

3 Differentialekvationer

DELKAPITEL

3.1 . Vad är en differentialekvation?

3.2 Differentialekvationer och tillämpningar

FÖRKUNSKAPER

- Algebra
- Funktionslära
- Deriveringsregler
- Primitiva funktioner

CENTRALT INNEHÅLL

- Strategier för att ställa upp och tolka differentialekvationer som modeller för verkliga situationer.
- Användning och lösning av differentialekvationer med digitala verktyg inom olika områden som är relevanta för karaktärsämnen.



Många vardagliga och naturvetenskapliga förlopp kan beskrivas med hjälp av differentialekvationer, det vill säga med ekvationer som innehåller en eller flera derivator av en okänd funktion. Det kan till exempel gälla antalet fiskar i en sjö, temperaturen hos kaffet i en termos eller rörelsen hos en person som gör ett bungyjump.

I det här kapitlet kommer du att lära dig att tolka, ställa upp och lösa differentialekvationer. Du kommer också få tillfälle att använda dina kunskaper för att lösa olika naturvetenskapliga problem.

När du är klar med kapitlet ska du kunna

- ställa upp och tolka differentialekvationer som modeller för verkliga situationer
- lösa första ordningens differentialekvationer med och utan digitala verktyg
- förstå hur man kan använda numeriska metoder för att lösa differentialekvationer
- lösa andra ordningens differentialekvationer med hjälp av digitala verktyg

Lösningar till differentialekvationer

Lösningen till en differentialekvation är den eller de funktioner som satisfierar den givna ekvationen. Till differentialekvationen $y' = 5y$ är till exempel funktionen $y = e^{5x}$ en lösning.

- Visa att $y = e^{5x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' = 5y$ genom att sätta in funktionen och dess derivata och visa att båda leden då är lika.
- Undersök om även $y = 2e^{5x}$, $y = 33e^{5x}$ och $y = 412e^{5x}$ är lösningar till differentialekvationen.
- Är alla funktioner av formen $y = ke^{5x}$, där k är en konstant, lösningar till differentialekvationen? Motivera ditt svar.
- Måste koefficienten vara 5 i exponenten till funktionen y ?

3.1 Vad är en differentialekvation?

Ordboken

Differential kommer av det latinska ordet *differentia*, som betyder skillnad.

Lösningen till en differentialekvation

Inom naturvetenskapen används matematiska modeller för att beskriva olika typer av förlopp. Till exempel har man visat att antalet atomkärnor som sönderfaller i ett radioaktivt preparat är proportionellt mot det totala antalet radioaktiva atomkärnor i preparatet. Sönderfallet kan då beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

där $\frac{dN}{dt} = N'(t)$ är sönderfallshastigheten och λ är en positiv konstant som kallas för sönderfallskonstanten och beror av vilket radioaktivt ämne som avses. Eftersom λ är en positiv konstant och antalet kärnor hela tiden minskar, så måste sambandet innehålla ett minustecken.

Differentialekvationer introducerade vi redan i kurs 4. Vi inleder kapitlet med att repetera några viktiga begrepp.

Differentialekvationens ordning

I ekvationen $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ är förstaderivatan $N'(t) = \frac{dN}{dt}$ den högsta förekommande ordningen av derivatan. Man säger därför att differentialekvationen är av *första ordningen*. Om andraderivatan är den högsta förekommande ordningen av derivatan, så är differentialekvationen av *andra ordningen* osv.

Lösningen till $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

Lösningen till differentialekvationen

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

är en funktion av formen $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, där C är en konstant. Detta kan vi enkelt kontrollera genom att sätta in $N(t)$ i differentialekvationen och testa om de två leden blir lika.

$$VL = \frac{dN}{dt} = -\lambda Ce^{-\lambda t} = -\lambda N = HL \quad N(t) = Ce^{-\lambda t} \text{ ger } N'(t) = -\lambda Ce^{-\lambda t} = -\lambda N(t)$$

Eftersom $VL = HL$, så är $N(t) = Ce^{-\lambda t}$ en lösning till differentialekvationen.

