$. Talen kan nästan väljas hur som helst, bara $m < n$, men ju större talen är desto svårare är det att gissa nyckeltalet. Sen väljer de var sitt naturligt tal, som de håller hemligt. Alfrida väljer $a = 10$ och Bertil väljer $b = 15$. Alfrida bestämmer nu $m^a \pmod{n}$ och Bertil bestämmer $m^b \pmod{n}$. Det ger $3^{10} = 59\,049 \equiv 4 \pmod{5}$ för Alfrida, som sätter $A = 4$ och skickar talet till Bertil. På samma sätt beräknar Bertil $3^{15} = 14\,348\,907 \equiv 2 \pmod{5}$ och skickar $B = 2$ till Alfrida. Att skicka A och B till varandra görs också helt öppet.

Alfrida tar nu sitt hemliga tal a och kombinerar det med talet B , som hon fått från Bertil och beräknar $B^a \pmod{n}$. Hon får då $2^{10} = 1\,024 \equiv 4 \pmod{5}$. Bertil beräknar $A^b \pmod{n}$ och får $4^{15} = 4^{14} \cdot 4 = (4^2)^7 \cdot 4 \equiv 1^7 \cdot 4 = 4 \pmod{5}$. På så sätt har de båda räknat fram nyckeltalet 4, utan att någon annan kan göra det.

- Vilket tal $A \equiv m^a \pmod{n}$ skickar Alfrida till Bertil, om hon i stället väljer $a = 11$?
- Vilket blir nyckeltalet om Alfrida har valt $a = 11$ och hon får $B = 2$ från Bertil?
- Visa att Bertil får samma nyckeltal, när han utgår från Alfridas tal A och sitt eget tal $b = 15$.
- Vilka tänkbara nyckeltal finns när vi valt $m = 3$ och $n = 5$?
- Välj nu $m = 7$ och $n = 13$. Visa att Alfrida och Bertil får samma nyckeltal, om Alfrida väljer $a = 6$ och Bertil väljer $b = 15$.



- Välj två egna värden på m och n och visa därefter ett exempel på att de båda agenterna kan räkna fram samma nyckeltal.

Varför fungerar då denna metod? Den bygger på att de hemliga talen a och b , som behövs för att beräkna nyckeltalet, inte kan spåras med hjälp av talen A och B som skickas öppet. Trots att även m och n är öppna så finns det för många möjligheter för att gissa a och b . När $n = 5$ finns i och för sig väldigt få tänkbara nyckeltal, och därför låter man n vara ett mycket större tal i ett verkligt läge. Men hur kommer det sig att man på det här sättet får samma nyckeltal?

Som förut så har Alfrida och Bertil kommit överens om m och n . Alfrida väljer sitt a och beräknar $A \equiv m^a \pmod{n}$. Bertil beräknar $B \equiv m^b \pmod{n}$. Säg nu att $b > a$, då kan vi skriva $b = a + c$ för något naturligt tal c . Om vi låter $C \equiv m^c \pmod{n}$, så gäller att $B = m^{a+c} + kn = m^a \cdot m^c + kn \equiv AC \pmod{n}$, för något heltal k .

- Motivera varför det gäller att $B \equiv AC \pmod{n}$.

Av kongruenserna följer att $A = m^a + pn$ och $C = m^c + qn$, där p och q är heltal. Nyckeltalet beräknas av Alfrida, $B^a \equiv (AC)^a = A^a \cdot C^a \equiv X \pmod{n}$ och av Bertil, $A^b = A^{a+c} = A^a \cdot A^c \equiv Y \pmod{n}$. För att visa att $X = Y$, så behöver vi nu bara visa att $C^a \equiv A^c \pmod{n}$.

- Visa att $C^a \equiv A^c \pmod{n}$. Ledning: Utnyttja att $A = m^a + pn$ och $C = m^c + qn$ och utveckla potenserna C^a och A^c .

Resonemang och begrepp

- Vad innebär induktionsbasen, när man gör ett induktionsbevis? Vilken del motsvarar det, om man jämför ett induktionsbevis med att vända dominobrickor?
- Hur kommer det sig att en summa med ett oändligt antal termer ändå kan ha ett ändligt gränsvärde?
- Hur kan man visa att en sluten formel beskriver samma talföljd som en rekursiv formel?
- Vilka är de viktigaste stegen i ett induktionsbevis?
- Varför gör man ett induktionsantagande?



