

2 Mängder, kombinatorik

DELKAPITEL

- 2.1. Mängdlära
- 2.2 Kombinatorik
- 2.3 Grafteori

FÖRKUNSKAPER

- Begrepp som naturliga tal, heltal, rationella tal och reella tal
- Elementära begrepp från sannolikhetsläran

CENTRALT INNEHÅLL

- Begreppet mängd, operationer på mängder, mängdlärans notationer och Venndiagram.
- Begreppen permutation och kombination.
- Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer samt motivering av metodernas giltighet.
- Begreppet graf, olika typer av grafer och dess egenskaper samt några kända grafteoretiska problem.
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

och grafer

I det här kapitlet får du bekanta dig med grundläggande begrepp inom mängdläran. De används ofta när man skriver matematisk text. Skrivsättet innebär stora fördelar och gör att mycket information ryms på liten plats.

Kapitlet innehåller också en introduktion i kombinatorik, den del av matematiken som besvarar frågor av typen "På hur många sätt ...?" Sist i kapitlet behandlas grundläggande begrepp i grafteori, som är en matematisk formalisering av strukturer som t.ex. spårvagnsnät eller molekyler. Med hjälp av grafteori kan man bl.a. finna den snabbaste vägen mellan ett antal orter.

När du är klar med kapitlet ska du kunna

- definiera och använda grundläggande begrepp och symboler inom mängdläran
- använda Venndiagram för att beskriva vilken eller vilka egenskaper olika objekt har i en universalmängd
- använda multiplikationsprincipen och beskriva den kartesiska produkten av två mängder
- använda Dirichlets laddprincip
- beräkna antalet permutationer och antalet kombinationer av elementen, eller en del av elementen, i en mängd
- använda binomialsatsen
- beskriva några grundläggande begrepp inom grafteorin

Ping pong

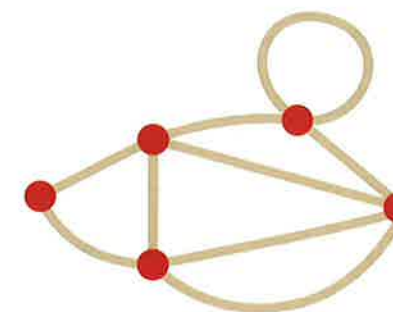
Stellan, Kjell, Janne, Mikael och Erik spelar rundpingis. I varje spelomgång går två spelare till final, där en segrare utses.

- Hur många möjliga varianter finns det på vem som vinner respektive kommer tvåa i en omgång?
- Hur många olika finalpar finns det?



Äventyr

Bilden visar en äventyrsbana, där olika aktiviteter sker längs med varje delsträcka.



- Visa att det är möjligt att gå runt hela äventyrsbanan, utan att gå någon delsträcka mer än en gång.

2.1 Mängdlära

Vad är en mängd?

Man beskriver ofta en mängd genom att ange mängdens element skrivna inom klamrar.

Om man samlar ett antal olika objekt, som till exempel husdjur

{hund, iller, katt, marsvin, minigris, undulat}

eller tal

{2, 4, 6, 8, 10}

så har man skapat en *mängd*. De föremål eller objekt som ingår i en mängd kallas för mängdens *element* och kan vara precis vilka objekt som helst, men det är vanligt att elementen är tal. Ofta har elementen i en mängd någon gemensam egenskap. Mängden

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

består av alla positiva heltal från och med 1 till och med 5. Mängden

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$

består av alla primtal som är mindre än 40. Både mängden A och mängden B har ett ändligt antal element, nämligen 5 respektive 12 stycken.

Redan i inledningen av kurs 1 tog vi bl.a. upp *mängden av naturliga tal* och *mängden av heltal*. De är båda exempel på mängder som har ett oändligt antal element. I de här fallen är det förstås omöjligt att beskriva mängderna genom att räkna upp alla element, men vi kan använda samma teknik som vi använde för att beskriva elementen i en talföljd och skriva

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

respektive

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Man kan också beskriva en mängd genom att tala om vilken eller vilka egenskaper elementen i mängden ska ha. Mängden

$C = \{n; 3|n\}$

består av alla tal n som har egenskapen att $3|n$. Om man vill beskriva den mängden genom att ange elementen, så skriver man i stället

$C = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

Tomma mängden, $\emptyset$

Två mängder A och B är lika om och endast om de innehåller exakt samma element. Vi skriver då $A = B$. En mängd som inte innehåller några element alls, kallas för den *tomma mängden* och betecknas $\emptyset$. Det gäller alltså att $\emptyset = \{\}$.

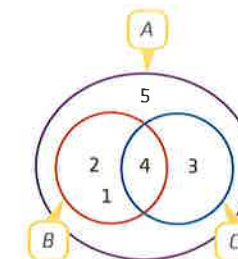
Delmängd, $\subseteq$

Varje mängd är en delmängd av sig själv, t.ex. är A en delmängd av A . Mängden B är en delmängd av A , men det finns element i A som inte finns i B . Man säger då att B är en *äkta delmängd* till A . Det kan skrivas $B \subset A$. På samma sätt är mängden C en äkta delmängd till A .

Tillhör, $\in$

Tillhör inte, $\notin$

Om $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{1, 2, 4\}$, så ingår varje element i B även i A . Man säger då att B är en *delmängd* av A och skriver det som $B \subseteq A$. Även $C = \{3, 4\}$ är delmängd till A , dvs. det gäller att $C \subseteq A$. Däremot är C inte en delmängd till B eftersom 3 inte ingår i B . Det skriver vi $C \not\subseteq B$. I figuren här intill har vi illustrerat relationerna mellan mängderna A , B och C . För den tomma mängden $\emptyset = \{\}$ gäller att den är en delmängd till alla mängder.



Ibland vill man visa att ett eller flera element tillhör en mängd. Det gör man med hjälp av symbolen $\in$. Om $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ så gäller t.ex. $2 \in A$. Om vi skriver $n \in \mathbf{Z}$, så menar vi helt enkelt att n tillhör mängden $\mathbf{Z}$, det vill säga att n är ett heltal.

På liknade sätt använder vi symbolen $\notin$ för att visa att ett element inte ingår i en mängd. Till exempel gäller att $6 \notin A$, eftersom 6 inte är ett element i mängden A .

Delmängd

För två mängder, A och B , gäller att B är delmängd till A om det för alla element x gäller att $x \in B \rightarrow x \in A$. Vi skriver $B \subseteq A$.

Man kanske kan tycka att det vi gett exempel på här är detaljer och onödig formalisering, men att kunna tala om mängder och ge dem ett namn, gör att det i många fall blir enklare att hantera matematiken i anslutning till dem. I stället för att varje gång behöva skriva "mängden av naturliga tal", så kan man helt enkelt bara skriva $\mathbf{N}$. Att på det här sättet kunna uttrycka sig kort och precist är en av matematikens stora fördelar.

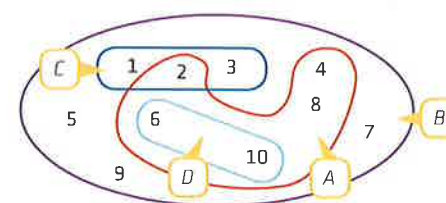
Exempel:

Beskriv vilka av mängderna som är en delmängd av någon av de andra mängderna.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$C = \{1, 2, 3\}$ $D = \{6, 10\}$

Lösning: Här kan det vara en fördel att rita mängderna.



Vi ser nu att $A \subseteq B$; $C \subseteq B$; $D \subseteq A$ och $D \subseteq B$.

Exempel: Ange alla delmängder av mängden $A = \{\text{blå, gul}\}$.

Lösning: Enligt definitionen ska samtliga element i delmängden också ingå i A . Vi ska alltså hitta alla möjliga mängder där varje element också ingår i A .

En mängd är alltid delmängd till sig själv

Det finns tre sådana mängder som innehåller något element, nämligen $\{\text{blå}\}$, $\{\text{gul}\}$ och $\{\text{blå, gul}\}$.

$\emptyset$ är delmängd till alla mängder

Dessutom uppfyller tomma mängden kraven för delmängd till A .

Svar: Det finns fyra delmängder: $\emptyset$, $\{\text{blå}\}$, $\{\text{gul}\}$ och $\{\text{blå, gul}\}$.

Exempel: Beskriv med en uppräkningslista vilka element som ingår i mängden $A = \{a; \sqrt{a} \in \mathbb{Z}\}$.

Lösning: A består av alla tal vars kvadratrots är ett heltal. Det är helt enkelt kvadrattalen som uppfyller detta, alltså talen $0^2, 1^2, 2^2, 3^2$ osv.

Svar: $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

Kan också skrivas t.ex. $A = \{a^2; a \in \mathbb{Z}\}$

NIVÅ 1

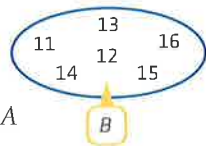
2101 Givet mängden $A = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska.

- a) $5 \in A$ b) $6,5 \in A$ c) $8 \notin A$

2102 Ange alla delmängder till $D = \{\text{katt, hund, kanariefågel}\}$.

2103 a) Vilka element ingår i mängden $A = \{n; n \in \mathbb{Z} \text{ och } |n| < 3\}$?

- b) Beskriv mängden B med hjälp av mängdsymboler på motsvarande sätt som mängden A beskrivs i a)-uppgiften.



2104 Vi har nämnt talmängderna $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ som två mängder med oändligt antal element.

- a) Även talmängderna $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ är talmängder med oändligt antal element. Vilka talmängder står dessa beteckningar för?
- b) Beskriv deras relation till varandra och till $\mathbb{N}$ respektive $\mathbb{Z}$ med hjälp av begreppet delmängd.

NIVÅ 2

2105 Skriv följande mängder med hjälp av mängdsymboler.

- a) A är mängden av alla jämna tal mellan 11 och 27.
- b) B är mängden av alla heltalskvadrater mellan 3 och 82.
- c) C är mängden av alla katter som bor på din gata och har körkort för lastbil.

2106 Om $A = B$, gäller då att $A \subseteq B$? Motivera.

2107 Om alla element i mängden B också ingår i mängden A och det finns element i A som inte är element i B , så säger man att B är en äkta delmängd till A och skriver $B \subset A$.

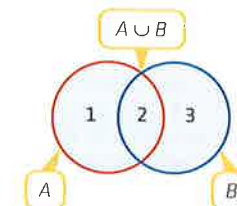
- a) Säg att $B \subset A$. Gäller då även $B \subseteq A$?
- b) Låt $A = \{\text{basker, hatt, keps, mössa}\}$. För vilken eller vilka mängder B gäller $B \subseteq A$, men inte $B \subset A$?

2108 Varför gäller $\emptyset \subseteq A$ för alla mängder A , dvs. att tomma mängden är delmängd till alla mängder?

Mängdoperationer

Union Man kan utföra operationer på mängder, ungefär som man utför räkneoperationer med tal. Om vi låter $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$ vara två mängder, så är mängden $\{1, 2, 3\}$ *unionen* av A och B och betecknas $A \cup B$.

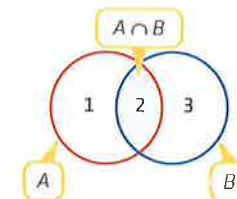
Utläses "A union B"



Unionen av A och B är den mängd som består av alla element som ingår i A , B eller båda mängderna A och B . Om $C = \{3, 4\}$ gäller alltså $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$.

Snitt Mängden $A \cap B = \{2\}$ kallas *snittet* av A och B .

Utläses "A snitt B"



Snittet av två mängder är de element som ingår i båda mängderna. Därmed gäller att $A \cap B = \{2\}$.

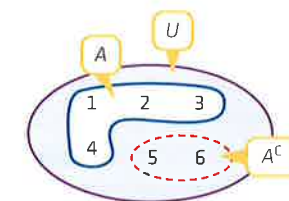
Differens *Differensen* av två mängder A och B är de element som ingår i A men inte i B . I vårt fall är differensen av A och B elementet 1 och den betecknas $A \setminus B = \{1\}$.

Observera att precis som för differensen mellan två tal, så gäller i allmänhet att $A \setminus B \neq B \setminus A$. I vårt exempel gäller att $B \setminus A = \{3\}$.

Endast då $A = B$ så är $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$

Universalmängd När man arbetar med till exempel de naturliga talen, så är ofta övriga talmängder ointressanta. De naturliga talen utgör då något man kallar *universalmängd*. Den består av alla element som är relevanta för det man arbetar med och betecknas U . Ofta framgår det av sammanhanget vilken universalmängden är och den skrivs därför oftast inte ut.

Komplement Om vi har universalmängden $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ samt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$, så kallas mängden $\{5, 6\}$ för *komplementet* till A . Den består alltså av de element som inte ingår i A , men som ingår i U . Det finns några olika sätt att beteckna komplement och två av de vanligaste är A^c respektive $\bar{A}$. Vi kommer att använda det första skrivsättet och skriver $A^c = \{5, 6\}$.



Kardinalitet Antalet element i en mängd kallas för mängdens *kardinalitet* och beskrivs med ett kardinaltal, som för ändliga mängder är ett naturligt tal. Kardinaliteten för A brukar skrivas $|A|$ eller $\#A$.

Viktiga begrepp

I matematisk mening har ordet *eller* betydelsen och/eller. $A \cup B$ är alltså den mängd som består av alla element som ingår i A , B eller både A och B .

Union

Unionen mellan två mängder A och B betecknas $A \cup B$ och definieras som $A \cup B = \{x; x \in A \text{ eller } x \in B\}$.

Snitt

Snittet mellan två mängder A och B betecknas $A \cap B$ och definieras som $A \cap B = \{x; x \in A \text{ och } x \in B\}$.

Differens

Differensen mellan två mängder A och B betecknas $A \setminus B$ och definieras som $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ och } x \notin B\}$.

Komplement

Om U är universalmängden och A är en mängd, så är komplementet till A alla element som ingår i U men inte i A . Vi skriver det som $A^C = \{x; x \in U \text{ och } x \notin A\}$.

Kardinalitet

Antalet element i en mängd A kallas för mängdens kardinalitet och betecknas $|A|$. För en ändlig mängd A gäller att $|A| \in \mathbb{N}$.



Exempel:

Låt $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ och $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$. Bestäm

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $|A|$

Lösning:

- a) Snittet består av alla element som ingår i både A och B .

Svar: $A \cap B = \{11, 13, 15\}$

- b) Unionen består av samtliga element som ingår i A eller B .

Svar: $A \cup B = \{11, 12, 13, 14, 15, 17, 19\}$

I betydelsen och/eller

- c) Kardinaliteten av A är antalet element i mängden A .

Svar: $|A| = 5$



Exempel:

Låt $A = \{3, 4, 5\}$ och $A^C = \{1, 2\}$

- a) Bestäm universalmängden U .
b) Låt $B = \{4\}$. Bestäm B^C .

Lösning:

- a) $A \cup A^C$ ger alltid universalmängden.

Svar: $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- b) $B^C = U \setminus B = \{1, 2, 3, 5\}$

NIVÅ 1

2109 Låt $A = \{1, 2, 4, 8\}$ och $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Bestäm

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $|B|$

2110 För mängderna A , B och C gäller att

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad B = \{1, 2, 5\}$$

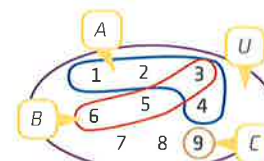
$$C = \{3, 4, 6\}$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska

- a) $B \subseteq A$ b) $A = B \cup C$
c) $B \cap C = \emptyset$ d) $B \setminus A = C$

2111 Låt $U = \{1, 7, 9, 13, 17, 19, 21, 28\}$ och $A^C = \{7, 13, 19, 28\}$. Bestäm mängden A .

2112 Bestäm följande mängdoperationer med hjälp av figuren



- a) A^C b) $A \cup B$ c) $A \cap B$
d) $A \setminus B$ e) $B \setminus A$ f) $C \cap B$

2113 Låt U vara mängden av alla husdjur och A mängden av alla katter. Hur kan man beskriva mängden A^C med ord?

2114 Bestäm $|A^C|$ om $|U| = 34$ och $|A| = 12$.

2115 Låt universalmängden $U = \mathbb{Z}$.

- a) Bestäm A^C , om $A = \{n; n \text{ jämnt}\}$.
b) Bestäm B , om $B^C = \mathbb{N}$.
c) Bestäm $A \cup B$, om A och B beskrivs som ovan.
d) Bestäm $A \cap B$, om A och B beskrivs som ovan.

2116 För mängden B gäller att $B = A \cap A^C$. Bestäm B .

NIVÅ 2

2117 Ge exempel på två mängder A och B , sådana

ö att $A \cup B = A \cap B$.