Differentialekvation

En differentialekvation är en ekvation som innehåller en eller flera derivator till en funktion.

En lösning till en differentialekvation är en *funktion* som satisfierar differentialekvationen.

Exempel:

I en bakterieodling är bakteriernas tillväxthastighet $\frac{dN}{dt}$ proportionell mot antalet bakterier i odlingen.

- Teckna en differentialekvation som beskriver bakteriernas tillväxthastighet. Beteckna antalet bakterier med N och tiden med t .
- Beskriv med ord vad differentialekvationen betyder i det här sammanhanget, om proportionalitetskonstanten är 0,04.

Lösning:

- Derivatan $N'(t) = \frac{dN}{dt}$ beskriver tillväxthastigheten för bakterierna. Att tillväxthastigheten är proportionell mot antalet bakterier betyder att den kan skrivas i formen $\frac{dN}{dt} = kN$ där k är en konstant.
- Om proportionalitetskonstanten $k = 0,04$, så har vi differentialekvationen $\frac{dN}{dt} = 0,04N$. Ekvationen beskriver att tillväxthastigheten för bakterierna vid varje tidpunkt är 4 % per tidsenhet av den aktuella bakteriemängden.

Exempel:

Verifiera att differentialekvationen

- $y' - 5y = 20$ har lösningen $y = e^{5x} - 4$
- $y'' + 9y = 0$ har lösningen $y = \sin 3x + \cos 3x$

Lösning:

Vi deriverar funktionerna och undersöker om lösningarna satisfierar ekvationerna.

$$a) \quad y = e^{5x} - 4 \quad \text{ger} \quad y' = 5e^{5x}$$

Vi ersätter y och y' i ekvationen $y' - 5y = 20$

$$VL = y' - 5y = 5e^{5x} - 5(e^{5x} - 4) = 5e^{5x} - 5e^{5x} + 20 = 20 = HL$$

Eftersom $VL = HL$, så är $y = e^{5x} - 4$ en lösning till differentialekvationen.

$$b) \quad y = \sin 3x + \cos 3x$$

$$y' = 3 \cos 3x - 3 \sin 3x \quad D(\sin kx) = k \cos kx; D(\cos kx) = -k \sin kx$$

$$y'' = -9 \sin 3x - 9 \cos 3x$$

Vi ersätter nu y'' och y i ekvationen $y'' + 9y = 0$

$$VL = y'' + 9y = -9 \sin 3x - 9 \cos 3x + 9(\sin 3x + \cos 3x) = -9 \sin 3x - 9 \cos 3x + 9 \sin 3x + 9 \cos 3x = 0$$

$$HL = 0$$

Eftersom $VL = HL$, så är $y = \sin 3x + \cos 3x$ en lösning till differentialekvationen.

Exempel:

När röntgenstrålning passerar genom en blyplatta är strålningens intensitet en funktion av blyplattans tjocklek. Förändringshastigheten $\frac{dI}{dx}$ är proportionell mot intensitetens storlek och kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I$$

I_0 är strålningens intensitet innan den har passerat blyplattan.

där I är strålningens intensitet, x är blyplattans tjocklek och μ är absorptionskoefficienten för bly.

- Verifiera att $I = I_0 e^{-\mu x}$ är en lösning till differentialekvationen, om $I_0 = I(0)$ är en konstant.
- Bestäm absorptionskoefficienten om strålningens intensitet halveras av en 14 mm tjock blyplatta.
- Hur tjock blyplatta behövs för att 99 % av strålningen ska absorberas?

Lösning:

- Funktionen $I = I_0 e^{-\mu x}$ ger $VL = \frac{dI}{dx} = -\mu I_0 e^{-\mu x} = -\mu I = HL$. Eftersom $VL = HL$, så är funktionen $I = I_0 e^{-\mu x}$ lösning till differentialekvationen $\frac{dI}{dx} = -\mu I$.