Julius Caesar använde redan på 100-talet f.Kr. den typ av chiffer som i dag bär hans namn.

Mer om kryptering

Caesarkrypto

I Matematik Origo 1 finns ett avsnitt om kryptering, där det beskrivs hur man kan koda meddelanden med hjälp av ett *Caesarkrypto*. Det innebär att varje bokstav byts ut mot en annan genom att man helt enkelt förskjuter alfabetet ett visst antal steg. Säg att man kommit överens om att förskjuta det elva steg. Den undre raden visar då vilken bokstav som ersätter den riktiga i det kodade meddelandet.

Klartext	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
Kod	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å

Klartext	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	å	ä	ö
Kod	Ä	Ö	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

Ordet ”matte” kommer då att krypteras som XLBBP. För att dekryptera ett meddelande går man förstås bakvägen. Det krypterade ordet ZÖTRZ betyder alltså ”origo”.

Det har visat sig att det inte är särskilt svårt för obehöriga att knäcka nyckeln till ett Caesarkrypto, åtminstone inte för lite längre texter. Man vet nämligen med vilken frekvens, dvs. hur ofta, varje bokstav förekommer i olika språk. Om man gör en frekvensanalys av bokstäverna i det krypterade meddelandet, så kan man relativt enkelt lista ut vilka de riktiga bokstäverna är.

Vigenèrekrypto

Ett sätt att stärka Caesarkryptot är att använda sig av flera olika förskjutningar, ett så kallat *Vigenèrekrypto*. Under raden med alfabetet för klartext skriver man upp ytterligare 29 rader med alfabet, som börjar på olika bokstäver. Rad 1 börjar ABC, rad 2 börjar BCD, rad 3 börjar CDE etc. Sen bestämmer man ett nyckelord, som talar om vilka rader som ska användas vid krypteringen. Om nyckelordet är ELDA, så används helt enkelt i turordning raderna som börjar på E, L, D och A.

Den första bokstaven krypteras nu enligt raden som börjar på E, den andra enligt raden som börjar på L osv. Den femte bokstaven blir åter krypterad av raden med start på E. På det här viset kommer samma bokstav att svara mot fyra olika krypterade bokstäver beroende på var i texten bokstaven kommer. En frekvensanalys blir därmed meningslös och kryptot blir svårare att forcera.

Till slut lyckades den engelske matematikern Charles Babbage forcera Vigenèrekryptot genom att utnyttja att vissa bokstavskombinationer förekom med jämna mellanrum. Om nyckelordet är ELDA, så har ordet ”det” de fyra varianterna HPW, OHT, GEX, DIB. Eftersom ”det” är så

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö	
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö		
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö			
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö				
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö					
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö						
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö							
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö								
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö									
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö										
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö											
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö												
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö													
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö														
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö															
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																	
S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																		
T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																			
U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																				
V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																					
W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö																						
X	Y	Z	Å	Ä	Ö																							
Y	Z	Å	Ä	Ö																								
Z	Å	Ä	Ö																									
Å	Ä	Ö																										
Ä	Ö																											
Ö																												

Raden som börjar på A är inte förskjuten alls, men att just den raden används vet förstås inte eventuella tjuvläsare.

En utomstående känner förstås inte till att det är fyra bokstäver i det valda nyckelordet.

vanligt förekommande, så kommer det förmodligen att dyka upp flera gånger i samma skepnad. Genom att bestämma med vilka mellanrum denna repetition kommer, kan kodknäckaren lista ut längden på nyckelordet.

Om t.ex. kombinationen GEX förekommer med start på bokstav 3, 15, 31, 43, 63 och 103 i ett meddelande, så ser vi att det är med intervall på 12, 16, 12, 20 respektive 40 steg. Alla dessa tal bör vara delbara med antalet bokstäver i nyckelordet och det stämmer in på 1, 2 och 4. Ett nyckelord på en bokstav är meningslöst för då blir det bara ett vanligt Caesarkrypto och även två bokstäver är i minsta laget. Därför är det ett rimligt antagande att nyckelordet har fyra bokstäver.

Sedan kan man gå vidare med att fundera över vilket ord bokstäverna GEX faktiskt står för. Det är troligt att det är ett av våra vanligare ord och genom att systematiskt pröva sig fram kan man förhoppningsvis finna nyckelordet och därmed forcera kryptot.