2118 Ange en mängd X , så att det gäller att

ö $A \cup X = U$, där U är universalmängden.

2119 Låt $A = \{1, 2, 4, 8\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$ och $C = \{1, 7\}$. Bestäm

- a) $(A \cup B) \cup C$ b) $(A \cap B) \cap C$
c) $(A \cup C) \cap B$ d) $(B \cap C) \cup A$

2120 Ange två oändliga mängder A och B som

ö uppfyller att $A \cap B = \emptyset$.

2121 Arvid påstår att för alla mängder A , B och C gäller att

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Vanna säger att Arvid har fel. Hon påstår i stället att för alla mängder A , B och C gäller att

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- a) Visa med ett motexempel att Arvid har fel.

- b) Motivera Vannas påstående genom att rita en figur som beskriver mängderna.

2122 Visa att operationen snitt är kommutativ, dvs. att $A \cap B = B \cap A$ för alla mängder A och B .

NIVÅ 3

2123 Visa att operationerna union och snitt är associativa, dvs. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ respektive $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ för alla mängder A , B och C . Att operationerna är associativa innebär att man kan utelämna parenteserna och bara skriva $A \cup B \cup C$ respektive $A \cap B \cap C$.

2124 a) Visa att $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

b) Visa att $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Venndiagram

Tänk dig att man delar in deltagarna i ett sommarläger i grupper efter deras språkkunskaper. Till exempel skulle vi kunna få mängderna

$A = \{\text{personer som talar tyska}\}$

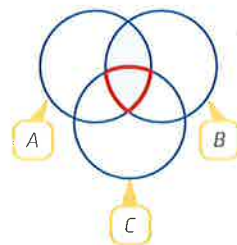
$B = \{\text{personer som talar ungerska}\}$

$C = \{\text{personer som talar ryska}\}$

Mängden $A \cap B$ består av dem som pratar både tyska och ungerska. Mängden $A \cup C$ består av dem som pratar antingen tyska, ryska eller båda dessa språk.

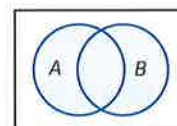
Här intill har vi åskådliggjort vilka kombinationer av språkkunskaper som i det här fallet är möjliga med hjälp av ett Venndiagram.

Det skuggade området visar dem som pratar både tyska och ungerska och det med röd färg inringade området visar dem som pratar såväl tyska, ungerska som ryska.

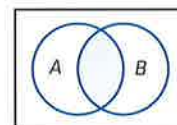


Ett Venndiagram kan ofta ge en tydlig bild av vilka olika kombinationer av egenskaper som kan vara aktuella i ett visst fall. Med hjälp av Venndiagrammen kan vi också förtydliga mängdoperationerna union, snitt, differens och komplement.

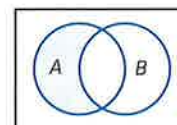
Union Det skuggade området i figuren till höger anger unionen av mängderna A och B , dvs. $A \cup B$. I det här exemplet är det de personer som pratar antingen tyska eller ungerska eller båda språken.



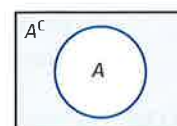
Snitt Det skuggade området i figuren till höger anger snittet mellan mängderna A och B , dvs. $A \cap B$. Alltså de som i det här fallet pratar både tyska och ungerska.



Differens Det skuggade området i figuren till höger anger differensen av mängderna A och B , dvs. $A \setminus B$. De som i det här exemplet pratar tyska men inte ungerska.

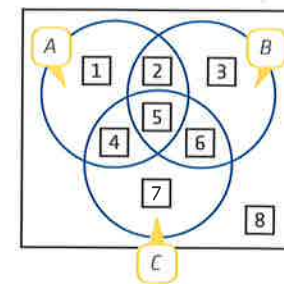


Komplement I figuren avgränsar rektangeln universalmängden U . Det skuggade området anger A^c , komplementet till A . Om universalmängden i detta fall är alla lägerdeltagare, så är A^c de personer på lägret som inte talar tyska.



Exempel:

Låt universalmängden vara $U = \{\text{människor}\}$ samt mängderna $A = \{\text{svenska medborgare}\}$, $B = \{\text{elitidrottare}\}$ och $C = \{\text{fotbollsspelare}\}$. I vilken av sektorerna hör följande personer hemma?



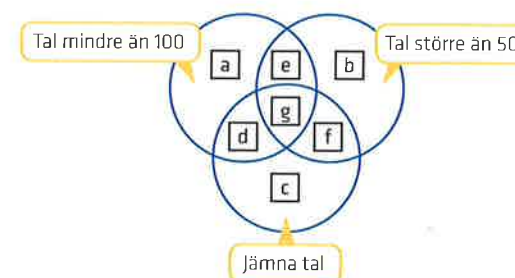
- Zlatan Ibrahimović
- Mie Bingtsdotter, svensk fotbollsspelare i lägre divisioner
- Jessica Ennis, olympisk mästare i sjukamp 2012
- Ernst Obstler, icke-idrottande österrikare

Lösning:

- Zlatan är svensk, fotbollsspelare och elitidrottare. Han placeras därför i sektor 5.
- Mie är svensk, fotbollsspelare men inte elitidrottare. Hon placeras därför i sektor 4.
- Jessica Ennis är elitidrottare, men varken svensk eller fotbollsspelare. Hon placeras därför i sektor 3.
- Ernst Obstler hör varken hemma i A , B eller C och ska därför vara i sektor 8.

Exempel:

I vilken del av Venndiagrammet finns följande element?



- 48
- 55
- 101
- 37

Lösning:

- Talet 48 är ett jämnt tal, som är mindre än 100 men inte större än 50. Svar: Sektor d.
- Talet 55 är ett udda tal, som både är mindre än 100 och större än 50. Svar: Sektor e.
- Talet 101 är ett udda tal som är större än 50, men inte mindre än 100. Svar: Sektor b.
- Talet -37 är ett udda tal som är mindre än 100. Svar: Sektor a.

**Exempel:**

I Åmotfors bodde vid ett tillfälle 912 personer med körkort för bil eller motorcykel. Av dessa hade vid detta tillfälle 598 körkort för endast personbil och 207 körkort för både personbil och motorcykel. Hur många invånare i Åmotfors hade motorcykelkörkort, men inte körkort för personbil?

Lösning:

Vi ritar ett Venndiagram med mängderna

$Bil = \{\text{Invånare med bilkörkort}\}$

$Mc = \{\text{Invånare med motorcykelkörkort}\}$

och anger antalet element i vardera sektor.

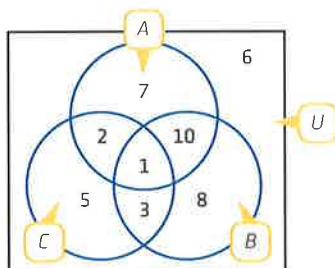
Eftersom det totalt fanns 912 personer med körkort för bil eller motorcykel, så blir antalet invånare med körkort endast för motorcykel

$$912 - (598 + 207) = 107$$

Svar: Det fanns 107 invånare i Åmotfors som hade motorcykelkörkort, men inte körkort för personbil.

**NIVÅ 1**

2125 Talen i figuren anger antalet element i vardera sektor.



Bestäm antalet element i

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
c) $A \cap (B \cup C)$ d) A^C

2126 Till en 20-årsfest kom 89 personer. Av dem åt 47 personer grillspett och 29 fiskgryta. 14 personer åt både grillspett och fiskgryta. Rita ett Venndiagram och bestäm hur många som

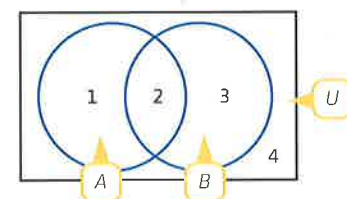
- a) endast åt grillspett
b) endast åt en maträtt
c) varken åt grillspett eller fiskgryta

2127 Figuren beskriver mängderna

$U = \{\text{Hushåll i Ludvika}\}$

$A = \{\text{Hushåll med trädgård}\}$

$B = \{\text{Hushåll med husdjur}\}$



Beskriv med ord vad elementen i sektorerna 1, 2, 3 och 4 har gemensamt.

2128 Rita ett Venndiagram uppbyggt av två valfria mängder och beskriv vilka egenskaper elementen i de olika sektorerna har.

NIVÅ 2

2129 Rita ett Venndiagram uppbyggt av tre valfria mängder och beskriv vilka egenskaper elementen i de olika sektorerna har.

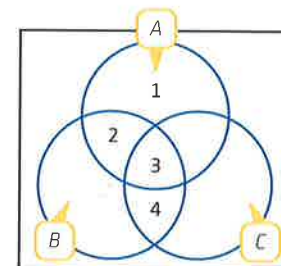
2130 Figuren beskriver mängderna

$U = \{\text{Elever på Balderstorps gymnasium}\}$

$A = \{\text{Elever som utövar konståkning}\}$

$B = \{\text{Elever som rider}\}$

$C = \{\text{Elever som tränar gymnastik}\}$

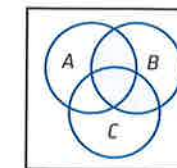


Beskriv med ord vad elementen i sektorerna 1, 2, 3 respektive 4 har gemensamt.

2131 Bland 86 lärare finns det trötta, törstiga och hungriga individer. I gruppen finns det 31 lärare som är trötta, 33 som är törstiga och 37 som är hungriga. Bland dessa är 11 lärare både trötta och hungriga, 7 lärare är både törstiga och hungriga samt 6 lärare är trötta och törstiga. Av dessa är 5 lärare såväl trötta som hungriga och törstiga.

- a) Hur många lärare är endast hungriga?
b) Hur många lärare är endast trötta?
c) Hur många lärare är varken trötta, törstiga eller hungriga?

2132 Beskriv med symboler den skuggade delen av Venndiagrammet.



2133 Låt A vara mängden av positiva tal delbara med 2, B mängden av positiva tal delbara med 3 och $C = \{5, 10, 15, \dots\}$. Tolka

- a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $B \cap C$

2134 För mängderna A, B och universalmängden U gäller att $|A| = 82$, $|B| = 35$, $|U| = 120$ och $|A \cap B| = 27$.

- a) Bestäm $|A \setminus B|$
b) Bestäm $|A \cup B|$
c) Bestäm $|(A \cup B)^C|$

2135 Vad får man reda på om man summerar: $|A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$?

2136 Vad kan man säga om mängderna A och B om $|A \setminus B| = 0$?

NIVÅ 3

2137 Visa med hjälp av ett Venndiagram att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2138 Förklara med hjälp av ett Venndiagram att $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Resonemang och begrepp

- Vad är det för skillnad mellan en delmängd och en äkta delmängd?
- Vad menas med en mängds kardinalitet?
- Kan vi med säkerhet påstå att $|A \cup B| > |A|$?
- Vilka element består $\mathbb{Q}^C$ av, om mängden av reella tal $\mathbb{R}$ är universalmängden och $\mathbb{Q}$ är mängden av rationella tal?
- Är det möjligt att både $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$? Motivera ditt svar.
- Ge exempel på en situation som kan åskådliggöras med ett Venndiagram.

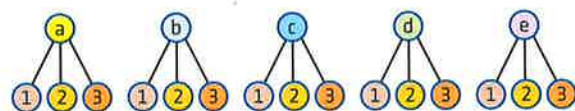
2.2 Kombinatorik

Multiplikationsprincipen

På menyn i en kvarterskrog finns fem huvudrätter och tre efterrätter. Om vi kallar huvudrätterna för a–e och efterrätterna för 1–3, så kan vi bilda mängden av huvudrätter $X = \{a, b, c, d, e\}$ och mängden av efterrätter $Y = \{1, 2, 3\}$. Genom att kombinera ett element från X med ett element från Y kan vi bilda $5 \cdot 3 = 15$ olika tvårättersmenyer: a–1; a–2; a–3; b–1 osv.

Multiplikationsprincipen

För att bestämma det totala antalet möjliga tvårättersmenyer multiplicerar vi ihop antalet element i vardera mängd. Det är ett exempel på den så kallade *multiplikationsprincipen*.



I första steget kan vi välja en huvudrätt på 5 sätt. I andra steget kan vi välja en efterrätt på 3 sätt. Totalt ger det 15 olika tvårättersmenyer.

Kartesisk produkt

Det är inte alltid så att $Y \times X$ är samma sak som $X \times Y$. Här består $Y \times X$ av paren (1, a); (2, a) etc.

I exemplet här ovanför bildade vi par av rätterna på en meny. Vi kombinerade samtliga element i en mängd med samtliga element i en annan mängd. Det kallas att bilda den *kartesiska produkten* av mängderna. Här har vi bildat den kartesiska produkten $X \times Y$. Den består av samtliga par av element, där det första elementet kommer från X och det andra elementet från Y . Elementen i mängden $X \times Y$ skrivs (a, 1); (a, 2) osv.

I exemplet med maträtter gäller att kardinaliteten, det vill säga antalet element i mängderna X och Y , är $|X| = 5$ och $|Y| = 3$. För kardinaliteten av den kartesiska produkten gäller att $|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = 5 \cdot 3 = 15$, som alltså är samma resultat som multiplikationsprincipen ger.

Exempel:

En vanlig svensk registreringsskylt på en personbil består av tre bokstäver följda av tre siffror. Hur många olika registreringsskyltar kan det finnas?

Lösning:

På registreringsskyltar används inte bokstäverna I, Q, V, Å, Ä och Ö. Men däremot används W. Alltså finns det 23 bokstäver som används. Det innebär att det finns 23^3 olika bokstavskombinationer. Numren varierar från 001 till 999, dvs. det finns 999 olika nummer.

Kallar vi mängden av bokstavskombinationer för B och mängden av nummer för N , så innebär det alltså $|B| = 23^3$ och $|N| = 999$. Antalet möjliga registreringsnummer blir

$$|B \times N| = |B| \cdot |N| \approx 23^3 \cdot 999 \approx 12 \cdot 10^6$$

Svar: Det finns ca 12 miljoner möjliga registreringsskyltar.

Det finns ett fåtal bokstavskombinationer som inte används, t.ex. FUL, men det är försumbart i sammanhanget.

Exempel:

Ett företag som arbetar med textiltryck har utförsäljning. De sista varorna som säljs är tröjor med enfärgat tryck. Endast vita och gula tröjor finns kvar. Det finns tre färger kvar till trycket: röd, blå och svart. Låt T vara mängden av tröjefärger och F vara mängden av färger för tryck.

- Vilka element ingår i mängden som bildas av den kartesiska produkten $T \times F$.
- Tolka betydelsen av elementen i $T \times F$.
- Bestäm och tolka $|T \times F|$.

Lösning:

- $T \times F$ består av alla kombinationer med ett element från T och ett element från F .

$$T \times F = \{(\text{vit}, \text{röd}), (\text{vit}, \text{blå}), (\text{vit}, \text{svart}), (\text{gul}, \text{röd}), (\text{gul}, \text{blå}), (\text{gul}, \text{svart})\}$$

- Elementen visar vilka kombinationer av tröjefärg och tryckfärg som finns kvar.

c) $|T \times F| = 6$ Det finns 6 element i mängden $T \times F$

$|T \times F|$ anger antalet möjliga kombinationer av tröjefärg med tryckfärg.

NIVÅ 1

- 2201** Pax väljer mellan tre par byxor och fyra skjortor när han ska på dejt. På hur många olika sätt kan han välja sin klädsel?
- 2202** En middagsmeny består av 5 förrätter, 8 huvudrätter och 3 efterrätter. På hur många olika sätt kan man välja en trerättersmeny?
- 2203** En vanlig fyrsiffrig pinkod skapas med hjälp av de tio siffrorna 0 till och med 9. Hur många möjliga fyrsiffriga pinkoder kan man skapa?
- 2204** På ett schackbräde använder man den kartesiska produkten av mängderna $K = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ och $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- Ge exempel på ett element i $K \times R$.
 - Vad står elementen i $K \times R$ för?
 - Bestäm $|K \times R|$.

NIVÅ 2

- 2205** Ett visst lösenord ska bestå av 8 tecken. De tillåtna symbolerna är de 10 siffrorna 0 till och med 9 samt alfabetets 29 bokstäver, såväl stora som små.
- Hur många olika lösenord kan man skapa med dessa symboler?
 - Om man i stället tillåter lösenord som består av 6, 7 eller 8 tecken, hur många olika lösenord kan man totalt skapa då?
- 2206** Klass Nv3b ska välja ordförande och sekreterare till klassrådet. De har bestämt att de ska välja en kille och en tjej. I klassen går 16 tjejer och 12 killar. På hur många olika sätt kan de välja ordförande och sekreterare?
- 2207** Visa att om A och B är ändliga mängder, så är $|A \times B| = |B \times A|$.