- Vi ska bestämma den absorptionskoefficient μ som gör att hälften av strålningen absorberas. Om strålningens intensitet halveras efter det att den har passerat en 14,0 mm tjock blyplatta, så får vi ekvationen

$$0,5 I_0 = I_0 e^{-\mu \cdot 14} \quad \text{Dela båda led med } I_0$$

$$0,5 = e^{-14\mu}$$

$$\ln 0,5 = -14\mu \quad \text{Om } a = e^b, \text{ så är } \ln a = b$$

$$\mu = \frac{\ln 0,5}{-14} \approx 0,0495 \quad \text{Med hjälp av räknaren}$$

Svar: Absorptionskoefficienten är $0,0495 \text{ mm}^{-1}$.

- Om 99 % av strålningen absorberas, så passerar 1 %.

$$0,01 I_0 = I_0 e^{-0,0495x} \quad \text{Dela båda led med } I_0$$

$$0,01 = e^{-0,0495x}$$

$$\ln 0,01 = -0,0495x \quad \text{Om } a = e^b, \text{ så är } \ln a = b$$

$$x = \frac{\ln 0,01}{-0,0495}$$

$$x \approx 93 \quad \text{Med hjälp av räknaren}$$

Svar: Blyplattan behöver vara 93 mm tjock.

Observera enheten. Exponenten till $e^{-\mu x}$ ska vara enhetslös. Eftersom x har enheten mm, så får μ enheten $1/\text{mm} = \text{mm}^{-1}$.

NIVÅ 1

3101 Verifiera att differentialekvationen

- $y' + y = 3x^2 - 6$ har lösningen $y = 3x^2 - 6x$
- $y' - 3y = -12$ har lösningen $y = e^{3x} + 4$

3102 Enligt Newtons andra lag gäller att kraften F är proportionell mot accelerationen a med massan m som proportionalitetskonstant.

- Teckna Newtons andra lag med hjälp av beteckningarna F , a och m .
- Skriv Newtons andra lag som en differentialekvation genom att använda att accelerationen a är derivatan av hastigheten v med avseende på tiden t .

3103 Verifiera att differentialekvationen

- $y'' + 4y = 0$ har lösningen $y = \sin 2x + \cos 2x$
- $y'' + y' - 2y = 0$ har lösningen $y = 3e^{-2x}$

3104 Visa att differentialekvationen

$$y' - ay = 0$$

har lösningen $y = Ce^{ax}$ oberoende av värdet på konstanterna a och C .

NIVÅ 2

3105 I ett företag som tillverkar samlarbilder är man bekymrad över att försäljningen av deras produkt har varit konstant i några månader. Därför genomför man en annonskampanj som resulterar i att försäljningen ökar. Efter annonskampanjen är ändringstakten i antal sålda förpackningar vid varje tidpunkt proportionell mot roten ur det antal förpackningar som säljs just då. Uttryck ändringstakten i antalet sålda förpackningar med en differentialekvation

- före annonskampanjen
- efter annonskampanjen

(*Np MaE vt 1998*)

3106 Visa att

- $y = xe^x$ är en lösning till $y'' - 2y' + 2y = xe^x$
- $y = 5x \sin x$ är en lösning till $y'' + y = 10 \cos x$

3107 I en bakterieodling är tillväxthastigheten $B'(t)$ proportionell mot aktuell bakteriemängd $B(t)$.

- Beskriv tillväxten med en differentialekvation där proportionalitetskonstanten är $k = 0,0035 \text{ s}^{-1}$.
- Tolka differentialekvationen med ord.
- Kan $B(0) = 0$? Motivera ditt svar.

3108 En strålningskälla innehåller m gram radium vid tiden t sekunder. Sönderfallshastigheten är proportionell mot aktuell mängd radium.

- Ange en differentialekvation som beskriver sönderfallet.
- Är proportionalitetskonstanten positiv eller negativ?