Kryptering med stora primtal

Ett problem med att skicka kodade meddelanden är att både sändaren och mottagaren måste ha tillgång till nyckeln till krypteringen. Ett personligt överlämnande innebär kanske praktiska svårigheter och kurirer utgör alltid en risk. Därför är det en stor fördel om man på något vis kan skicka nyckeln öppet.

Ett modernt sätt att utbyta nycklar är att öppet förmedla en produkt av två primtal. Att beräkna produkten av primtalen 641 och 1 327 är en enkel sak. Det tar några sekunder med räknare och inte mycket längre tid för hand. Men om vi vill gå bakvägen och primtalsfaktorisera produkten 850 607, så måste vi pröva oss fram tills vi finner ett primtal som 850 607 är delbart med. Faktorerna måste i och för sig vara mindre än $\sqrt{850\,607} \approx 922$, men det blir ändå många tal att testa. Om primtalsfaktorerna är oerhört stora, så blir detta ett i praktiken omöjligt arbete. Väljer vi två primtal med flera hundra siffror så tar det förstås en stund att beräkna produkten, men det är omöjligt att ens med datorhjälp gå baklänges och finna faktorerna om man inte har en fruktansvärd tur.

För att nu skicka krypterade meddelanden så beräknar mottagaren produkten av två gigantiska primtal och skickar talet öppet till avsändaren, som krypterar med hjälp av detta tal enligt ett visst system. För att dekryptera meddelanden duger det emellertid inte med produkten, utan då måste man känna till faktorerna. Avsändaren kan alltså inte dekryptera sitt eget meddelande och det kan ingen annan heller, som inte känner till de båda primtalsfaktorerna. Men det gör mottagaren, som ju var den som beräknade produkten och dekrypteringen är därför möjlig för den som verkligen skulle ha meddelandet. Den här formen av kryptering kallas *RSA-kryptering* efter konstruktörerna Ronald L. Rivest, Adi Shamir och Leonard M. Adleman.

? Vad står i meddelandet KUHRDÄX-EFILFNNWBKWDORM-TÖDJNBGXXLUVQ, som krypterats med Vigenèrekrypto om nyckelordet är AGENT?

? Talet 618 517 är en produkt av två primtal. Undersök hur lång tid det tar för dig att lista ut vilka de två primtalsfaktorerna är.

DE TUSEN DÖRRARNAS PROBLEM

Tänk dig att det finns 1 000 stängda dörrar i en lång korridor. Du ska nu öppna och stänga dörrarna enligt ett visst mönster. Inled med att öppna samtliga dörrar. Sen stänger du varannan dörr, med start på dörr 2. Därefter ändrar du läget på var tredje dörr med start på dörr 3, dvs. du stänger öppna dörrar och öppnar stängda dörrar av dem som berörs. Sen ändras läget på var fjärde dörr, var femte dörr, etc. Slutligen öppnar eller stänger du dörr 1 000. En del dörrar kommer då att vara öppna och andra kommer att vara stängda.

- Dörr 1 har du bara ändrat läge på en gång. Är det någon annan dörr som du bara rört en gång?
- Vilka dörrar kommer att vara öppna efter att alla öppningar och stängningar har genomförts? Förklara!
- Vilka dörrar har du ändrat läge på exakt två gånger, dvs. öppnat en gång och sen stängt för att därefter aldrig mer röra?
- Kommer dörr 1 000 att vara öppen eller stängd?
- Vilken dörr har du ändrat läge på flest gånger?

ARITMETIKENS FUNDAMENTALSATS

Aritmetikens fundamentalsats säger bland annat att primtalsfaktoriseringen av ett sammansatt tal är unik, bortsett från ordningen mellan faktorerna. Faktoriseringen innehåller alltså alltid samma primtalsfaktorer. Vi ska titta på ett bevis för den delen av satsen.

Anta att det finns två olika primtalsfaktoriseringar av ett tal a , så att $a = p_1 p_2 \dots p_m = q_1 q_2 \dots q_n$, för något värde på m och n , där alla p_i och q_j är primtal som inte nödvändigtvis är olika.

Nu gäller förstås att $p_i | a$ för alla $i = 1, 2, \dots, m$ och $q_j | a$ för alla $j = 1, 2, \dots, n$.