Fall 1



Fall 2



I både fall 1 och 2 innehåller minst en av lådorna minst 2 föremål.

Dirichlets lådprincip

Tänk dig att 5 duvor flyger mot ett duvslag med 4 stycken duvhål. Om alla duvorna ska få tak över huvudet så måste det finnas minst 2 duvor i minst ett av duvhålen. Det här är ett exempel på den så kallade *duvhålsprincipen* (eng. pigeonhole principle) eller *lådprincipen* som den ofta kallas. I vårt exempel säger den att om 5 föremål ska stoppas i 4 lådor, så kommer det att vara minst 2 föremål i minst en av lådorna. Lådprincipen kallas även *Dirichlets lådprincip* efter den tyske matematikern Dirichlet.

Dirichlets lådprincip

$\mathbb{Z}^+$ är mängden av positiva heltal.

Om m föremål ska placeras i n lådor ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) och $m > n$, så kommer minst en låda att innehålla mer än ett föremål.

Påståendet kan verka självklart, men som alltid i matematiken behövs ett bevis. I uppgift 2217 får du själv föra ett resonemang som motiverar att lådprincipen gäller. Trots att principen är närmast trivial, så är den ofta väldigt användbar i matematiken.



Exempel:

I den olympiska roddgrenen *åtta med styrman* innehåller varje båt åtta roddare med var sin åra, samt en styrman. Visa att minst två av roddarna är födda på samma veckodag.

Lösning:

Här kan vi använda Dirichlets lådprincip. Vi låter roddarna vara föremålen och veckodagarna vara lådorna. Eftersom vi har 8 roddare men bara 7 veckodagar, så innebär det att minst två roddare är födda samma veckodag, v.s.v.

Det kan förstås hända att tre eller fler roddare är födda samma veckodag, men det kan vi inte veta.



Exempel:

Spionen Alec skickar ett kodat meddelande till Liz. Varje kodord består av tre bokstäver ur det engelska alfabetet. Meddelandet innehåller 20 000 stycken sådana bokstavstripplar. Visa att minst två tripplar är identiska.

Lösning:

Det finns 26 bokstäver i det engelska alfabetet och eftersom det handlar om bokstavstripplar, så finns det enligt multiplikationsprincipen $26^3 = 17\,576$ olika tripplar. Nu kan vi använda Dirichlets lådprincip genom att låta tripplarna i meddelandet vara föremålen och de olika möjliga tripplarna vara lådorna. Eftersom $20\,000 > 17\,576$ så innebär det att det finns minst två identiska tripplar i meddelandet.

NIVÅ 1

2208 Niclas ska med hjälp av lådprincipen visa att en pokerhand med 5 kort alltid kommer att innehålla minst 2 kort av samma färg (spader, hjärter, ruter, klöver).

- Hjälp Niclas att bestämma vad som ska motsvara lådor respektive föremål.
- Fullfölj resonemanget med hjälp av lådprincipen.

2209 Hur många personer måste minst vara i ett rum, om vi ska vara säkra på att det finns minst två personer av samma kön?

2210 Sju svenskar är på fotbollsresa till Liverpool. I supportershopen vill de köpa matchtröjor. Förutom det röda hemmastället, så finns två bortaställ samt två olika målvaktströjor. Kan man säkert veta att minst två av personerna kommer att köpa samma typ av tröja?



2211 En människa har normalt färre än 200 000 hårstrån på huvudet. Kan man med säkerhet påstå att det finns två göteborgare med exakt samma antal huvudhår?

2212 Hur många elever måste minst gå i en klass för att säkert tre eller flera ska ha födelsedag i samma månad?

2213 Hur ändras svaret i föregående uppgift om man i stället ska vara säker på att minst tre personer är födda i mars?

2214 Daniel har tillverkat ett duvslag, där duvhålen ligger sju stycken i bredd i fyra rader. De bildar alltså ett mönster som ett rutnät med 7×4 rutor. Hur många duvor måste flytta in i duvslaget för att säkert en av raderna ska vara fullsatt om det bara ryms en duva i varje duvhål?

NIVÅ 2

2215 I mängden A är elementen heltal och $|A| = 8$.

- Kan man med säkerhet påstå att minst två tal har samma rest vid division med 8?
- Vilket är det högsta tal n som man kan dividera med och säkert veta att minst två tal i A har samma rest?

2216 En rektangel har omkretsen 100 cm. Längs rektangelns ytterkant sätter man slumpvis ut 103 punkter. Visa att minst två av punkterna är mindre än 1 cm ifrån varandra.

2217 Dirichlets lådprincip säger att: "Om m föremål ska placeras i n lådor ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) och $m > n$ så kommer minst en låda att innehålla mer än ett föremål". För ett resonemang som visar att påståendet stämmer.

NIVÅ 3

- 2218** a) Kan man med säkerhet påstå att det finns två kineser vars kroppslängder inte skiljer sig med mer än en nanometer (1 nm)?
- b) Hur skulle man kunna formulera ett liknande påstående för svenskar så att påståendet säkert skulle vara sant?
- c) Minst hur många kineser är lika långa på en mikrometer (1 μm) när?

2219 Säg att m föremål ska läggas i n lådor. Vad ska stå i rutan för att påståendet ska vara sant? "Om $m > \square$ så kommer minst en av lådorna att innehålla mer än k föremål."

Ordboken

Permutation kommer från det latinska ordet *permutatio*, som betyder förändring.

Permutationer

Eleverna i en klass ska rangordna vilken av frukterna apelsin, banan och clementin var och en gillar bäst. Vi betecknar frukterna med A, B och C. De olika varianterna blir

ABC ACB BAC BCA CAB CBA



där t.ex. ACB betyder att man tycker bäst om apelsin, näst bäst om clementin och minst om banan.

Permutation

Sammanlagt finns det 6 möjliga sätt att ordna de olika frukterna på. De olika sätten att ordna frukterna kallas *permutationer* av mängden {A, B, C}. Permutationerna skiljer sig alltså åt enbart genom den inbördes ordningen av elementen.

Fakultet

Om man vill beräkna antalet permutationer av en mängd utan att räkna upp varje permutation, så finns det ett bra sätt att tänka på. Vi tar exemplet här ovanför, där det fanns tre möjligheter till vilken frukt som skulle komma på första plats. När man har valt en frukt till förstaplatsen finns det två frukter kvar att välja på till andraplatsen. Sen återstår det bara en frukt, som självklart kommer på tredje plats. Det leder till att antalet permutationer är $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Produkten $3 \cdot 2 \cdot 1$ kan kortare skrivas $3!$ och kallas då *3-fakultet*. På samma sätt är $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Allmänt gäller att en mängd med n stycken element har $n!$ olika permutationer.

Fakultet

Låt n vara ett naturligt tal. Uttrycket $n!$ uttalas n -fakultet och beräknas enligt

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ för } n \geq 1$$

För fullständighetens skull definieras också $0! = 1$.

Ett liknande problem som det med frukterna får vi om vi ser på ett 100-meterslopp med åtta löpare och funderar på antalet olika sätt som de tre medaljerna kan fördelas på. Det här är en fråga där man ska välja ut tre personer bland åtta *med hänsyn till inbördes ordning*. Med ett liknande tänkesätt som här ovanför inser vi att det finns 8 möjligheter att välja ettan, 7 möjligheter att välja tvåan och 6 möjligheter att välja trean. Enligt multiplikationsprincipen blir alltså det totala antalet möjligheter

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Antalet möjligheter att välja k element med hänsyn till inbördes ordning ur en mängd med n element har fått den speciella beteckningen $P(n, k)$. Det gäller alltså att

$$P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Utläses "permutation av 3 element bland 8"

Antal permutationer

Antalet möjligheter att välja k element med hänsyn till inbördes ordning ur en mängd med n element betecknas $P(n, k)$ och beräknas

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Om vi tillämpar formeln på exemplet med 100-metersloppet, så får vi

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Samma produkt som tidigare

ON På din räknare

Räknaren har funktioner både för att beräkna fakultet och för att beräkna $P(n, k)$.

Vill du beräkna $7!$ trycker du 7 följt av **MATH**, väljer **PRB** och **4:!** Avsluta med **ENTER**.

Om du i stället vill beräkna $P(8, 3)$, så trycker du först 8 följt av **MATH**, väljer **PRB** och **2:nPr**. Tryck sedan 3 och avsluta med **ENTER**.

7!	5040
8 nPr 3	336

Exempel:

Hur många olika "ord" med fem bokstäver kan bildas av bokstäverna i ordet BANDY, om "ord" här omfattar även betydelselösa bokstavskombinationer som t.ex. BNDYA?

Lösning: BANDY innehåller 5 bokstäver som alla är olika. Det gäller alltså att beräkna antalet permutationer av en mängd med 5 element.

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Svar: 120 stycken

Exempel:

Stafetten för damer i skid-VM är 4×5 km. Det ingår alltså fyra åkare i ett lag. På hur många olika sätt kan stafettlaget väljas ut för ett land som har 9 kvinnliga åkare i truppen?

Lösning: Eftersom det har betydelse vem som åker vilken sträcka, så innebär problemet att man ska välja 4 åkare av 9 med hänsyn till inbördes ordning.

$$P(9, 4) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024 \quad P(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Svar: Stafettlaget kan väljas på 3 024 olika sätt.

NIVÅ 1

2220 På måndagar har klass Nv3a lektioner i följande ämnen: svenska, engelska, matematik, idrott och biologi. På hur många olika sätt kan man sammanställa ordningen av lektionerna i måndagsschemat för klassen?

2221 I klass Nv3b går 28 elever. Till klassrådet ska de välja en ordförande och en sekreterare. På hur många olika sätt kan de välja ordförande och sekreterare?

2222 Hur många bokstavskombinationer med 6 bokstäver kan bildas av MARULK? Varje bokstav ska användas en gång och alla bokstavskombinationer räknas.

2223 Gör en lista på alla bokstavskombinationer som kan bildas av SPA respektive APA.

- Hur många bokstavskombinationer kan bildas av SPA?
- Hur många bokstavskombinationer kan bildas av APA?
- Förklara varför antalet inte blir lika, trots att båda bokstavskombinationerna består av tre bokstäver.

2224 I vårt svenska alfabet finns 29 bokstäver.

- Bestäm antalet permutationer av alfabetet.
- Hur många bokstavskombinationer med 4 bokstäver kan bildas om bokstäverna måste vara olika?

2225 Hur många tresiffriga tal kan man bilda med hjälp av siffrorna 1, 2 och 3, om samma siffra får förekomma

- på endast en position
- på fler än en position

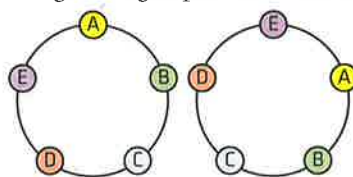
NIVÅ 2

2226 Motivera varför antalet permutationer till en mängd med n stycken element kan beräknas med hjälp av $n!$

2227 Motivera varför antalet bokstavskombinationer med 6 bokstäver som kan bildas av LALLAR kan beräknas med uttrycket $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$

2228 Johan har 4 olika kavajer och 9 olika skjortor som hänger på var sin galge. På hur många olika sätt kan han hänga in sina kavajer och skjortor i garderoben, om alla skjortor måste hänga intill varandra och alla kavajer måste hänga intill varandra?

2229 I figuren är de 5 bokstäverna A–E ordnade på samma sätt i en ring med 5 positioner. En vridning av ringen påverkar inte ordningen.



- På hur många olika sätt kan man ordna 5 bokstäver i en ring med 5 positioner?
- På hur många sätt kan man ordna 5 olika bokstäver i en ring om man har 8 olika bokstäver att välja bland?
- Skriv ett uttryck för antal sätt man kan ordna k olika bokstäver i en ring om man har n olika bokstäver att välja bland.

2230 Visa att

- $n! + (n+1)! = (n+2)n!$
- $n! + (n-1)! = (n^2 - 1)(n-2)!$

NIVÅ 3

2231 Tre män och tre kvinnor ska äta middag vid ett runt bord. På hur många sätt kan bordsplaceringen ske om

- man tar hänsyn till vilken stol var och en sitter på
- man endast tar hänsyn till vem som sitter bredvid vem
- de ska sitta varannan kvinna och varannan man och man endast tar hänsyn till vem som sitter bredvid vem

Ordboken

Kombination kommer av det latinska ordet *combinare*, som betyder att sätta samman.

Kombinationer

Ett företag på 8 personer ska skicka 3 medarbetare till en konferens. Här spelar det ingen roll vilken person som utses först. Ordningen är helt enkelt ointressant, eftersom alla tre ska delta i samma konferens. Företaget ska alltså välja 3 element ur en mängd med 8 element *utan hänsyn till inbördes ordning*. Om man vill bestämma på hur många olika sätt företaget kan välja deltagare till konferensen, så kan man börja med att räkna ut på hur många olika sätt 3 element av 8 kan väljas *med hänsyn till inbördes ordning*. Det gjorde vi i exemplet med 100-metersloppet i förra avsnittet och antalet är $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Om vi kallar medarbetarna för $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, så är $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ av dessa 336 permutationer

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Men alla dessa 6 permutationer betyder att samma tre deltagare åker till konferensen. På samma sätt har trion EFG de 6 permutationerna

EFG EGF FEG FGE GEF GFE

Detta gäller för samtliga grupper med tre deltagare.

Bland de 336 permutationerna förekommer alltså varje trio 6 gånger. För att bestämma på hur många sätt man kan välja 3 element ur en mängd med 8 element *utan hänsyn till inbördes ordning*, så måste vi därför dividera 336 med 6. Rätt svar är alltså $336/6 = 56$ olika sätt.

När man beräknar på hur många sätt man kan välja ut ett visst antal element ur en mängd *utan hänsyn till ordning*, säger man att man beräknar antalet *kombinationer*. Tankegången är att man först bestämmer på hur många sätt man kan välja elementen *med hänsyn till inbördes ordning*, dvs. antalet permutationer. Sedan dividerar man med antalet permutationer av det utvalda antalet element. Två vanliga sätt att beteckna antalet kombinationer i exemplet här ovanför är $C(8, 3)$ och $\binom{8}{3}$, där det sista utläses "8 över 3".

Antal kombinationer

Antalet möjligheter att välja k element utan hänsyn till inbördes ordning ur en mängd med n element betecknas $\binom{n}{k}$ och beräknas

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{för } 0 \leq k \leq n$$

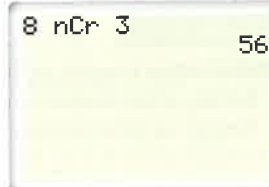
Tillämpar vi formeln i exemplet ovan, så blir uträkningen

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

vilket stämmer med våra tidigare beräkningar.

ON På din räknare

Räknaren har en funktion för att beräkna antalet kombinationer. Om du vill beräkna $\binom{8}{3}$, så trycker du först 8 följt av **MATH**, väljer **PRB** och **3:nCr**. Tryck sedan 3 och avsluta med **ENTER**.



Exempel:

Emil har som hobby att tälja träfigurer, som han sedan säljer. Just nu har han 11 olika figurer till salu och Anton bestämmer sig för att köpa två av dem. På hur många sätt kan Anton välja ut de två figurerna?

Lösning: Det spelar ingen roll vilken av figurerna han köper först, så lösningen ges av antalet kombinationer av 2 element bland 11.

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{2!(11-2)!} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 55$$

Kan även skrivas $C(11, 2)$

Svar: Anton kan välja ut 2 figurer bland 11 på 55 olika sätt.

Exempel:

En restaurang har specialiserat sig på smårätter. På menyn finns 15 stycken huvudrätter och 6 stycken efterrätter. En femrättersmeny består av 3 valfria huvudrätter och 2 valfria efterrätter. Alla 3 huvudrätterna serveras samtidigt och detsamma gäller för de 2 efterrätterna. På hur många sätt kan man komponera sin måltid, om man inte får välja någon rätt mer än en gång.

Lösning: Eftersom rätterna inom respektive kategori serveras samtidigt, så är ordningen ointressant. Vi söker alltså antalet kombinationer av huvudrätter respektive efterrätter.

Det finns $\binom{15}{3}$ sätt att välja 3 av 15 huvudrätter

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

Det finns $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ sätt att välja två efterrätter.

Var och en av de 455 kombinationerna av huvudrätter kan nu paras ihop med vilken som helst av de 15 kombinationerna av efterrätter. Med hjälp av multiplikationsprincipen kan vi slutligen bestämma att det finns

$$455 \cdot 15 = 6\,825$$

sätt att komponera måltiden på.

Svar: Det finns 6 825 olika sätt att kombinera 3 huvudrätter och 2 efterrätter från menyn.