3109 Ge förslag på vilka värden A och b kan ha om $y = Ae^{bx}$ är en lösning till $y'' - 4y = 0$.

3110 En vikt som är upphängd i en fjäder svänger kring jämviktsläget. Om man bortser från att rörelsen dämpas, så kan man beskriva svängningen med differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

där y är avståndet till jämviktsläget och k är fjäderkonstanten. Bestäm ω så att $y = A \sin \omega t$ blir en lösning till differentialekvationen.

NIVÅ 3

3111 En termos innehåller varmt te och står i rumstemperatur. Enligt Newtons avsvlningslag, avtar teets temperatur med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan teets och rummets temperatur. Ställ upp en differentialekvation som beskriver teets temperatur och ange lämpliga villkor för när ekvationen gäller.

Ordboken

Allmän kommer från lågtyskans *almen*, som betyder helt gemensam.

Den primitiva funktionen som lösning till en differentialekvation

Vi kan bestämma en lösning till differentialekvationen $y' = 3x - 7$ genom att bestämma en primitiv funktion till uttrycket i högerledet. En lösning till differentialekvationen $y' = 3x - 7$ är alltså $y = \frac{3x^2}{2} - 7x$.

Allmän lösning

Att bestämma den *allmänna lösningen* till en differentialekvation innebär att bestämma *samtliga lösningar* till differentialekvationen. Eftersom derivatan av en konstant är noll, så kan vi addera valfri konstant till y . T.ex. är även $y = \frac{3x^2}{2} - 7x + 1$ en lösning. Den allmänna lösningen till vår differentialekvation är $y = \frac{3x^2}{2} - 7x + C$, där C är en konstant.

Tillämpning

I fysiken behandlar man ofta olika former av rörelse där accelerationen är konstant. Ett exempel är rörelsen hos ett föremål som enbart påverkas av tyngdkraften, alltså av den kraft som ger ett föremål som faller utan luftmotstånd konstant acceleration. Detta kan vi utnyttja om vi till exempel vill bestämma hur lång sträcka en boll faller under 3 sekunder, om den släpps från viloläge från ett högt torn. Det gäller att

$$a(t) = 9,82$$

I stora delar av Sverige är tyngdaccelerationen $9,82 \text{ m/s}^2$.

Men vi kan också uttrycka accelerationen som andraderivatan av sträckan och kan därför skriva $s''(t) = 9,82$. Detta är en differentialekvation av andra ordningen som vi enkelt kan lösa med hjälp av primitiva funktioner.

$$s''(t) = 9,82$$

Accelerationen är andraderivatan av sträckan

$$s'(t) = 9,82t + v_0$$

Hastigheten $v = s'(t)$ är en primitiv funktion till $s''(t)$. För att få den allmänna lösningen måste man lägga till konstanten v_0 .

$$s(t) = \frac{9,82t^2}{2} + v_0t + s_0$$

$s(t)$ är en primitiv funktion till $s'(t)$. Här måste vi lägga till konstanten s_0 för att få den allmänna lösningen.

där v_0 och s_0 är konstanter som beror på utgångshastigheten och på den punkt som man valt att mäta sträckan från. Eftersom vi släpper bollen från viloläge, är bollens utgångshastighet noll, dvs. $v_0 = 0$. Om vi även väljer $s_0 = 0$, så får vi

$$s(t) = \frac{9,82t^2}{2}$$

Den sträcka som bollen faller under de tre första sekunderna blir

$$s(3) = \frac{9,82 \cdot 3^2}{2} = 44,19$$

Bollen faller alltså ca 44 meter på tre sekunder om man bortser från luftmotståndet.