Vi dividerar båda faktoriseringarna med p_m , vilket ger $p_1 p_2 \dots p_{m-1} = \frac{q_1 q_2 \dots q_n}{p_m}$

- Eftersom VL är ett heltal, så måste även HL vara ett heltal. Alltså gäller $p_m | q_1 q_2 \dots q_n$. Varför kan man dra den slutsatsen?
- Men nu måste gälla att $p_m = q_j$ för något $j = 1, 2, \dots, n$. Varför gäller det?
- Vi kan anta att $p_m = q_n$ (eventuellt efter att ha omnummererat faktorerna i HL). Alltså gäller $p_1 p_2 \dots p_{m-1} = q_1 q_2 \dots q_{n-1}$. Vi kan nu fortsätta samma resonemang stegvis fram till antingen VL = 1 eller HL = 1. Hur för man det resonemanget?
- Säg att resonemanget leder fram till att VL = 1. Då gäller alltså $1 = q_1 q_2 \dots q_{n-m}$. Vad måste nu gälla för HL?
- Vad kan vi dra för slutsats?

Talteori



Delbarhet

- kvot och rest
- $b|a$ om $\frac{a}{b}$ är ett heltal
- delbarhetsregler
- primtalsfaktorisering
- aritmetikens fundamentalsats

Induktionsbevis

- används för att visa att ett påstående är sant för alla heltal n där $n \geq a$
- induktionsbas, $n = a$
- induktionsantagande, antar att påståendet är sant för $n = p$
- induktionssteget, visar att påståendet då också är sant för $n = p + 1$
- slutsats: eftersom påståendet är sant för $n = a$ och för två på varandra följande tal, så är det sant för alla $n \geq a$
- dominobrickor som välter

Kongruensräkning

- division med rest
- regelbundet återkommande restvärden
- att a och b har samma rest vid division med n skrivs $a \equiv b \pmod{n}$
- Om $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$ gäller
 - $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
 - $ac \equiv bd \pmod{n}$
 - $a^p \equiv b^p \pmod{n}$, p är ett positivt heltal

Talföljder och summor

- rekursiva och slutna formler
- aritmetiska talföljder, $a_n = a_1 + d(n-1)$
- geometriska talföljder, $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
- summatecknet Σ
- aritmetiska summor, $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
- geometriska summor, $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$, $k \neq 1$

B

NIVÅ 1

1 Primtalsfaktorisera talen

- a) 55 b) 44
c) 84 d) 54

2 Genomför divisionerna och ange resultaten med kvot och rest

- a) $\frac{17}{5}$ b) $\frac{28}{7}$
c) $\frac{85}{9}$ d) $\frac{20}{52}$

3 Ange de positiva delarna till talen

- a) 15 b) 20
c) 49 d) 64

4 Ange två olika tal som är kongruenta med 13 modulo 7.

5 Teckna summorna utan att använda summatecken.

- a) $\sum_{k=1}^5 (3k+2)$ b) $\sum_{k=1}^6 3 \cdot 2^k$
c) $\sum_{k=0}^4 \frac{2}{2^k}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

6 I en aritmetisk talföljd är det första elementet $a_1 = 17$ och det sista elementet $a_n = 89$. Ge två förslag på hur talföljden kan se ut om $3 \leq n \leq 10$.

7 Förklara med hjälp av kongruens varför ett år innehåller ett jämnt antal veckor plus en dag, om det inte är ett skottår.

8 Tänk dig att klockan är 14.00. Vad är klockan om 110 timmar?

- 9 a) Vilket är det minsta tal som består av tre olika primtalsfaktorer?
b) Vilket är det minsta tal som består av tre primtalsfaktorer, som inte nödvändigtvis är olika?

10 På en släktträff möts Ada, Boa, Cia, Daga och Elvis. Det visar sig att deras åldrar bildar en geometrisk talföljd med stigande ålder enligt bokstavsordningen på deras namn. Ada är 16 år och Elvis är 81 år. Hur gamla är Boa, Cia och Daga?

11 Utgå från de två talen 66 och 57 och bestäm med hjälp av räkneregler för kongruenser det minsta naturliga tal som

- a) summan av talen är kongruent med modulo 3
b) differensen av talen är kongruent med modulo 6
c) produkten av talen är kongruent med modulo 5

12 Här ser du de första elementen i en geometrisk talföljd: 32, 16, 8, 4, ...

- a) Förklara varför talföljden är geometrisk.
b) Bestäm det nionde elementet i talföljden.
c) Bestäm summan av de 15 första elementen i talföljden.