Eller använd funktionen **MATH PRB 3:nCr** på räknaren

NIVÅ 1

2232 I en pizzeria kan man välja mellan 14 olika tillbehör till pizzorna. Hur många pizzor kan man baka med 5, 4 respektive 2 olika tillbehör?



2233 I en klass med 18 flickor och 7 pojkar, ska tre flickor och tre pojkar väljas ut som deltagare i skolans danstävling.

- På hur många sätt kan pojkarna väljas ut?
- På hur många sätt kan flickorna väljas ut?
- På hur många sätt kan hela gruppen väljas ut?

2234 En klass med 23 elever ska utse 2 representanter till planering inför studentfesten.

- På hur många sätt kan de två personerna väljas ut?
- Säg att eleverna väljs helt slumpmässigt. Hur stor är då chansen att eleven som står först på klasslistan kommer att väljas ut?

2235 Lotto är spelet där det gäller det att pricka in 7 nummer av 35, dvs. man väljer 7 nummer från 1 till 35.

- På hur många olika sätt kan man välja en lottorad?
- Hur stor är sannolikheten att man får 7 rätt på Lotto om man tippat en viss lottorad?

2236 Bestäm det heltal k som löser ekvationen $k \cdot C(7, 5) = P(11, 9)$.

NIVÅ 2

2237 En fysiklärare har tre listor med vardera 10 uppgifter. Inför ett skriftligt prov, som ska innehålla 6 uppgifter, ska läraren välja 2 uppgifter från den första listan, 3 uppgifter från den andra listan och 1 uppgift från den tredje listan. Hur många olika skriftliga prov kan läraren konstruera på detta sätt om man

- inte tar hänsyn till uppgifternas ordning
- tar hänsyn till uppgifternas ordning

2238 Visa att $C(n, 0) = 1$ för alla värden på n

- genom att använda formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- genom att med ett resonemang förklara varför antalet sätt att välja 0 element av n element är 1

2239 Visa att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- genom att använda formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- genom att med ett resonemang förklara varför antalet sätt att välja k element av n element är detsamma som att välja $(n-k)$ element av n .

2240 Finns det något heltal k som löser ekvationen $C(8, 5) = P(8, k)$? Motivera ditt svar.

NIVÅ 3

2241 En grupp bestående av 22 försenade tågresenärer ska åka taxi i fyra olika bilar som har plats för 7, 7, 4 respektive 4 personer. På hur många sätt kan tågresenärerna åka i taxibilarna

- om vi bryr oss om vilken plats de får inom respektive bil
- om vi inte bryr oss om vilken plats de får inom respektive bil



Kombinatoriska problem

Säg att du står framför en glasskiosk där de har sju olika smaker. Du har bestämt dig för att köpa en glass med tre kulor. På hur många sätt kan du komponera din glass?

Innan vi kan lösa problemet behöver vi klargöra förutsättningarna. Får du till exempel välja två kulor med samma smak? Och om du väljer olika sorter, spelar det då någon roll i vilken ordning smakerna kommer?

Vi kan dela in problemet i fyra fall:

1 Utan repetition, med hänsyn till ordning: Du får inte välja samma smak flera gånger, det vill säga du får inte repetera ditt val av smak. Däremot bryr vi oss om i vilken ordning du väljer dina smaker. Vi skiljer alltså på om du väljer vanilj följt av jordgubb och blåbär, eller jordgubb följt av blåbär och vanilj. Antalet sätt att välja en glass med tre kulor blir då

P(7, 3) = 7! / (7-3)! = 7! / 4! = 7 · 6 · 5 = 210

2 Utan repetition, utan hänsyn till ordning: Du får, precis som i förra fallet, inte välja samma smak flera gånger, men den här gången bryr vi oss inte om ordningen. Vanilj, följt av blåbär och sedan jordgubb räknas som samma glass som blåbär följt av jordgubb och sedan vanilj. Antalet sätt att välja en glass med tre kulor blir då

C(7, 3) = 7! / (3!(7-3)!) = 7! / (3! · 4!) = (7 · 6 · 5) / (3 · 2 · 1) = 35

3 Med repetition, med hänsyn till ordning: Du får välja samma smak flera gånger, och vi bryr oss om i vilken ordning du väljer smakerna. Det totala antalet möjliga glassar beräknas som

7^3 = 343

4 Med repetition, utan hänsyn till ordning: Du får välja samma smak flera gånger, men vi bryr oss inte om i vilken ordning du väljer smakerna. Två jordgubbskulor följt av en kula vanilj räknas alltså som samma glass som en kula vanilj följt av två jordgubbskulor. Ett sätt att beräkna det totala antalet glassar är att dela in problemet i följande fall:

- Alla smaker olika: C(7, 3) = 35
- Två olika smaker, en kula av den ena sorten och två av den andra: C(7, 2) · 2 = 42
- En enda smak: C(7, 1) = 7

Först väljer vi ut våra två smaker av 7. Därefter multiplicerar vi med 2 för att ta hänsyn till att vi antingen kan ta två kulor jordgubb och en kula vanilj eller två kulor vanilj och en jordgubb.

De fyra kombinatoriska modellerna

Det totala antalet glassar blir: 35 + 42 + 7 = 84

Att dela upp beräkningarna på detta sätt blir arbetsamt om antalet kulor är stort. Man kan visa att antalet glassar direkt kan beräknas som

C(7 + 3 - 1, 3) = C(9, 3) = 84

I uppgift 2257 får du resonera dig fram till ett bevis för det allmänna fallet.

Vi generaliserar fallet med glassarna och säger att vi har n olika smaker och ska göra en glass med k kulor. I tabellen här nedanför sammanfattar vi de möjliga fallen. I de fall då vi inte tillåter repetition av smaker måste k ≤ n.

	Med hänsyn till ordning	Utan hänsyn till ordning
Utan repetition	① P(n, k) = n! / (n - k)!	② C(n, k) = n! / (k!(n - k)!)
Med repetition	③ n^k	④ C(n + k - 1, k)

Kan också skrivas C(n + k - 1, n - 1)

Exempel:

På planeten Heptunus har man ett alfabet som består av sju bokstäver. Alla kombinationer av bokstäver kallar de ord. Hur många ord finns det med

- a) 2 bokstäver
- b) 3 bokstäver
- c) 4 bokstäver, om ingen bokstav får förekomma två gånger i samma ord

Lösning: a) Vi ska göra två val där ordningen spelar roll, eftersom vi har en första, och en andra bokstav. Vid varje val har vi 7 alternativ.

Antal möjliga sätt är 7^2 = 49 Motsvarar fallet med repetition och med hänsyn till ordning

Svar: Det finns 49 ord med två bokstäver.

b) Antal sätt är 7^3 = 343 Samma modell som i a)

Svar: Det finns 343 ord med tre bokstäver.

c) Här ska vi välja utan repetition men med hänsyn till ordning.

Antal sätt är 7! / (7 - 4)! = 7! / 3! = 7 · 6 · 5 · 4 = 840

Svar: Det finns 840 ord med fyra bokstäver, där alla bokstäver är olika.

Exempel:

På vägen till skolan passerar Love 5 trafikljus. Sannolikheten att ett trafikljus visar rött är i det enskilda fallet 0,7. Hur stor är sannolikheten att Love får rött ljus exakt två gånger på vägen till skolan?

Lösning: Sannolikheten att få rött ljus vid de två första trafikljusen, men inte i något av de övriga är

$$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \quad \text{Sannolikheten att det inte är rött ljus i ett enskilt trafikljus är } 1 - 0,7 = 0,3$$

Men det är lika sannolikt att få rött ljus vid två andra av de fem trafikljusen, t.ex. de två sista:

$$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$$

Vi kan välja ut de två trafikljusen där Love ska få rött ljus på $\binom{5}{2}$ sätt. Detta är det totala antalet möjliga utfall. Sannolikheten att exakt två av trafikljusen visar rött blir därför:

$$\binom{5}{2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 0,1332$$

Svar: Sannolikheten att Love får rött ljus 2 gånger av 5 är ungefär 0,13.

Exempel:

Tränaren till ett juniorlag har till en fotbollsturnering tagit ut en trupp på totalt 16 spelare. Av dem är 4 överåriga. Reglerna säger att högst 2 av 11 spelare på planen får vara överåriga.

- På hur många sätt kan man ta ut laget till den första matchen?
- På hur många sätt kan laget tas ut, om truppen innehåller två målvakter som båda är juniorer?

Lösning:

- Det finns tre olika sätt att ta ut laget rent åldersmässigt: 0, 1 eller 2 överåriga på planen.
0 överåriga ger att 11 spelare ska väljas bland 12 juniorer. Det kan göras på $\binom{12}{11} = 12$ olika sätt.
1 överårig kan väljas på $\binom{4}{1}$ olika sätt och 10 juniorer kan väljas på $\binom{12}{10}$ sätt. Det ger $\binom{4}{1} \cdot \binom{12}{10} = 264$ sätt
2 överåriga och 9 juniorer kan väljas på $\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{9} = 1\,320$ sätt
Totalt finns det alltså $12 + 264 + 1\,320 = 1\,596$ möjliga laguttagningar.
- Ett liknande resonemang som ovan ger
 $\binom{2}{1} \cdot \left(\binom{4}{0} \cdot \binom{10}{10} + \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{9} + \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{8} \right) = 622$ olika uttagningar

NIVÅ 1

- Till en födelsedagsfest kommer 12 inbjudna personer. På hur många sätt kan de inbjudna anlända till festen om de kommer en och en?
- I en klass med 32 elever kommer det att delas ut 8 likadana priser. På hur många olika sätt kan priserna fördelas om varje elev kan få endast ett pris?
- I en kursgrupp i en skidskola ingår 6 kursdeltagare. Vid den första träffen hälsar alla på varandra genom att skaka hand.
 - Hur många handskakningar blir det?
 - Hur många handskakningar blir det om samtliga deltagare också hälsar på ledaren?
- Svenne har födelsedagsfest och vill prova att arrangera ett spel som liknar Lotto. Du är en av gästerna och ni ska välja 3 nummer från 1 till 10, innan det blir dragning. Hur stor är sannolikheten att du lyckas pricka in 3 rätt på din rad om ordningen mellan numren inte spelar någon roll?

- James ska lösa följande problem:

En representant för ett företag ska bjuda fyra kunder på lunch. Före lunchen hälsar alla på varandra genom att skaka hand. Hur många handskakningar blir det totalt?

James tänker att eftersom det är 5 personer på lunchen och varje person skakar hand med 4 andra, så blir det $5 \cdot 4 = 20$ handskakningar. Oliver har löst uppgiften på ett annat sätt och säger att James lösning inte stämmer.

- Vilket är det korrekta antalet?
- Hur kan man använda James idé till lösning för att på ett enkelt sätt beräkna det rätta antalet handskakningar?

- Calle funderar över hur stor sannolikheten är att få precis tre sexor om man kastar fem 6-sidiga tärningar. Han kommer fram till uttrycket $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)$. Hur kan Calle ha tänkt?

NIVÅ 2

- När du spelar poker får du 5 kort på handen. Beräkna sannolikheten att
 - precis en av dem är en tia
 - precis 2 av dem är tior
- I en urna finns 10 röda och 8 svarta kulor. Av dem väljer du slumpmässigt ut 7 kulor. Beräkna sannolikheten att 4 av dem är svarta, om du räknar
 - med återläggning
 - utan återläggning
- En nyfiken kemist laborerar med 11 olika ämnen. Två av ämnena exploderar om de kommer i kontakt med varandra. På hur många olika sätt kan kemisten göra en blandning av 5 ämnen och samtidigt undvika en explosion?
- När Jonas skjuter från trepoängslinjen är sannolikheten att han sätter bollen 0,35. Under en match skjuter han i genomsnitt 8 gånger från trepoängslinjen. Vad är sannolikheten att han sätter mer än hälften av de skotten?



2252 Motivera varför det finns n^k olika sätt att välja k element ur en mängd med n element, om man tar hänsyn till ordning och tillåter repetition.

2253 I en internationell konferens deltar 23 länder, däribland Chile, Indien och Sverige. Under konferensen vill man bilda en arbetsgrupp bestående av 9 länder som huvudsakligen ska ägna sig åt hälsofrågor. I arbetsgruppen får inte Chile, Indien och Sverige ingå samtidigt. På hur många olika sätt kan man bilda arbetsgruppen?

2254 Gabriella, Thuy, Mathilda, Maria och Sara ska gå på bio. De har fått platserna 112–116.

- På hur många sätt kan tjejerna placera sig på de fem platserna?
- Hur många placeringar finns det om Mathilda vill sitta i mitten?
- Hur många placeringar finns det om Gabriella och Thuy bråkat och inte vill sitta bredvid varandra?

2255 En pokerhand består av fem slumpvis utdelade kort ur en kortlek med 52 kort.

- Hur många olika pokerhänder finns det?
- Hur många pokerhänder finns det där alla fem kort har samma färg (spader, klöver, ruter eller hjärter)?
- Hur många pokerhänder med stege finns det?

NIVÅ 3

2256 Formeln för hur man beräknar antalet möjliga kombinationer med repetition och utan hänsyn till ordning ges av

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Visa att detta ger samma värde som

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

2257 Här ska vi föra ett resonemang om varför antal möjliga sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning är $\binom{n+k-1}{k}$. Enligt föregående uppgift kan vi lika gärna visa att antalet möjliga sätt ges av $\binom{n+k-1}{n-1}$, och det har visat sig att detta är enklare. Vi tillåter även $k > n$ eftersom det är med repetition.

Säg att det finns tre olika godissorter (n) och att du ska välja 5 bitar (k). Om vi kallar sorterna a , b och c , så är några möjliga val: $aaaaa$, $aaabb$, $abbcc$ och $acccc$. Eftersom vi inte tar hänsyn till ordning representerar valet $aaabb$ samma val som t.ex. $aabba$. Vi ska illustrera detta på två olika sätt i en tabell. I högra spalten delar vi in bitarna i tre fack, i stället för att markera dem med a , b eller c . Facken avdelas med ett lodrätt streck och det krävs två sådana streck för att dela in i tre fack.

$aaaaa$	○ ○ ○ ○ ○	Samtliga bitar i första facket.
$aaabb$	○ ○ ○ ○ ○	Tre bitar i första facket, två i andra och ingen i tredje.
$abbcc$	○ ○ ○ ○ ○	En bit i det första facket och två bitar i de två övriga.
$acccc$	○ ○ ○ ○ ○	En bit i första facket, tomt i andra och fyra bitar i tredje.

- Hur ska de lodräta strecken, respektive ringarna placeras för att motsvara valet $bbbcc$?
- Förklara med hjälp av tabellen varför det totala antalet val som kan göras är $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$
- Utvidga ditt resonemang och motivera varför det finns $\binom{n+k-1}{n-1}$ sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning.

2258 Carl har 7 hinkar i olika färger.

- På hur många sätt kan han placera 20 tennisbollar i de olika hinkarna?
- På hur många sätt kan han placera de 20 tennisbollarna om det måste ligga minst en boll i varje hink?

Binomialsatsen

Förmodligen känner du till kvadreringsregeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

och kanske även kubregeln

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Men hur utvecklar man uttryck som $(a+b)^n$, när $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$)? Man kan förstås skriva uttrycket i formen $(a+b)(a+b) \cdots (a+b)$ med n faktorer och multiplicera som vanligt eller ta hjälp av kvadrerings- eller kubregeln upprepade gånger. Men vi ska här visa ett enklare sätt att direkt utveckla $(a+b)^n$.

Vi tar uttrycket där $n = 4$ som inledande exempel, dvs.

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Om vi multiplicerar ihop binomen, så kommer vi att få termer där summan av exponenterna är 4. De möjliga termerna blir av typen a^4 , ab^3 , a^2b^2 , a^3b och b^4 . Efter förenkling kommer vi alltså att få ett polynom i formen

$$(a+b)^4 = C_0a^4 + C_1a^3b + C_2a^2b^2 + C_3ab^3 + C_4b^4$$

Men hur ska vi bestämma hur många termer vi får av varje sort, det vill säga hur ska vi bestämma koefficienterna C_0 , C_1 , C_2 , C_3 och C_4 ? Proceduren att multiplicera ihop binomen motsvaras av att ur varje parentes välja antingen ett a eller ett b . Till exempel kan vi få termen a^3b genom att välja a ur de tre första parenteserna och b ur den sista

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \text{ ger } aaab = a^3b$$

eller genom att välja b ur den andra och a ur de övriga parenteserna

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \text{ ger } abaa = a^3b$$

Att bestämma koefficienten framför a^3b blir därför detsamma som att bestämma på hur många sätt vi kan välja ett b av fyra möjliga. Det kan göras på $\binom{4}{1} = 4$ olika sätt och vi får koefficienten 4 framför a^3b .