Exempel:

Bestäm den allmänna lösningen till följande differentialekvationer.

a) $y' = 2x + 3$

b) $y'' = 20x^3 - 3x$

Lösning:

a) Samtliga primitiva funktioner till högerledet ger den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' = 2x + 3$$

Glöm inte konstanten C när den allmänna lösningen ska bestämmas.

$$y = x^2 + 3x + C$$

Den allmänna lösningen

Svar: $y = x^2 + 3x + C$ ger den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Samtliga primitiva funktionen till högerledet ger y'

$$y'' = 20x^3 - 3x$$

$$y' = \frac{20x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + C = 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + C \quad y' \text{ är primitiv funktion till } y''$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är samtliga primitiva funktioner till y' . Vi bestämmer y och lägger till en ny konstant D

$$y = \frac{5x^5}{5} - \frac{3x^3}{2 \cdot 3} + Cx + D = x^5 - \frac{x^3}{2} + Cx + D$$

En primitiv funktion till C är Cx

Svar: Funktionen $y = x^5 - \frac{x^3}{2} + Cx + D$ ger den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Kontrollera gärna din lösning genom att derivera y två gånger.

Exempel:

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = 6e^{-2x}$ som uppfyller villkoret $y(0) = 5$.

Lösning:

Den allmänna lösningen till $y' = 6e^{-2x}$ ges av samtliga primitiva funktioner till y' .

$$y' = 6e^{-2x}$$

$$y = \frac{6e^{-2x}}{-2} + C = -3e^{-2x} + C$$

Vi söker den lösning som uppfyller $y(0) = 5$.

$$y(0) = 5 \Leftrightarrow -3e^{-2 \cdot 0} + C = 5 \quad -3e^{-2 \cdot 0} = -3$$

$$C = 8$$

Svar: Lösningen till $y' = 6e^{-2x}$ som uppfyller villkoret $y(0) = 5$ är $y = -3e^{-2x} + 8$.

NIVÅ 1

3112 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y' = 2x - 1$ b) $y' = 3x^2 + e^x$
c) $y' = \frac{2}{x}$ d) $y' = \cos 2x$

3113 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' = 2x$ b) $y'' = 9e^{-3x}$

3114 Lös följande differentialekvationer.

- a) $y' = 2x + 1$ då $y(0) = 3$
b) $y' = 6x^2$ då $y(1) = 7$

3115 Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $\frac{dv}{dt} = a$, där a är en konstant.

3116 Hastigheten v m/s hos en cyklist kan under en viss tid beskrivas med $v(t) = 0,8t + 3$, där t är tiden i sekunder. Hur långt har cyklisten färdats de första 5 sekunderna?

3117 En pingisboll faller utan utgångshastighet i ett rör där det råder vakuum. Bollen påverkas endast av tyngdkraften. Alltså gäller att $F = ma = mg$

Eftersom $a = \frac{dv}{dt}$ får vi differentialekvationen

$$\frac{dv}{dt} = g \quad (g \approx 9,82 \text{ m/s}^2).$$

- a) Vilken hastighet har bollen efter 2 sekunder?
b) Hur långt har bollen rört sig under dessa 2 sekunder?

NIVÅ 2

3118 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y' = -\frac{1}{x^2}$ b) $y' = 0$

3119 Lös följande differentialekvationer.

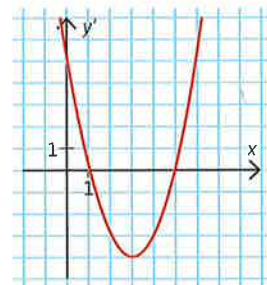
- a) $y' = 5x^2$ då $y(2) = \frac{1}{3}$
b) $y'' = 3x$ då $y(1) = \frac{5}{2}$ och $y'(1) = 5$
c) $y'' = 3x^2 + 3$ då $y'(2) = 15$ och $y(2) = 15$

3120 Bestäm den allmänna lösningen till

- a) $y'' = \sin \frac{x}{2}$ b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

NIVÅ 3

3121 Figuren visar grafen till en differentialekvation.



- a) Vilken differentialekvation visar grafen?
b) Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Eulers stegmetod

De flesta differentialekvationer går inte att lösa exakt. För att finna lösningarna till dessa ekvationer kan man använda *numeriska lösningsmetoder*. Vi ska nu visa en numerisk metod som kallas *Eulers stegmetod*.