13 Michael säger att man med induktion kan visa att $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$ för alla $n \geq 1$.

- a) Genomför beviset som Michael föreslår.
b) Ari säger att han har ett annat sätt att visa att formeln stämmer. Finn ett sätt att visa att formeln stämmer, som inte är ett induktionsbevis.

NIVÅ 2

14 Beräkna summorna

- a) $8 + 5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \dots - 49$
b) $-1 + 4 - 16 + 64 - 256 + 1\,024 - \dots - 65\,536$

15 Hur kan du snabbt avgöra att 3 819 564 är delbart med 36, utan att utföra divisionen?

16 Bestäm resten då 23^{24} divideras med 7.

17 Ange en sluten formel för det n :te elementet i talföljden 106, 10 006, 1 000 006, ...



18 Sofi säger att hon kan dra slutsatsen att 6 637 698 är delbart med 18, eftersom det är delbart med både 2 och 9. Laban säger att då bör ju 43 065 804 vara delbart med 24, eftersom det är delbart med både 4 och 6.

- a) Hur kan du snabbt kontrollera att 6 637 698 är delbart med 2 och 9, även om du inte använder miniräknare?
b) Varför ger resultatet i a) att talet faktiskt är delbart med 18?
c) Visa att 43 065 804 är delbart med 4 och 6, utan att använda räknare eller genomföra någon division.
d) Labans resonemang är felaktigt. Varför följer inte delbarhet med 24 av resultatet i c)?

19 Resultatet av en division mellan två heltal a och b ($b \neq 0$) kan uttryckas med hjälp av kvot och rest.

- a) Förklara varför vi alltid kan finna en rest $r \geq 0$ som är mindre än nämnaren då a och b är positiva tal.
b) Undersök om samma sak gäller då de båda talen a och b är negativa.
c) En vanlig definition av principal rest är att det är den rest r som uppfyller olikheten $0 \leq r < |b|$, där b är nämnaren vid divisionen. Bestäm med hjälp av denna definition den principala resten då -35 divideras med -6 och då -43 divideras med -8 .

20 Tyra fyller år 1 januari. Vid varje födelsedag, från det att Tyra fyllde 1 år till och med att hon fyllde 15, har hennes gudmor satt in 500 kronor på ett bankkonto med 1,25 % ränta. Efter Tyras femtonårsdag har pengarna fått stå orörda på kontot. Hur mycket pengar finns på kontot då Tyra fyller 18 år? Anta att räntan betalas ut 31 december varje år.

21 Bestäm det minsta naturliga tal u som uppfyller att

- a) $4^{82} + 109 \cdot 3\,032 \equiv u \pmod{5}$
b) $u^3 \equiv -6 \pmod{7}$

22 Anta att du har en liksidig triangel där varje sida har längden 1 l.e. Om du från varje sida tar bort den mittersta tredjedelen och ersätter denna med en liksidig triangel, så skapas den stjärnformade figuren i Figur 2 här nedanför. Tar du bort den mittersta tredjedelen av varje rakt linjesegment i Figur 2 och ersätter med två sidor i en liksidig triangel, så får du Figur 3. Gör du likadant ytterligare en gång, så får du Figur 4. Den figur som skapas på detta sätt brukar kallas för von Kochs snöflinga efter den svenske matematikern Helge von Koch.

- a) Den första figuren har tre sidor. Hur många sidor har Figur 2?
b) Bestäm ett uttryck för snöflingans omkrets i Figur n .



Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

- 23 Kattungen Pepsi äter under en period av sitt liv varje dag $1/15$ av sin vikt, förutom att han dricker vatten. På grund av bus och annat, så ökar Pepsi varje dag i vikt med endast $1/3$ av den vikt han äter. Hur många dagar tar det för Pepsi att fördubbla sin vikt?