Övriga koefficienter får vi med samma resonemang:

Den första termen med a^4 innehåller inte alls b och det betyder att vi ska välja noll stycken b av 4 möjliga. Det kan göras på $\binom{4}{0} = 1$ sätt. Alltså får vi koefficienten 1 framför a^4 .

Koefficienten framför a^3b har vi redan bestämt här ovanför till 4.

Termen med a^2b^2 innebär att vi från binomen ska välja två b :n av fyra möjliga. De kan väljas på $\binom{4}{2}$ olika sätt och vi får koefficienten 6 framför a^2b^2 .

Fallet $(a+b)^n$

Ett binom är ett polynom med precis två termer, till exempel $m+3n$, x^2+2xy , eller $a+a^3$

När vi multiplicerar ihop parenteserna får vi a^3b på fyra olika sätt: $baaa$, $abaa$, $aaba$ och $aaab$. Eftersom multiplikation är kommutativ så behöver vi inte ta hänsyn till den inbördes ordningen av a och b i produkterna.

T.ex. $baaa$ och $baba$

Termen ab^3 motsvaras av att välja 3 av 4 möjliga b :n och termen b^4 av att välja 4 av 4 möjliga b :n. Det kan ske på $\binom{4}{3} = 4$ respektive $\binom{4}{4} = 1$ olika sätt.

$$\text{Vi får alltså } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Resonemanget kan utan vidare utvidgas till godtyckligt $n \in \mathbb{N}$. För termen $C_k a^{n-k} \cdot b^k$ i utvecklingen av $(a+b)^n$ gäller ju att vi ska välja k stycken b av n stycken, alltså är koefficienten $C_k = \binom{n}{k}$. Vi sammanfattar detta i en sats.

Binomialsatsen

Om n är ett naturligt tal, så gäller

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \end{aligned}$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kallas *binomialkoefficienter*.

Pascals triangel

Binomialkoefficienterna hittar man i *Pascals triangel*. Om du tittar på rad 4, så ser du att elementen 1, 4, 6, 4, 1 stämmer överens med koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^4$.

Rad 0					1				
Rad 1				1		1			
Rad 2			1		2		1		
Rad 3		1		3		3		1	
Rad 4	1		4		6		4		1
Rad 5	1	5		10		10		5	1

Triangeln har ettor längs kanterna och elementen inne i triangeln får man genom att addera de två elementen snett ovanför. Till exempel ser vi att vi får det första talet 10 på rad fem som summan av elementen 4 och 6 på rad fyra. Detta hör samman med att termerna i utvecklingen av $(a+b)^5$ kan härledas från utvecklingen av $(a+b)^4$. Det gäller ju att $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$.

Det första talet 10 på rad fem hör till termen a^3b^2 i utvecklingen av $(a+b)^5$. Utnyttjar vi att $(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4$ kan vi se att denna term kommer från två olika multiplikationer

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= (a+b)(a+b)^4 = (a+b)(\dots + 4a^3b + 6a^2b^2 + \dots) = \\ &= \dots + 4a^3b^2 + 6a^3b^2 + \dots \end{aligned}$$

Vi ser alltså att $4a^3b^2 + 6a^3b^2 = 10a^3b^2$, dvs. att en koefficient i utvecklingen av $(a+b)^5$ är summan av två av de koefficienter som förekommer i utvecklingen av $(a+b)^4$. Detta gäller generellt och framkommer i Pascals triangel.

Exempel:

Utveckla uttrycket $(a+b)^5$.

Lösning:

Koefficienterna kan vi finna på rad 5 i Pascals triangel.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Exempel:

Vilken är koefficienten framför $x^{14}y^3$ i utvecklingen av uttrycket $(x-2y)^{17}$?

Lösning:

För att kunna använda binomialsatsen utnyttjar vi att binomet $(x-2y)$ kan skrivas $(x+(-2y))$. Varje term i utvecklingen av uttrycket $(x+(-2y))^{17}$ har enligt binomialsatsen formen

$$\binom{17}{k} \cdot a^{17-k} \cdot b^k. \text{ Termen av typen } x^{14}y^3 \text{ är alltså } \binom{17}{3} \cdot x^{14} \cdot (-2y)^3.$$

Förenkling ger

$$\frac{17!}{3!(17-3)!} \cdot x^{14} \cdot (-2)^3 \cdot y^3 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{14} \cdot (-8) \cdot y^3 = -5 \cdot 440 x^{14} y^3$$

Svar: Koefficienten framför $x^{14}y^3$ är $-5 \cdot 440$.

NIVÅ 1

2259 Titta på Pascals triangel på föregående sida.

- Skriv ut den 6:e raden genom att utnyttja att man får ett element inne i triangeln genom att addera de två elementen snett ovanför.
- Skriv dessutom ut raderna 7 och 8.

2260 Utveckla uttrycket $(a+b)^6$ med hjälp av Pascals triangel.

2261 Utveckla uttrycket $(a-b)^6$ genom att utnyttja att $(a-b) = (a+(-b))$.

2262 Utveckla uttrycket $(2x+y)^5$ med hjälp av binomialsatsen.

2263 Hur många termer finns det i utvecklingen av $(x+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$?

2264 Förklara varför koefficienterna framför a^n och b^n alltid är 1 i utvecklingen av $(a+b)^n$.

NIVÅ 2

2265 Bestäm den tredje termen i utvecklingen av uttrycken

$$\text{a) } (3x+4y)^7 \quad \text{b) } (a^2-b)^{10}$$

2266 Bestäm koefficienten för termen x^5y^7 i utvecklingen av uttrycket $(x+6y)^{12}$.

2267 Binomialutvecklingen av $(a+b)^n$ innehåller vissa termer med samma koefficient om $n > 2$.

- Förklara varför vissa termer har samma koefficient.
- För vissa n finns det en term som inte har samma koefficient som någon annan term. För vilka värden på n gäller det?

NIVÅ 3

2268 Bestäm koefficienten för a^7 -termen i utvecklingen av $\left(a^2 - \frac{3}{a}\right)^5$.

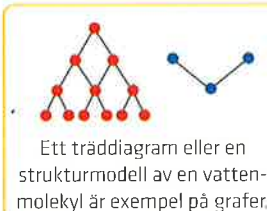
Resonemang och begrepp

- ➔ Hur bildar man den kartesiska produkten av två mängder?
- ➔ Vad är skillnaden mellan permutationer och kombinationer?
- ➔ Förklara vad som menas med $n!$ om n är noll eller ett positivt heltal.
- ➔ Vilken koppling finns mellan begreppet kombination och binomialsatsen?

2.3 Grafteori

Ordbooken

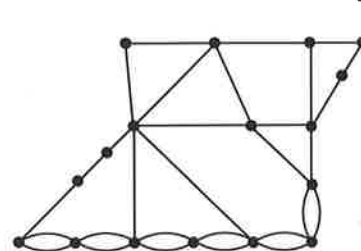
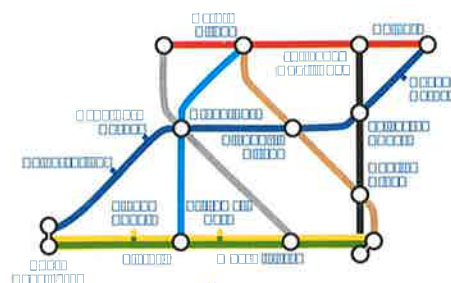
Graf kommer från grekiskans *graphein* som betyder skriva.



Vad är en graf?

Hittills har du troligtvis förknippat ordet graf främst med funktioner, men begreppet graf kan ha flera olika betydelser inom matematiken. I tidigare matematikkurser har du t.ex. stött på träd-diagram och i andra ämnen kanske någon typ av flödesschema, kopplingsschema eller molekylstruktur.

De grafer du kommer att möta i detta delkapitel kan liknas vid en karta som beskriver buss- eller tunnelbanelinjer i en stad. En sådan karta visar stationer och färdvägar mellan stationerna.



Grafteori

Den del av matematiken som behandlar den här typen av grafer kallas *grafteori*. Inom grafteori kallas det som motsvarar en station för *hörn* och färdvägen mellan två intilliggande stationer kallas för *kant*.

Ett annat namn för kant är *båge*.

Ett annat namn för hörn är *nod*.



En kant går antingen mellan två hörn eller börjar och slutar i samma hörn. Ett hörn kan ha ett godtyckligt antal kanter som går in till hörnet, eller ingen kant alls. Figuren till vänster visar en graf med två hörn och två kanter.

Grafteori kan vara ett viktigt hjälpmedel vid optimering av produktion eller minimering av kostnader. Till exempel kan varje hörn eller kant innebära en viss kostnad. Med hjälp av grafteori kan man då bestämma den minsta total-kostnaden. I det här kapitlet kommer vi att nöja oss med att introducera några vanliga begrepp och enklare tillämpningar inom grafteori. Vi kommer även att ta upp några kända grafteoretiska problem.

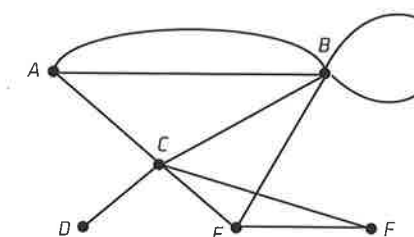
Grafteori är ett ganska nytt område inom matematiken och har utvecklats parallellt av både matematiker och datavetare. Det har lett till att begrepp och definitioner kan variera mellan olika användare.

Ögla och grad

Ett annat namn för ögla är *loop*.

Hörnets grad kallas även hörnets *valens*.

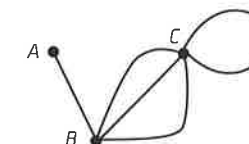
Det är tillåtet för en graf att ha flera kanter mellan två hörn. Ett exempel på det ser du mellan hörn *A* och hörn *B* i figuren här nedanför. En kant som börjar och slutar i samma hörn kallas *ögla*. Kant 3 är ett exempel på en ögla. Lägg märke till att kant 7 inte är förbunden med kant 6. De korsar varandra utan att det finns något hörn där. Det kan jämföras med en planskild korsning i ett vägnät, t.ex. en vägbro som går över en motorväg. Antalet kanter som går in till ett hörn kallas för hörnets *grad*. Graden för *A* är alltså 3 och det skrivs $\deg(A) = 3$. På samma sätt ser vi att $\deg(C) = 5$. För en ögla ska man räkna med kantens båda ändar. Det innebär att $\deg(B) = 6$.



<i>n</i>	$\deg(n)$
A	3
B	6
C	5
D	1
E	3
F	2

Exempel:

Vilken grad har respektive hörn?



Lösning:

Vi räknar hur många kanter som går in till respektive hörn.

- $\deg(A) = 1$ Det går ut endast en kant från *A*
- $\deg(B) = 4$ Det går ut 4 kanter från *B*
- $\deg(C) = 5$ Båda ändarna av öglan räknas

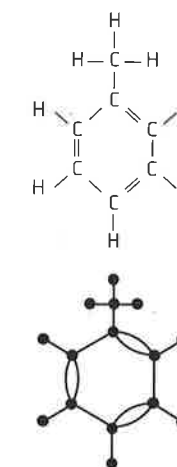
Exempel:

Metylbensen $C_6H_5CH_3$, även kallad toluen, har molekylstruktur enligt figuren till höger.

Rita en graf som representerar molekylstrukturen för metylbensen.

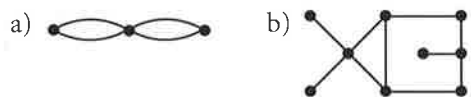
Lösning:

Atomerna motsvaras av grafens hörn och de kemiska bindningarna motsvaras av grafens kanter. Vi får därmed grafen

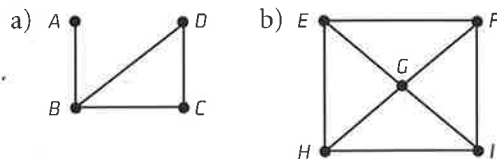


NIVÅ 1

2301 Hur många hörn och hur många kanter har följande grafer?



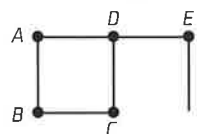
2302 Ange gradtalet för varje hörn.



2303 Rita en graf med tre hörn, där varje hörn har grad 2.

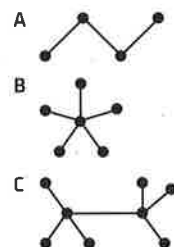
2304 Hur förändras gradtalet för ett hörn, om man lägger till en ögla vid hörnet?

2305 Varför är figuren här nedanför inte en graf?



2306 Ett *träd* är en sammanhängande graf utan cykler, dvs. man kan inte komma tillbaka till samma hörn utan att följa samma kanter.

a) Bestäm antal hörn och kanter i följande träd.



- b) Rita ett träd med 10 hörn och bestäm antalet kanter.
- c) Rita ett träd med 10 kanter och bestäm antalet hörn.
- d) Skriv en formel för sambandet mellan antal hörn och antal kanter i ett träd.

NIVÅ 2

2307 En graf har 5 kanter. Bestäm summan av hörnens gradtal.

2308 Alkaner är en grupp kolväteföreningar som även kallas för mättade kolväten, eftersom de endast har enkelbindningar mellan atomerna. Kemister använder ofta träd för att rita molekylstrukturer. I modellerna som används här nedanför är varje hörn en kolatom och varje kant en bindning mellan två kolatomer. Väteatomerna har utelämnats. En kolatom kan binda upp till fyra andra atomer.

I tabellen ser du namn, molekylformler och molekylstrukturer för de fyra första alkanerna.

Metan	CH_4	
Etan	C_2H_6	
Propan	C_3H_8	
Butan	C_4H_{10}	

Som du ser, finns det två varianter av molekylstrukturer för butan, även om antalet kolatomer respektive väteatomer är detsamma. Man säger att de är isomerer.

- a) Kolvätet pentan (C_5H_{12}) har tre isomerer. Rita molekylstrukturer på samma sätt som i tabellen för dessa isomerer.
- b) Bestäm antalet isomerer till kolvätet hexan (C_6H_{14}).

NIVÅ 3

2309 Bevisa följande sats:

Om $h_1, h_2, \dots, h_n$ är hörn i en graf, så är $\sum_{i=1}^n \deg(h_i)$ ett jämnt tal.

2310 Visa att i en förening, med godtyckligt antal medlemmar, är antalet personer som är bekanta med ett udda antal personer inom föreningen ett jämnt tal.

Königsberg var namnet på en stad i Ostpreussen. Sedan andra världskrigets slut har den tillhört Ryssland och heter numera Kaliningrad.

Eulervägar och Eulerkretsar

Det första arbetet i grafteori gjordes år 1736 av Leonhard Euler som en lösning på det klassiska problemet *Königsbergs broar*.

I Königsberg fanns en del av stadens bebyggelse på två öar omgivna av en flod. Det fanns broar från fastlandet till öarna och även en bro mellan öarna.

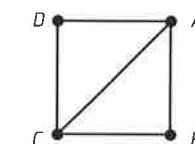


Ett problem som lär ha förbryllat stadens invånare var att det inte tycktes vara möjligt att gå över stadens sju större broar och passera varje bro endast en gång. Men även om många personer hade försökt, så kunde de inte utesluta att det fanns en möjlighet som någon

hade missat. Euler använde grafteori för att bevisa att promenaden faktiskt var omöjlig att genomföra. Här nedanför kommer vi att visa hur han resonerade, men för att kunna följa det resonemanget inför vi två nya begrepp: *Eulerväg* och *Eulerkrets*.

Eulerväg

En förflyttning i en graf från hörn till hörn längs en eller flera kanter kallas en *vandring*. En *väg* är en vandring där ingen kant passerar mer än en gång. T.ex. är vandringen $B \rightarrow A \rightarrow D$ i figuren en väg från B till D medan vandringen $B \rightarrow A \rightarrow B$ inte är en väg. Det finns grafer där det är möjligt att vandra i grafen på ett sådant sätt att man passerar varje kant exakt en gång. En sådan graf sägs innehålla en *Eulerväg*.



Vandringen $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$ är en Eulerväg

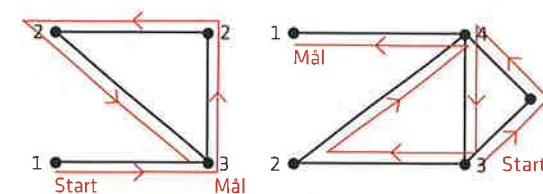
I en Eulerväg är det tillåtet att passera hörnen mer än en gång.

Om det finns högst två hörn med udda gradtal, så existerar det en Eulerväg och vice versa.

En graf innehåller en Eulerväg om och endast om den har högst två hörn med udda gradtal. Att det inte finns fler än två hörn med udda gradtal är ett både nödvändigt och tillräckligt villkor för att det ska existera en Eulerväg.