Säg att vi vill beräkna ett närmevärde till $y(2)$ för den lösning till $y' = 4 - xy$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$. Den exakta lösningen till denna differentialekvation beskriver en så kallad *lösningsskurva* genom punkten $(2, y(2))$. Eulers stegmetod ger en approximativ lösning till differentialekvationen genom att i små steg följa lösningsskurvans tangent.

Vi startar i punkten $(x_0, y_0) = (0, 1)$, som är det villkor lösningen ska uppfylla. Vi sätter in punktens koordinater i differentialekvationen och får att $y' = 4 - xy = 4 - 0 \cdot 1 = 4$.

Det betyder att tangenten till lösningsskurvan har riktningskoefficienten 4 i punkten $(0, 1)$. Följer vi lösningsskurvan 0,5 steg till höger i tangentens riktning, så kommer vi till funktionsvärdet $y_1 = 4 \cdot 0,5 + 1 = 3$ som alltså är en approximation till det exakta värdet av $y(0,5)$.

Eftersom vi tagit 0,5 steg åt höger, så befinner vi oss nu i punkten $(0,5; 3)$.

Nu antar vi att punkten som vi bestämt ligger på den riktiga lösningsskurvan och tar ytterligare 0,5 steg till höger.

I punkten $(0,5; 3)$ blir riktningskoefficienten $y' = 4 - xy = 4 - 0,5 \cdot 3 = 2,5$

och vi får på samma sätt som här ovanför $y_2 = 2,5 \cdot 0,5 + 3 = 4,25$

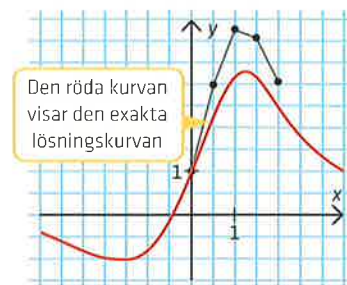
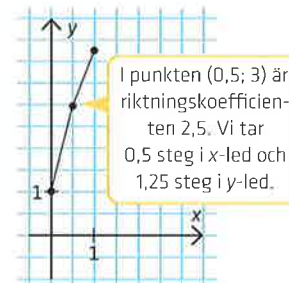
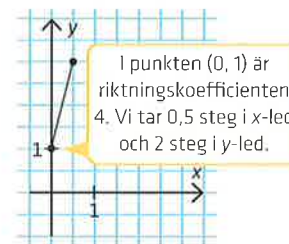
I punkten $(1; 4,25)$ är $y' = 4 - 1 \cdot 4,25 = -0,25$ och $y_3 = (-0,25) \cdot 0,5 + 4,25 = 4,125$

I punkten $(1,5; 4,125)$ är $y' = 4 - 1,5 \cdot 4,125 = -2,1875$

Och slutligen får vi $y_4 = (-2,1875) \cdot 0,5 + 4,125 = 3,03125$

som alltså är ett närmevärde till $y(2)$ för den lösning till $y' = 4 - xy$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.

I resonemanget här ovanför har vi använt steglängden 0,5. Ju fler och därmed kortare steg man tar, desto bättre blir närmevärdet.



Vi kan bestämma en rekursiv formel för att med Eulers stegmetod lösa differentialekvationer av första ordningen. Om man utgår från punkten (x_n, y_n) på lösningskurvan och om man följer resonemanget här ovanför, så kan vi approximativt bestämma punkten (x_{n+1}, y_{n+1}) med

$$y_{n+1} \approx y_n + h \cdot y'_n$$

Här är $x_{n+1} = x_n + h$ och derivatan y'_n beräknas i punkten (x_n, y_n) .

Med hjälp av formeln här ovanför kan man programmera sin räknare att lösa differentialekvationer av första ordningen. Här nedanför hittar du ett förslag på ett sådant program.