- 24 Ett sätt att finna primtal är att använda något som kallas *Eratosthenes såll*. Man skriver då upp alla heltal från 2 och uppåt, så långt som man vill finna primtal. Man börjar med att markera det lägsta talet som är ett primtal, dvs. 2. Sen stryker man alla andra tal som är delbara med 2, dvs. vartannat tal förutom 2 självt. Inget av dessa är ju primtal, eftersom de innehåller faktorn 2. När man är klar markerar man 3 som primtal och stryker därefter vart tredje tal, alltså alla andra tal som är delbara med 3. En del av dessa är förstås redan strukna. Talet 4 är också redan struket, eftersom det är delbart med 2. Nästa primtal är 5 och man stryker sedan alla andra tal delbara med 5, osv. På det viset sällar man bort de tal som inte är primtal, vilket anknyter till namnet.
- Använd metoden med Eratosthenes såll för att finna alla primtal upp till och med 100.
 - När du konstaterat att 3 är ett primtal och ska stryka vart tredje tal, är vissa tal redan strukna. Vilka tal är det som redan har strukits?
 - Hur många omgångar av strykningar behöver du göra, dvs. för vilka primtal finns det fortfarande tal kvar att stryka? Räkna med även de primtal som nämnts ovan.

- 25 Visa att $\sum_{m=0}^{n-1} 4^m = \frac{4^n - 1}{3}$ för $n \geq 1$
- med ett induktionsbevis
 - med formeln för geometrisk summa
- 26 Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för $n \geq 1$

NIVÅ 3

- 27 Lös ekvationen $x + 1,24 \cdot x + 1,24^2 \cdot x + 1,24^3 \cdot x + \dots + 1,24^{12} \cdot x = 4\,500$
- 28 Visa att om $3 \mid a - 1$ så kommer $9 \mid a^3 - 1$
- 29 Visa att $2^{4n} - 1$ är delbart med 5 för alla heltal $n \geq 1$.
- med hjälp av ett induktionsbevis
 - med hjälp av kongruensräkning
- 30 Visa med hjälp av induktion att $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 < n^3$ för alla $n \geq 2$.
- 31 För ett tal $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, där $p_1, \dots, p_n$ är primtal och $k_1, \dots, k_n$ är positiva heltal, gäller att antalet positiva delare är $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$. Eftersom $12 = 2^2 \cdot 3$, så ger formeln att 12 har $(2 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$ delare.
- Vilka är delarna till 12?
 - Primfaktorisera talet 14.
 - Hur många delare har 14?
 - Hur många delare har talet 72?
 - Motivera varför formeln ger antalet delare till ett tal.
- 32 I en geometrisk talföljd är både a_1 och a_i heltal och kvoten k är ett rationellt tal.
- Visa att $a_2, \dots, a_{i-1}$ också måste vara heltal med de förutsättningar som gäller.
 - Visa att a_j inte måste vara ett heltal, om $j > i$.
 - Visa att $a_2, \dots, a_{i-1}$ inte nödvändigtvis är heltal, om man släpper kravet att k ska vara rationellt.

Utan räknare

- Vilka tal är delare i
 - 18
 - 41
 - $621 = 3^3 \cdot 23$
- Vilka beräkningar behöver man utföra för att visa att 373 är ett primtal?
- Vilken är kvoten respektive (principala) resten när man utför divisionerna
 - $\frac{83}{10}$
 - $\frac{48}{7}$
- Ange tre olika tal x, y och z som uppfyller villkoret $x \equiv y \equiv z \pmod{14}$.
- Här nedanför ser du de fem första termerna i en aritmetisk talföljd 47, 42, 37, 32, 27, ...
 - Förklara hur man kan se att talföljden är aritmetisk.
 - Ange en rekursiv formel för det n :te talet i talföljden.
 - Ange en sluten formel för det n :te talet i talföljden.
 - Summan av de n första termerna i talföljden betecknas s_n . För vilket eller vilka värden på n gäller att $s_n < 0$?
- Vilka olika värden på n gör att $17 \equiv 11 \pmod{n}$?
- Teckna med hjälp av summatecknet Σ de summor som, med hjälp av formelerna för aritmetisk respektive geometrisk summa, kan beräknas med följande uttryck
 - $\frac{9(10 + 82)}{2}$
 - $\frac{2(1,04^{46} - 1)}{1,04 - 1}$
- Ersätt x med minsta möjliga naturliga tal.
 - $47 \cdot 33 \equiv x \pmod{9}$
 - $3^{101} \equiv x \pmod{7}$
- Ett kapital får under flera års tid stå orört på ett konto med fast räntesats. Om man kontrollerar det inestående beloppet på nyårsafton varje år, så kommer beloppen att bilda en geometrisk talföljd. Motivera varför!
- Visa med hjälp av induktion att
 - $\sum_{k=1}^n (3k + 1) = \frac{3n^2 + 5n}{2}$
 - $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \leq \frac{n^2}{n+1}$