Om man ska vandra mellan hörnen i en graf, så rör man sig mot ett hörn lika många gånger som man rör sig bort från ett hörn. Om man bortser från start- och slutpunkt, så måste därför antalet kanter förbundna med ett hörn vara ett jämnt tal. Endast hörnen för start- och slutpunkt kan med andra ord ha udda gradtal.

Du ser här intill två exempel på grafer som innehåller Eulervägar. I båda graferna finns fler Eulervägar än de som markerats.

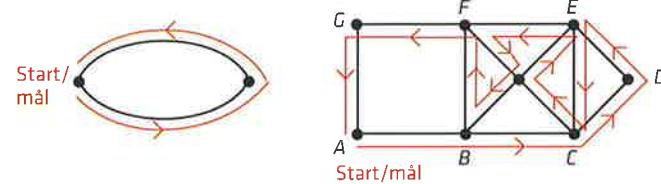


I figurerna finns hörnens gradtal angivna.

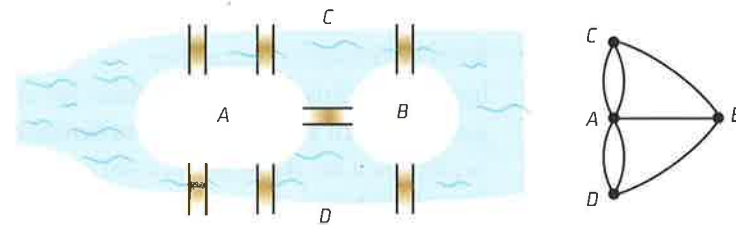
Om det är möjligt att genomföra en vandring i en graf och passera varje kant exakt en gång för att slutligen återvända till samma hörn, så innehåller grafen en *Eulerkrets*.

En Eulerväg som har start och mål i samma hörn är en Eulerkrets.

Du ser här två exempel på Eulerkretsar. Vilket villkor som gäller för att en graf ska innehålla en Eulerkrets får du själv formulera i uppgift 2320.



Vi ritar en schematisk bild av Königsbergs broar och översätter sedan bilden till en graf.



Grafens hörn är olika stadsdelar och grafens kanter är broarna

Att bevisa att det inte är möjligt att gå över stadens sju större broar och passera varje bro endast en gång är detsamma som att bevisa att det inte går att vandra mellan hörnen i grafen och passera varje kant exakt en gång. Man behöver alltså bevisa att grafen som motsvarar Königsbergs broar *inte* kan innehålla en Eulerväg. Tittar vi på grafen ser vi att det finns fyra hörn med udda gradtal. Grafen kan därmed inte innehålla en Eulerväg och det går alltså inte att gå över stadens sju större broar och passera varje bro endast en gång.

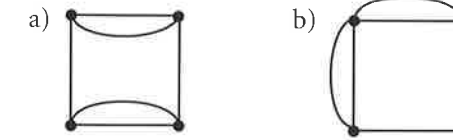
Några grafteoretiska begrepp

Vandring	En förflyttning i en graf från hörn till hörn längs en eller flera kanter.
Väg	En vandring i en graf som inte passerar någon kant mer än en gång.
Eulerväg	En väg som passerar varje kant i grafen exakt en gång.
Krets	En väg som är sluten, dvs. börjar och slutar i samma hörn.
Eulerkrets	En Eulerväg som börjar och slutar i samma hörn.

Vi påminner om att begreppens namn varierar mellan olika användare.

Exempel:

Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.



Lösning:

a) För att ta reda på om grafen har en Eulerväg undersöker vi hörnens gradtal. Samtliga fyra hörn har grad 3, som är ett udda tal. Grafen kan då inte innehålla någon Eulerväg.

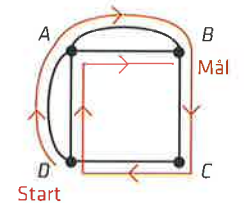
b) Vi börjar med att bestämma hörnens grad.

$$\deg(A) = 4$$

$$\deg(B) = \deg(D) = 3$$

$$\deg(C) = 2$$

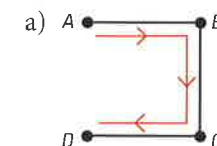
Exakt två hörn har udda gradtal och därför finns det en Eulerväg i grafen. Ett exempel på en sådan väg är inritat i grafen med start i D och mål i B.



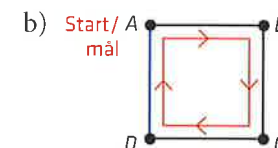
Exempel:

- Rita en graf med minst fyra hörn, som innehåller en Eulerväg, men inte en Eulerkrets.
- Komplettera grafen, så att den kommer att innehålla en Eulerkrets.
- Kan kompletteringen göras på olika sätt?

Lösning:

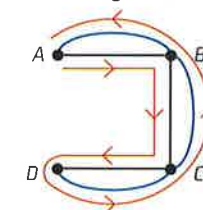


Vi kan gå från A till D och passera varje kant en gång. Alltså har vi en Eulerväg. Däremot är det inte möjligt att återvända till A utan att passera kanterna mer än en gång. Grafen innehåller därför ingen Eulerkrets.



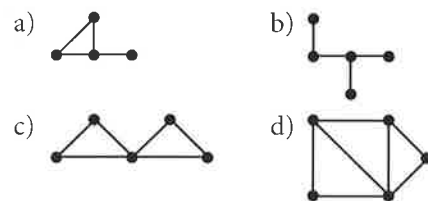
Vi lägger till en kant mellan hörnen D och A. Vi kan då rita en väg som börjar och slutar i samma hörn och passerar varje kant exakt en gång, dvs. grafen har en Eulerkrets.

c) Ja, det finns flera olika sätt, men det som presenteras i b) är det enklaste. Figuren här nedanför visar ett annat sätt.



NIVÅ 1

2311 Innehåller grafen en Eulerväg?



2312 Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.



2313 Rita en graf som innehåller fler än två hörn med udda gradtal, dvs. en graf som inte har en Eulerväg.

2314 Rita en graf med två öglor som innehåller en Eulerväg.

2315 Grafen i figuren innehåller en Eulerkrets. Kommer grafen fortfarande att innehålla en Eulerkrets, om man lägger till en ögla vid något av hörnen? Motivera ditt svar.



- 2316** a) Rita en graf med minst 5 hörn som innehåller en Eulerväg men inte en Eulerkrets.
b) Komplettera din graf så att den kommer att innehålla en Eulerkrets.
c) Kan kompletteringen göras på något annat sätt? Motivera ditt svar.

NIVÅ 2

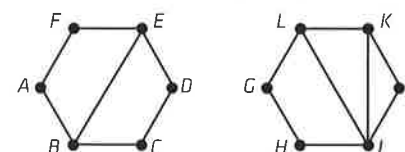
2317 Om det i en graf finns en eller flera Eulervägar, var måste då start och mål ligga för en sådan väg?

2318 Som vi såg på sidan 82 är promenaden över Königsbergs sju broar omöjlig att genomföra som en Eulerväg.

- a) Går det att genomföra promenaden som en Eulerväg om man bygger en bro till? Var ska bron i så fall byggas?
b) Vid ett tillfälle var en bro avstängd och då blev det genast möjligt att genomföra promenaden som en Eulerväg. Går det med säkerhet att säga vilken bro som var avstängd?



2319 Här nedanför ser du två grafer.



- a) Rita av graferna och sammanbind dem med 2 kanter så att de tillsammans har en Eulerkrets. Markera även Eulerkretsen i din figur.
b) Förklara varför 2 kanter är det minsta antalet kanter som behövs.

NIVÅ 3

2320 Vissa grafer innehåller Eulerkretsar.

- a) Vilket villkor gäller för att en graf ska innehålla en Eulerkrets?
b) Genomför ett resonemang som skulle kunna utvidgas till ett bevis för att ditt påstående i a) är sant.

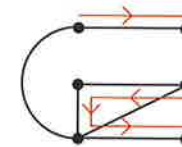
Hamiltonstigar och Hamiltoncykler

Ett bussföretag ska planera en ny busslinje genom ett villaområde. De vill veta om de kan lägga rutten så att bussen passerar varje hållplats precis en gång och sedan återvänder till startpunkten. Om vi låter hållplatserna utgöra hörnen i en graf, så frågar vi oss alltså: Kan vi hitta en väg i grafen som passerar varje hörn precis en gång? Kan vi dessutom göra det så att vägen återvänder till startpunkten?

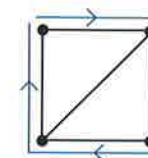
Hamiltonstig och Hamiltoncykel

Begreppen Hamiltonstig och Hamiltoncykel har uppkallats efter den irländske matematikern William Hamilton (1805–1865).

En väg som passerar *varje hörn* i grafen *precis en gång*, kallas för en *Hamiltonstig*. Om Hamiltonstigen återvänder till startpunkten så kallas den för en *Hamiltoncykel*. I den vänstra grafen här nedanför är den röda vandringen en Hamiltonstig, eftersom den passerar varje hörn i grafen och bara gör det precis en gång. Den blå vandringen i den högra grafen är en Hamiltoncykel, eftersom den passerar varje hörn exakt en gång och dessutom återvänder till startpunkten.



Detta är en Hamiltonstig, eftersom varje hörn i grafen passerar exakt en gång. Det är inte en Eulerväg, eftersom varje kant inte passerar.



Detta är en Hamiltoncykel, eftersom varje hörn passerar precis en gång och man återvänder till startpunkten. Det är inte en Eulerkrets, eftersom varje kant inte passerar.

Bussföretagets fråga är alltså om det finns någon Hamiltoncykel i den graf som representerar bussrutten. Problemet är lätt att formulera men – visar det sig – i många fall oerhört svårt att lösa. Än i dag finns inget generellt sätt att enkelt kontrollera om en given graf har en Hamiltonstig eller en Hamiltoncykel.

Fler grafteoretiska begrepp

Stig	En väg som inte passerar något hörn mer än en gång.
Hamiltonstig	En stig som passerar varje hörn exakt en gång.
Cykel	En stig som är sluten, dvs. börjar och slutar i samma hörn.
Hamiltoncykel	En Hamiltonstig som börjar och slutar i samma hörn.

Ett klassiskt grafteoretiskt problem med anknytning till dessa begrepp är det som brukar kallas *en handelsresandes problem*. Problemet frågar efter den kortaste resvägen för en handelsresande som ska besöka ett antal städer och sedan återvända till startpunkten igen. I en graf där alla hörn (städer) är förbundna med varandra gäller det alltså att hitta den Hamiltoncykel (resväg) som ger kortast reslängd. När man löser den här typen av problem brukar man skriva ut avståndet mellan städerna längs grafens kanter. En sådan graf kallas för en *viktad graf*.

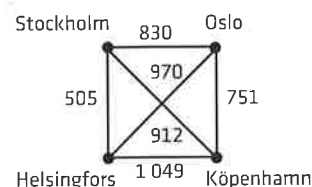
Att välja den stad som ligger närmast kan i tillämpningar också innebära att välja resmålet med kortast restid eller med den lägsta resekostnaden.

En handelsresandes problem intresserar både matematiker och datavetare, men ännu har ingen funnit en snabb metod som alltid hittar den optimala resvägen. En metod som går snabbt att använda, men som inte nödvändigtvis ger den optimala lösningen, kallas *närmaste granne-metoden*. Den går ut på att man i varje steg väljer den stad som ligger närmast.

En handelsresandes problem har viktiga tillämpningar. Med hjälp av avancerade datalösningar är det t.ex. möjligt att hitta den optimala resvägen för transportföretag som vill minimera sina resekostnader.

Exempel:

I Amandas arbete ingår en hel del resor och inte sällan besöker hon både Oslo, Köpenhamn och Helsingfors innan hon återvänder hem till Stockholm. Hon vill minimera sina resekostnader och ritas därför en viktad graf, där hon markerar de genomsnittliga kostnaderna i kronor för att åka mellan de olika destinationerna.



- Använd närmaste granne-metoden för att bestämma en möjlig resväg och beräkna totalkostnaden.
- Undersök om närmaste granne-metoden ger den optimala lösningen.

Lösning:

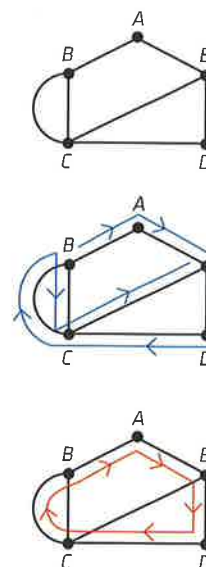
- Enligt närmaste granne-metoden väljer vi i varje steg det billigaste resmålet. Vi utgår från Stockholm och väljer det resmål som ger den lägsta kostnaden, nämligen Helsingfors (505 kr). Väl i Helsingfors väljer vi det resmål som ger den lägsta kostnaden där Amanda ännu inte varit, alltså Oslo (970 kr), osv. Resrutten blir Stockholm–Helsingfors–Oslo–Köpenhamn–Stockholm och den totala resekostnaden $505 + 970 + 751 + 912 = 3\,138$ kr.
- Vi undersöker alla tänkbara resvägar och deras kostnad. Vi märker då att resvägen Stockholm–Oslo–Köpenhamn–Helsingfors–Stockholm ger en lägre kostnad än närmaste granne-metoden, 3 135 kr.

Exempel:

- Rita en Eulerväg i grafen och avgör om den också är en Hamiltonstig.
- Rita en Hamiltoncykel i grafen och avgör om den också är en Eulerkrets.

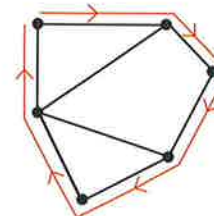
Lösning:

- Den blå vandringen med utgångspunkt i B är en Eulerväg, eftersom den passerar varje kant precis en gång. Däremot är vandringen ingen Hamiltonstig, eftersom den passerar samma hörn flera gånger.
- Den röda vandringen är en Hamiltoncykel, eftersom den passerar varje hörn och återkommer till startpunkten. Den är däremot inte en Eulerkrets, eftersom den inte passerar varje kant.

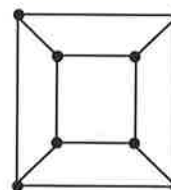


NIVÅ 1

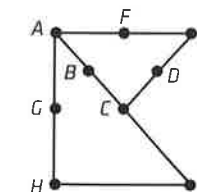
- 2321** Förklara varför den rödmarkerade vandringen i grafen är en Hamiltoncykel men inte en Eulerkrets.



- 2322** Rita av grafen här nedanför och rita sedan en Hamiltonstig och en Hamiltoncykel i grafen. Är din Hamiltoncykel också en Eulerkrets? Motivera ditt svar.

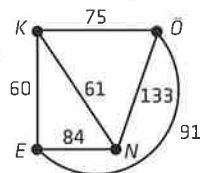


- 2323** En plogbil ska ploga gatorna i ett villaområde. Villaområdet kan modelleras med en graf där hörnen motsvarar husen i området och kanterna representerar gatorna.



- Är det möjligt för plogbilen att ploga gatorna i området utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.
- En brevbärare vill bära ut brev till samtliga hus (A–I) i villaområdet utan att passera samma hus mer än en gång. Visa att detta är möjligt om man bygger en väg från hus B till hus G.
- Om denna väg byggs, kommer då plogbilen kunna ploga i villaområdet utan att behöva ploga samma gata mer än en gång? Motivera ditt svar.

- 2324** Sofia bor i Katrineholm och är med i en performancegrupp. Under hösten ska gruppen åka på en miniturné och uppträda i Eskilstuna, Nyköping och Örebro. För att kunna göra en turnéplan vill Sofia veta i vilken ordning de ska besöka städerna för att den totala reslängden ska bli så kort som möjligt. Hon modellerar därför problemet med hjälp av en viktad graf, där avstånden anges i kilometer.



- Bestäm längden av den resväg närmaste granne-metoden ger.
- Undersök om detta är den kortaste resvägen.

NIVÅ 2

- 2325** Här nedanför visas en graf.

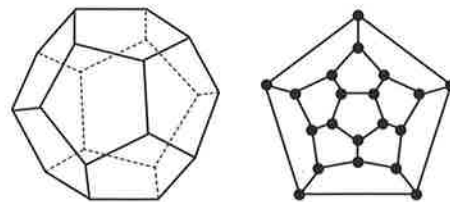


- Rita en Hamiltonstig i grafen.
- Förklara varför grafen aldrig kan ha en Hamiltoncykel.
- Ge förslag på hur grafen kan förändras för att få en Hamiltoncykel.