ON På din räknare

Börja med att skriva in programmet. Du beräknar sedan ett närmevärde till lösningen av $y' = 4 - xy$, genom att trycka **Y=** och skriva in högerledet till differentialekvationen efter **Y1=**. När du kör programmet läser du in begynnelsevillkor och steglängd genom att besvara de frågor som dyker upp på skärmen. Lösningen läser du av i grafen t.ex. med **TRACE**.

```
PROGRAM:STEGMET
:INPUT "X-START=",X
:INPUT "Y-START=",Y
:INPUT "H=",H
:INPUT "X-SLUT=",S
:ClrList L1,L2
:X→L1(1)
:Y→L2(1)
:1→A
:While L1(A)<S
:L1(A)+H→L1(A+1)
:L2(A)+H*Y1(X)→L2(A+1)
:A+1→A
:L1(A)→X
:L2(A)→Y
:End
:FnOff
:PlotsOff
:Plot1(Scatter,L1,L2,.)
:ZoomStat
```

Exempel:

Utgå från punkten $(1, 1)$ på lösningskurvan till $y' = 2y - x$ och beräkna $y(3)$ med Eulers stegmetod. Använd steglängden 0,5 och visa lösningen grafiskt.

Lösning:

Vi utgår från punkten $(1, 1)$. Punktens koordinater sätts in i $y' = 2y - x$ vilket ger $y' = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Vi ritar en sträcka med riktningskoefficienten 1 från punkten $(1, 1)$. Sträckan ska vara 0,5 längdenheter i x -led. Vi hamnar i punkten $(1,5; 1,5)$.

Vi fortsätter från punkten $(1,5; 1,5)$. Där är $y' = 2 \cdot 1,5 - 1,5 = 1,5$. Vi ritar därför en sträcka som är 0,5 längdenheter i x -led och har riktningskoefficienten 1,5. Vi hamnar i punkten $(2; 2,25)$.

Nästa sträcka har riktningskoefficienten $y' = 2 \cdot 2,25 - 2 = 2,5$. Vi ritar sträckan och hamnar i punkten $(2,5; 3,5)$. Sista sträckan har riktningskoefficienten $y' = 2 \cdot 3,5 - 2,5 = 4,5$. Vi hamnar slutligen i punkten $(3; 5,75)$.



Exempel:

Använd Eulers stegmetod och beräkna ett närmevärde till $y(4)$ för den lösning till $y' = 3x - y$ som uppfyller villkoret $y(0) = 2$. Använd steglängden $h = 1$.

Lösning: Eftersom $y' = 3x - y$ och $h = 1$ kan formeln $y_{n+1} \approx y_n + h \cdot y'_n$ skrivas

$$y_{n+1} = y_n + 1(3x_n - y_n) = 3x_n$$

Vi utgår från $(x_0, y_0) = (0, 2)$ och får

$$y_1 = 3x_0 = 3 \cdot 0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

Alltså är $(x_1, y_1) = (1, 0)$

$$y_2 = 3x_1 = 3$$

$$x_2 = x_1 + h = 1 + 1 = 2$$

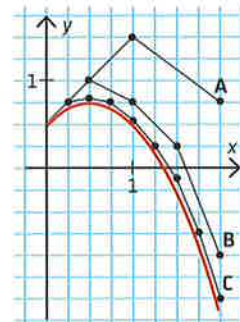
Sedan beräknar vi övriga koordinater på samma sätt. Vi får tabellen till höger.

Svar: $y(4) = 9$

n	x_n	y_n
0	0	2
1	1	0
2	2	3
3	3	6
4	4	9

NIVÅ 1

3122 Figurerna visar en exakt lösningskurva till en differentialekvation tillsammans med tre andra lösningskurvor som har skissats med hjälp av Eulers stegmetod. Vilka olika steglängder har använts?



3123 Utgå från punkten $(0, 1)$ på en lösningskurva till differentialekvationen $y' = y$. Använd Eulers stegmetod och ta 2 steg med steglängden 1.