- 2326** Som redan nämnts är en Hamiltoncykel en krets där varje hörn passeras exakt en gång och där man återvänder till samma hörn som man startade vid. Man behöver inte passera alla kanter, men ingen kant får passeras mer än en gång.

- Påpekandet "där man återvänder till samma hörn som man startade vid" i uppgiftstexten är visserligen sant, men överflödigt. Varför?
- Det finns ytterligare ett påpekande i uppgiften som man skulle kunna stryka, eftersom det egentligen är överflödigt information. Vilket? Motivera ditt svar.

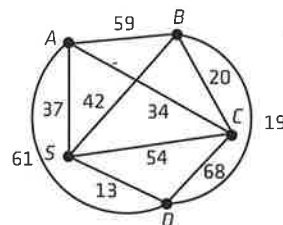
- 2327** En dodekaeder är en kropp uppbyggd av tolv regelbundna femhörningar. Den kan representeras med hjälp av en plan graf, som figuren nedanför till höger.



Rita en Hamiltoncykel i grafen.

- 2328** Rita en graf med minst 5 hörn som har
- en Hamiltonstig men inte en Eulerväg
 - en Hamiltoncykel men inte en Eulerkrets
 - en Eulerkrets men inte en Hamiltoncykel
 - både en Hamiltoncykel och en Eulerkrets
 - varken en Hamiltoncykel eller en Eulerkrets

- 2329** Fredrik driver en budbilsfirma i staden S. Han levererar ofta varor till de intilliggande orterna A, B, C och D. Bränslekostnaden i kronor för att åka mellan de olika städerna redovisas i grafen här nedanför. Fredrik vill snabbt hitta en resväg som gör att han kan besöka samtliga städer, återvända hem och samtidigt hålla nere sina bränslekostnader. Vilken resväg skulle du råda honom att ta?

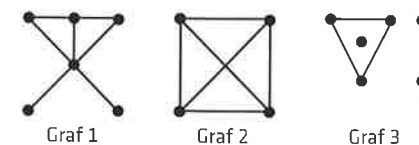


NIVÅ 3

- 2330** Vilket villkor gäller för att en graf ska ha både en Eulerkrets och en Hamiltoncykel? Motivera ditt svar.

Eulers polyederformel

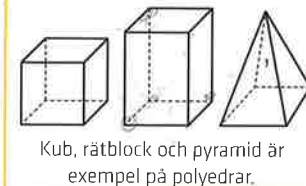
Här nedanför har vi ritat tre grafer.



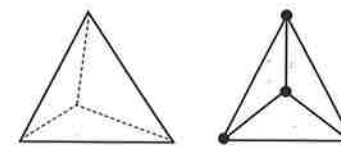
I graf 1 och 2 är det alltid möjligt att via kanter gå från ett hörn till ett annat, dvs. mellan varje par av hörn finns en väg. Sådana grafer kallas *sammanhängande*. Graf 3 är ett exempel på en graf som inte är sammanhängande. I graf 2 finns det ett ställe där två kanter korsar varandra, utan att det finns ett hörn där. Graf 1 innehåller ingen sådan korsning. En sammanhängande graf utan sådana korsningar kallas *plan sammanhängande graf*. Graf 1 är alltså en sådan graf medan graf 2 inte är det.

En *polyeder* är en kropp som begränsas av ett ändligt antal polygoner (månhörningar). Kub, rätblock och pyramid är tre exempel på polyedrar. Varje polyeder kan representeras med en plan sammanhängande graf. Här nedanför ser du en tetraeder och dess tillhörande graf.

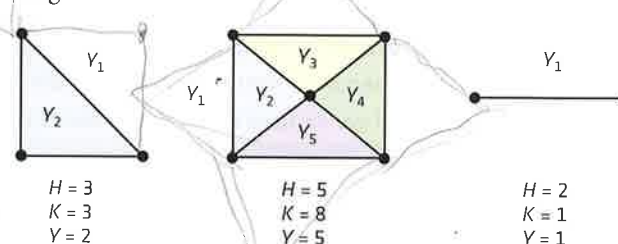
Polyedrar och plana sammanhängande grafer



Kub, rätblock och pyramid är exempel på polyedrar.



För plana sammanhängande grafer finns ett vackert samband som kallas *Eulers polyederformel*. Den visar på ett samband mellan antalet hörn, kanter och ytor i en sådan graf. Med en yta menar vi här något som helt omsluts av ett antal kanter. Även området utanför grafen räknas som en yta. Vi kallar antalet hörn för H , antalet kanter för K och antalet ytor för Y . Här nedanför ser du några grafer med H , K och Y angivna samt ytorna markerade i olika färg.



För dessa grafer gäller att antalet hörn, kanter och ytor beskrivs av formeln

$$Y + H - K = 2$$

Det är detta samband som kallas Eulers polyederformel och det gäller för alla plana sammanhängande grafer.

Eulers polyederformel

För en plan sammanhängande graf med H stycken hörn, K stycken kanter och Y stycken ytor gäller sambandet

$$Y + H - K = 2$$

Du kan enkelt kontrollera att formeln stämmer för de tre fallen på föregående sida. Kontrollera gärna också att den stämmer för någon polyeder, t.ex. ett rätblock. Ett bevis för formeln kommer i uppgift 2337.

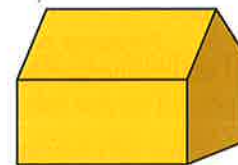
I historiaavsnittet på sidan 93 får du läsa mer om polyedrar och Eulers polyederformel.



Exempel:

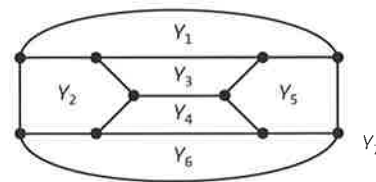
Bilden visar en enkel modell av en vanlig villa.

- Rita en graf som motsvarar den geometriska kropp som modellen utgör.
- Visa att Eulers polyederformel stämmer för din graf och för modellen.



Lösning:

- Modellens hörn motsvarar grafens hörn och modellens kanter motsvaras av grafens kanter. Vi ritar grafen



- Grafen har $H = 10$; $K = 15$ och $Y = 7$, som du kan se i lösningen till a). För modellen gäller att det finns 5 hörn på varje gavel, vilket ger att $H = 10$. Det finns 5 kanter på varje gavel, 2 på varje långsida samt en på taknocken. Det ger att $K = 15$. Det finns 2 gavlar, fram- och baksida, 2 takhalvor samt en undersida och vi får $Y = 7$. Både graf och modell ger samma resultat och insatt i Eulers polyederformel ger det $Y + H - K = 7 + 10 - 15 = 2$, v.s.v.

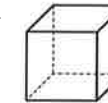
NIVÅ 1

- 2331** Hur många hörn har en plan sammanhängande graf med 12 ytor och 23 kanter?

- 2332** Rita en plan sammanhängande graf som har

- 3 ytor, 4 hörn och 5 kanter
- 4 ytor, 5 hörn och 7 kanter

- 2333** På sidan 89 ritade vi den graf som motsvarar en tetraeder. Rita på samma sätt den graf som motsvarar en kub.



NIVÅ 2

- 2334** Rita den tillhörande grafen till en fyrsidig pyramid, dvs. en pyramid som exempelvis Cheopspyramiden i Egypten. Visa även att Eulers polyederformel gäller för grafen.



- 2335** Graf 2 på sidan 89 är ett exempel på en sammanhängande graf som inte är plan. Rita en graf med lika många hörn och kanter, och där motsvarande hörn förbinds med samma antal kanter. Den nya grafen ska vara en *plan* graf.

- 2336** Leonard undersöker grafen här bredvid. Han ser att grafen har 6 ytor, 6 hörn och 9 kanter. Förbryllad konstaterar han att Eulers polyederformel inte verkar stämma. Förklara för Leonard varför formeln inte stämmer.



NIVÅ 3

- 2337** Du ska här få följa ett bevis för Eulers polyederformel. Beviset använder induktion. Det kan ibland vara lämpligt att rita egna figurer för att lättare kunna följa resonemanget.

Vi börjar med den enklast tänkbara grafen. Den har ett hörn och inga kanter.

- Visa att formeln stämmer för den grafen.

Nu finns det två sätt att gå vidare. Antingen gör man en ögla eller så gör man ett nytt hörn och drar en kant mellan de två hörnen. Grafen ska ju vara sammanhängande, så det måste gå en kant mellan hörnen.

- Visa att formeln gäller för båda dessa grafer.

Om vi har en graf där formeln stämmer, så finns det två sätt att gå vidare. Det ena är att dra en ny kant, utan att göra nya hörn. Kanten kan antingen vara en ögla eller gå mellan två existerande hörn.

- Motivera varför formeln fortfarande stämmer.

Det andra sättet att gå vidare är att göra ett nytt hörn, som då måste förbindas via en kant med något hörn i övriga grafen.

- Varför måste det nya hörnet förbindas med resten av grafen?
- Motivera varför formeln fortfarande stämmer.
- Varför bevisar ovanstående att formeln gäller för alla plana sammanhängande grafer?

Resonemang och begrepp

- ☞ Kan en graf med 4 kanter ha såväl 2, 3, 4 som 5 hörn? Motivera med figurer.
- ☞ Varför är det inte möjligt att konstruera en sammanhängande graf med tre hörn där alla tre hörnen har grad 3?
- ☞ Vad ska gälla för att en Eulerväg även ska vara en Eulerkrets?
- ☞ En Eulerkrets kan ha start och mål i vilket hörn som helst på kretsen. Motivera varför.
- ☞ Finns det något samband mellan antal hörn och antal kanter i en graf?



Grafteori och de platonska kropparna

En polyeder är en kropp där varje sidoyta är en månghörning. För en regelbunden polyeder gäller dessutom att alla sidoytor är kongruenta regelbundna polygoner, och att det i varje hörn möts lika många sidoytor. Ett exempel på en regelbunden polyeder är en vanlig kub. Där är sidoytorna kvadrater och tre sidoytor möts i varje hörn.

Euklides bevisade redan omkring 300 f.Kr. i Elementa XIII att det endast finns fem regelbundna polyedrar, de så kallade *platonska kropparna*. I tabellen ser du vilka de fem kropparna är och vilka egenskaper de har.



De fem platonska kropparna.

Kropp	Sidoytans form	Antal sidoytor	Antal kanter/sidoytor per hörn
Tetraeder	Triangel	4	3
Kub	Kvadrat	6	3
Oktaeder	Triangel	8	4
Dodekaeder	Femhörning	12	3
Ikosaeder	Triangel	20	5

De platonska kropparna har symboliserat olika saker genom tiderna. Platon lät fyra av kropparna symbolisera de fyra elementen jord, vatten, luft och eld och den femte kroppen symbolisera himlen, medan Kepler associerade kropparna med olika planeters banor.

Euklides bevis för att de nämnda fem kropparna är de enda regelbundna polyedrarna bygger på att det finns ett begränsat antal sätt att sätta samman regelbundna polygoner i hörn. Man måste ha minst tre polygoner i ett hörn för att kunna få en kropp. Tre regelbundna trianglar kan sättas samman och då är man på väg att bygga en tetraeder. Det går även att sätta samman fyra eller fem trianglar i varje hörn, då bygger man en oktaeder respektive en ikosaeder, men sätter man ihop sex stycken blir vinkelsumman $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ och figuren blir platt i det hörnet. Fler än sex liksidiga trianglar är omöjligt att sätta ihop. På samma sätt visar man att kuben och dodekaedern är de enda polyedrarna som kan byggas av kvadrater och regelbundna femhörningar. Försöker man sätta ihop tre regelbundna sexhörningar blir vinkelsumman $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ och figuren blir platt. Det betyder också att det är omöjligt att sätta ihop ett hörn med tre (eller fler) av någon regelbunden polygon som har fler än 6 sidor. Vi kan med andra ord inte skapa några andra regelbundna polyedrar än de fem platonska kropparna.

Bevis med grafteori

Man kan också bevisa att det endast kan finnas fem platonska kroppar med hjälp av grafteori. För att göra det påminner vi oss om Eulers



Leonhard Euler (1707-1783) bevisade år 1752 polyederformeln som i dag bär hans namn.

polyederformel som säger att det finns följande samband mellan en polyeders ytor (Y), kanter (K) och hörn (H): $Y + H - K = 2$. Vi minns också att varje polyeder kan representeras med hjälp av en plan sammanhängande graf.

I vårt bevis utgår vi ifrån en regelbunden polyeder uppbyggd av n -hörningar. I en graf som representerar denna polyeder kommer varje yta att omges av n kanter, och i varje hörn kommer q kanter att mötas. Eftersom varje kant gränsar till två ytor så gäller $nY = 2K$. Dessutom gäller att varje kant förbinder två hörn, så $qH = 2K$.

Om vi sätter in $Y = \frac{2K}{n}$ och $H = \frac{2K}{q}$ i Eulers polyederformel

$$Y + H - K = 2, \text{ så får vi } \frac{2K}{n} + \frac{2K}{q} - K = 2.$$

Dividerar vi båda leden med $2K$, så får vi $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{K}$ som efter

ytterligare en omskrivning blir $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$ (*)

En n -hörning måste ha minst tre hörn, så $n \geq 3$. Vi undersöker nu vad som gäller för antalet ytor (Y), hörn (H) och kanter (K) då $n = 3$, dvs. när sidoytorna är liksidiga trianglar. Att undersöka vad som gäller för $n > 3$ lämnas som övning.

Insättning av $n = 3$ i formel (*) ger $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$ som förenklas till $\frac{1}{q} = \frac{1}{K} + \frac{1}{6}$

För att kunna bilda en tredimensionell figur måste minst tre kanter mötas i varje hörn, så $q \geq 3$. Vi delar in undersökningen i olika fall

- För $q = 3$ får vi $K = 6$, eftersom $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Det ger $Y = \frac{2K}{n} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$ och $H = \frac{2K}{q} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

En polyeder uppbyggd av liksidiga trianglar där det möts 3 kanter i varje hörn har alltså totalt 6 kanter, 4 ytor och 4 hörn. Detta svarar mot tetraedern.

- För $q = 4$ får vi $K = 12$, eftersom $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$

Vi får $Y = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$ och $H = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$. Detta svarar mot oktaedern.

- För $q = 5$ får vi $K = 30$, eftersom $\frac{1}{5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6}$. Det ger

$Y = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$ och $H = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12$. Detta svarar mot ikosaedern.

- För $q \geq 6$ saknar ekvationen lösningar, eftersom $K > 0$. Detta får du själv visa i en uppgift.

Vi har alltså visat att det går att bygga upp tre och endast tre figurer där sidoytorna är liksidiga trianglar.

En polyeder uppbyggd av liksidiga trianglar där det möts 4 kanter i varje hörn har alltså totalt 12 kanter, 8 ytor och 6 hörn.

U ? Visa att ekvationen $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$ saknar lösningar då $n = 3$ och $q \geq 6$.

U ? Visa vilka figurer som är möjliga genom att i ekvationen $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$ sätta $n = 4$, $n = 5$ och $n \geq 6$.



På resande fot

Vidar bor i Sundsvall och har ett eget åkeri. Han ska transportera varor till Sollefteå, Härnösand och Örnsköldsvik, och därefter återvända tillbaka till Sundsvall igen. Frågan är hur han ska planera sin färd för att minimera sträckan han behöver köra.

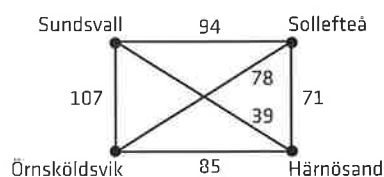
- Modellera Vidars problem med hjälp av en graf, där varje stad är ett hörn och vägförbindelsen mellan två städer representeras av en kant.
- På hur många sätt kan Vidar genomföra sin transport? Det vill säga, om han utgår från Sundsvall, på hur många sätt kan han besöka alla städer en gång och komma tillbaka till Sundsvall igen?
- Hur många möjliga resvägar blir det om Vidar i stället besöker $(n - 1)$ städer, dvs. om det totala antalet hörn i grafen är n stycken?

Vidar vill genomföra resan så att den totala resvägen blir så kort som möjligt. Han undersöker därför de inbördes avstånden mellan de fyra städerna och sammanställer dem i en tabell.

Sundsvall			
121	Sollefteå		
52	85	Härnösand	
154	94	105	Örnsköldsvik

- Beräkna för var och en av de möjliga resvägarna hur lång den totala reslängden blir. Vilken väg ska Vidar välja för att minimera sin reslängd?
- När du beräknade reslängderna i den föregående uppgiften märkte du förmodligen att samma totala reslängd förekom två gånger. Förklara varför det blir så.
- Visa att närmaste granne-metoden inte ger den kortast möjliga resvägen för Vidar.

Vidar vill inte bara minimera sträckan han behöver köra. Han vill hitta den väg som tar kortast tid. Han skriver därför in i grafen den tid i minuter som det tar att ta sig mellan två städer.



- Visa att närmaste granne-metoden här ger den optimala restiden.

Om en dator ska kontrollera samtliga möjliga reslängder, där n är det totala antalet städer, måste den kontrollera $\frac{(n-1)!}{2}$ olika fall. Men det finns en metod som har fått ner antalet beräkningssteg till $n^2 \cdot 2^n$ stycken.

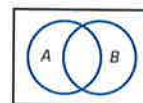
- Visa att $n^2 \cdot 2^n < \frac{(n-1)!}{2}$ för $n \geq 10$.

Mängder, kombinatorik och grafer



Mängdlära

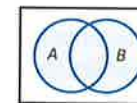
- mängd, t.ex. $A = \{2, 4, 6\}$ och $B = \{2, 4\}$
- delmängd $B \subseteq A$
- element, t.ex. $2, 4$
- kardinalitet, t.ex. $|A| = 3$
- tillhör, t.ex. $6 \in A$
- universalmängd U
- Venndiagram



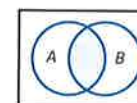
- mängdoperationer

Mängdoperationer

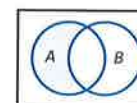
- union $A \cup B$



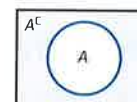
- snitt $A \cap B$



- differens $A \setminus B$



- komplement A^c



Kombinatorik

- multiplikationsprincipen
- kartesisk produkt
- Dirichlets lådrprincip
- permutationer
- kombinationer
- faktoriell, $n!$
- binomialsatsen
- Pascals triangel

Kombinatoriska modeller

- utan repetition, med hänsyn till ordning
 $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- utan repetition, utan hänsyn till ordning
 $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- med repetition, med hänsyn till ordning
 n^k
- med repetition, utan hänsyn till ordning
 $\binom{n+k-1}{k}$

Grafteori

- hörn
- kant
- grad
- vandring
- väg
- Eulerväg
- krets
- Eulerkrets
- stig
- Hamiltonstig
- cykel
- Hamiltoncykel
- Königsbergs broar
- en handelsresandes problem

B

NIVÅ 1

- 1 Ett gatukök som säljer 6 olika sorter korv och 5 sorter läsk, har följande erbjudande till sina kunder:

Valfri korv med tillbehör och valfri 50 cl läsk
Endast 49 kr!

På hur många olika sätt kan man kombinera valfri korv och läsk enligt erbjudandet?

- 2 Roger har 7 böcker stående i en bokhylla. På hur många sätt kan han ordna sina böcker från vänster till höger?

- 3 För mängderna A , B och C gäller att

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

$$C = \{3, 4, 6\}$$

Ange om följande påståenden är sanna eller falska

a) $B \subseteq A$

b) $3 \in B$

c) $\emptyset \subseteq B$

- 4 På en bondgård i Småland finns det 19 grisar, 24 hästar och 12 kor. För att kunna testa djuren för mul- och klövsjuka, måste man slumpvis välja ut tre djur, ett av varje art. På hur många olika sätt kan man välja ut dessa tre djur?

- 5 Beskriv mängderna med ord

a) $A = \{2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{n; 5|n\}$

- 6 Låt $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$ och $C = \{r, s, t, u\}$. Bestäm

a) $|A|$ b) $B \cup C$

c) $A \cap B$ d) $A \cap C$

- 7 Beskriv vilka av mängderna som är en delmängd till någon av de andra mängderna.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{2, 7\}$$

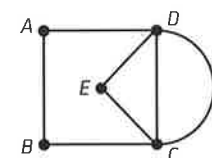
$$C = \{2, 4, 6\}$$

$$D = \{7\}$$

- 8 Beräkna utan räknare

a) $P(8, 3)$ b) $C(7, 6)$ c) $\binom{100}{98}$

- 9 Här nedanför ser du en graf.



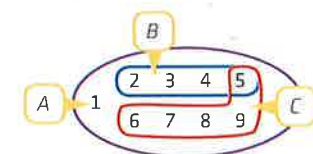
- a) Vilken grad har hörnen A , B , C , D och E ?
b) Hur förändras gradtalet för hörnet B om man lägger till en ögla där?
c) Avgör om grafen har en Eulerkrets och rita i så fall en sådan i grafen.

- 10 Hur många bokstavskombinationer med tre bokstäver kan bildas av bokstäverna A , B , C , D , E och F

a) om varje bokstav får användas en gång

b) om varje bokstav får användas mer än en gång

- 11 Bestäm med hjälp av figuren



- a) $A \setminus B$ b) $B \setminus A$ c) $A \setminus (B \cup C)$

- 12 I Allsvenskan i fotboll deltar 16 lag. Varje lag möter varje annat lag i två matcher, en match hemma och en match borta. Hur många matcher spelas i Allsvenskan i fotboll?

- 13 I en trupp på totalt 24 spelare ska 16 spelare tas ut till en handbollsmatch. På hur många sätt kan laget tas ut om man förutsätter att alla spelare har lika stor chans att komma med?



- 14 Hur många hörn har en plan sammanhängande graf med 30 ytor och 42 kanter?

- 15 Robert har valt ut 30 låtar till en spellista.

a) På hur många sätt kan han ordna sina låtar?

b) Anta att en dator kan räkna upp alla möjliga permutationer av Roberts spellista med en hastighet av en permutation per sekund. Beräkna hur många år det skulle ta för datorn att räkna upp alla möjliga permutationer.

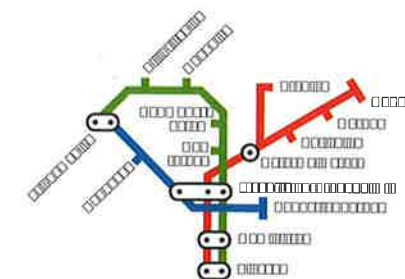
c) Universums ålder uppskattas till omkring 14 miljarder år. Om vi kallar denna tidslängd för 1 *universum*. Hur många *universum* skulle datorn behöva hålla på för att räkna upp samtliga permutationer av Roberts spellista?

- 16 Ludvig och Philip diskuterar laddprincipen. "Laddprincipen säger att om jag har 13 t-shirtar som jag ska färga antingen gröna, blå eller röda så kommer jag alltid att få minst 4 t-shirtar av varje färg", säger Ludvig. "Nej", säger Philip, "laddprincipen säger bara att du alltid kommer att få minst en t-shirt av varje färg". Har någon av dem rätt? Motivera.

- 17 Formulera ett vardagligt problem som kan lösas genom att beräkna

a) $P(8, 4)$ b) 29^3 c) $\binom{10}{2}$

- 18 Figuren visar en del av Stockholms tunnelbanelinjer. Rita en graf som representerar samma tunnelbanelinjer.



- 19 Vilken typ av problem kan ibland lösas med hjälp av närmaste granne-metoden?

- 20 Utveckla uttrycket $(x + y)^7$ med hjälp av binomialsatsen.

- 21 Den klassiska fotbollen är en polyeder uppbyggd av 12 femhörningar och 20 sexhörningar, och har 60 hörn. Hur många kanter har fotbollen?



NIVÅ 2

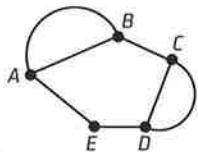
- 22 Hur många bokstavskombinationer kan bildas av de 7 bokstäverna i ordet FOTBOLL

a) om varje bokstav ska användas en gång

b) om varje bokstavstyp i ordet, dvs. bokstäverna F, O, T, B och L, får användas maximalt en gång och ordet ska vara 4 bokstäver långt.

23 Varje sammansatt positivt heltal kan skrivas som en produkt av primtalsfaktorer. Vilken är den största primtalsfaktorn i talet $\binom{20}{8}$?

24 a) Avgör om grafen här nedanför har en Eulerväg och motivera ditt svar.



b) Om det finns en Eulerväg i grafen, ange den. I annat fall komplettera grafen så att den får en Eulerväg.

25 Konstruera tre mängder A , B och C , som uppfyller villkoren

- a) $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ och $A \subseteq B$
 b) $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ och $A \not\subseteq B$

26 Det vanliga koordinatsystemet i planet kallas ett *kartesiskt koordinatsystem*. Koordinatsystemet är en kartesisk produkt av två mängder med oändligt antal element. Vilken är den kartesiska produkten?

27 Gäller kommutativa lagen för unionen av mängder, dvs. gäller $A \cup B = B \cup A$ för alla mängder A och B ? Motivera ditt svar.

28 142 tal väljs ut slumpvis. Vilket är det minsta antal tal som med säkerhet har samma siffror?

29 Det finns vissa symmetriska egenskaper när man beräknar antalet kombinationer när man väljer k stycken av n stycken objekt.

a) Beräkna och jämför

$$\binom{3}{1} \text{ med } \binom{3}{2}$$

$$\binom{4}{0} \text{ med } \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{2} \text{ med } \binom{5}{3}$$

$$\binom{5}{1} \text{ med } \binom{5}{4}$$

b) Förklara resultaten genom att använda formeln för beräkning av $\binom{n}{k}$

c) Motivera med ord varför t.ex.

$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3}, \binom{7}{2} = \binom{7}{5} \text{ etc.}$$

30 En grupp som består av 84 personer äter smörgåsbord. Bland dessa äter 36 personer skinka, 19 personer äter sill och 25 äter köttbullar. Bland dem som äter skinka, äter 11 personer både skinka och köttbullar och 14 äter både skinka och sill. Bland dem som äter sill, äter 12 personer både sill och köttbullar. I gruppen finns det 8 personer som äter alla tre ovan nämnda rätter.

- a) Hur många personer äter endast sill?
 b) Hur många personer äter endast köttbullar?
 c) Hur många personer äter varken skinka, sill eller köttbullar?

31 En stig är en vandring i en graf som passerar varje hörn högst en gång, och en väg är en vandring i en graf som passerar varje kant högst en gång.

- a) Är en stig också alltid en väg? Motivera ditt svar.
 b) Är en väg också alltid en stig? Motivera ditt svar.
 c) Låt $W = \{\text{alla möjliga vandringar}\}$, $V = \{\text{alla möjliga vägar}\}$, $S = \{\text{alla möjliga stigar}\}$ i en viss graf. Rita ett Venndiagram som visar hur mängderna är relaterade till varandra.

32 Ditte åker på språkresa till Frankrike. Där hamnar hon i en grupp med 6 andra svenskar, 9 tyskar och 5 italienare. På en lektion delas eleverna slumpvis in i grupper om 3 för att göra ett grupparbete.

- a) Hur stor är sannolikheten att Ditte hamnar i en grupp med bara svenskar?
 b) När de ska dela in grupperna blir eleverna tillsagda att ställa sig på led. Om vi antar att eleverna placerar sig slumpvis, hur stor är då sannolikheten att de som har samma nationalitet står bredvid varandra?

33 Bestäm koefficienten för termen x^5y^6 i utvecklingen av uttrycket $(2x - 3y^2)^8$

NIVÅ 3

34 I Stryktipset tippar du utgången i 13 fotbollsmatcher numrerade från 1 till 13, genom att i varje match tippa 1, X eller 2. Du tippar 1 om du tror att hemmalaget vinner, X för oavgjort och 2 om du tror att bortalaget vinner.

- a) Hur stor är sannolikheten att du får alla rätt på Stryktipset om du tippar helt slumpmässigt?
 b) Hur stor är sannolikheten att du får mer än 9 rätt?

35 Bestäm koefficienten för a^7 -termen i utvecklingen av $\left(a^3 - \frac{3}{a}\right)^5$

36 I tärningsspelet Yatzy kastar man 5 tärningar.

- a) Vad är sannolikheten för fyrtal i ett kast, dvs. att man får fyra tärningar av samma valör och att den femte visar något annat?
 b) En kåk får man om man har tre tärningar av en valör och 2 tärningar av en annan. Så är t.ex. resultatet 5, 5, 6, 6, 6 ett exempel på en kåk. Vad är sannolikheten att man får kåk i ett kast när man slår 5 tärningar?



37 Binomialutvecklingen av uttrycket $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^{10}$ innehåller en sifferterm. Vilken är termen?

38 I ett koordinatsystem väljer man slumpvis ut fem punkter med heltalskoordinater (a, b) . Man drar sedan sträckor mellan samtliga fem punkter.

- a) Visa att mittpunkten på minst en av dessa sträckor också har heltalskoordinater.

Ledning: För en godtycklig punkt (a, b) är talet a respektive b antingen udda eller jämnt. Vad måste gälla för de två ändpunkterna på sträckan för att mittpunkten ska bestå av heltal?

- b) Visa att detta inte nödvändigtvis är sant om man i stället väljer ut fyra punkter med heltalskoordinater.

39 Robert, Ailin och Pierre och tre andra kompisar går till matsalen. Där sätter de sig slumpmässigt vid ett runt bord med sex platser. Vad är sannolikheten att Robert, Ailin och Pierre hamnar bredvid varandra?





DEL 1 Utan räknare

1 Låt $A = \{1, 5, \%, \&, 7\}$ och $B = \{2, 5, \#, @, \&\}$. Bestäm

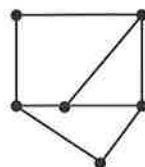
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $|A \setminus B|$

2 Beräkna

- $P(6, 2)$
- $\binom{11}{8}$

3 a) Förklara vad en Eulerväg är.

b) Går det att rita en Eulerväg i grafen här nedanför? Motivera.



4 Formulera ett vardagligt problem som kan lösas med beräkningen $\binom{14}{3}$

ö

5 Rita en plan sammanhängande graf med 5 hörn och 9 kanter. Hur många ytor har grafen?

6 Utveckla uttrycket $(2a^2 - b)^6$ med hjälp av binomialsatsen.

7 Visa att $(n+2)! - (n+1)! - n! = n(n+2) \cdot n!$

8 På ett nöjesfält finns ett spel med sex luckor som döljer lampor. Fyra av lamporna är gröna och två är röda. Man ska välja att öppna fyra av luckorna och om alla lamporna är gröna, så vinner man supervinsten.

a) Baback och Alexandra har beräknat sannolikheten för att vinna supervinsten på ett försök. Baback har ställt upp beräkningen $\frac{1}{\binom{6}{4}}$,

medan Alexandra har ställt upp $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$. Båda har gjort rätt. Ge förslag på hur de kan ha tänkt för att komma fram till sina beräkningar.

b) Beräkna sannolikheten att vinna supervinsten.

c) Säg att spelet förändras så att det i stället är gröna lampor i 5 luckor och att en lucka döljer en röd lampa. Du ska nu öppna 5 luckor och vinner supervinsten om alla fem visar grön lampa. Hur stor är nu sannolikheten för supervinst?

DEL 2 Med räknare

9 Hur många bokstavskombinationer med 5 bokstäver kan bildas av orden här nedanför? Varje bokstav ska användas en gång.

- KRONA
- KASTA

10 I en gymnasieskola med idrottsprofil går 654 elever. Av dem tränar 155 elever fotboll, 120 elever innebandy och 173 elever friidrott. 107 elever tränar bara fotboll. 20 elever tränar innebandy och friidrott, 23 elever spelar både fotboll och innebandy och 4 elever tränar alla tre sporterna. Hur många av eleverna på skolan tränar varken fotboll, innebandy eller friidrott?

11 I Skåne vill man undersöka gymnasieungdomars matematikkunskaper. Som ett led i undersökningen låter man alla elever som går i tredje årskursen på gymnasiet, totalt 14 326 elever, genomföra ett kortare matematiktest. Testen genomförs på dator. Varje test består av 10 frågor som slumpmässigt valts ut ur en bank med totalt 15 frågor. Man kan då med säkerhet säga att minst x elever kommer att få svara på precis samma tio frågor. Bestäm x .

12 I ett rutnät av 2×4 kvadrater ska varje ruta färgas antingen gul eller blå.



- På hur många sätt kan rutnätet färgläggas?
- Hur många av dessa färgläggningar innehåller precis *en* helt blå 2×2 -kvadrat? (I figuren här nedanför finns två blå 2×2 -kvadrater, en som omfattar kolumn 1 och 2 och en som omfattar kolumn 2 och 3.)



13 Binomialutvecklingen av uttrycket $\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}\right)^8$ innehåller en sifferterm. Vilken är termen?

14 I den här uppgiften ska du undersöka ett samband mellan antalet element i en mängd och hur många delmängder som mängden har.

- Bestäm antalet delmängder till en mängd med 1 element, 2 element respektive 3 element.
- Förklara varför antalet delmängder till en mängd med n element kan beräknas med formeln $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.
- Visa, t.ex. med hjälp av binomialsatsen, att detta uttryck är detsamma som 2^n .