- Var hamnar du efter det första steget?
- Var hamnar du efter det andra?
- Ange ett närmevärde till $y(2)$.

3124 Beräkna ett närmevärde till $y(4)$ för den lösning till

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

som uppfyller villkoret $y(1) = 2$. Använd Eulers stegmetod och steglängden 1.

3125 Punkten $(1, 2)$ ligger på lösningskurvan till $y' = 2x - y$. Välj steglängden $h = 1$ och beräkna $y(3)$ med Eulers stegmetod.

3126 En lösningskurva till $y' = \sqrt{y} - x$ går genom punkten $(1, 2)$. Uppskatta värdet av $y(3)$ med hjälp av Eulers stegmetod och steglängden

- $h = 1$
- $h = 0,5$

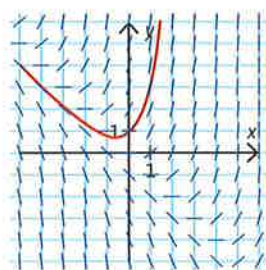
NIVÅ 2

3127 Differentialekvationen $y' = x(2 - y)$ har begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

- Bestäm $y(3)$ för hand med Eulers stegmetod. Använd steglängden 1.
- Bestäm $y(3)$ med hjälp av räknarprogrammet. Använd steglängden 0,1.

3128 Figuren visar ett så kallat *riktningsfält* till differentialekvationen $y' = x + y$. Man har helt enkelt beräknat riktningskoefficienten y' för ett antal punkter och markerat dem med ett streck i just de punkterna. I figuren syns också den lösningskurva som bestäms av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

- Uppskatta $y(1)$ för den funktion som lösningskurvan genom punkten $(0, 1)$ beskriver.
- En annan tänkt lösningskurva går genom punkten $(0, -1)$. Uppskatta $y(2)$ för den funktion som den lösningskurvan beskriver.



3129 Differentialekvationen $y' - 2x - y = 0$ har tillsammans med begynnelsevillkoret $(0, 1)$ den exakta lösningen $y = 3e^x - 2x - 2$. Lösningen kan också uppskattas med hjälp av Eulers stegmetod. Undersök med räknarprogrammet vilken steglängd man bör använda för att skillnaden mellan resultaten för de två olika lösningarna i $x = 2$, dvs. $y(2)$, ska bli mindre än 0,5 enheter.

NIVÅ 3

3130 Anton tycker om att hoppa fallskärm. Tillsammans med skärmen väger han 78 kg. Antons fart v då skärmen precis vecklats ut kan uppskattas till 35 m/s. Luftmotståndet antas vara proportionellt mot kvadraten på farten, med proportionalitetskonstanten 14 kg/m.

- Vid tiden t sekunder efter det att fallskärmen vecklats ut är farten v m/s. Ställ upp en differentialekvation som beskriver rörelsen sedan fallskärmen vecklats ut.
- Bestäm med Eulers stegmetod Antons hastighet 1 sekund efter det att skärmen har vecklats ut.



Resonemang och begrepp

- ➔ Vad menas med att verifiera en lösning till en differentialekvation?
- ➔ Vad menar man när man säger att differentialekvationen $y' = -4,7y$ har oändligt många lösningar?
- ➔ Hur kan man avgöra ordningen av en differentialekvation?
- ➔ Ge exempel på en differentialekvation som man kan lösa direkt genom att bestämma en primitiv funktion.
- ➔ Ge några exempel där man använder differentialekvationer för att modellera verkliga förlopp.
- ➔ Hur kan man förbättra det närmevärde man får när man använder Eulers stegmetod?

3.2 Differentialekvationer och tillämpningar

Ordboken

Homogen är sammansatt av grekiskans *homos* och *genos*, som tillsammans betyder av samma art.

Homogena differentialekvationer av första ordningen

Om man till exempel vill beskriva hur en djurpopulation förändras med tiden, så är det många gånger rimligt att anta att tillväxthastigheten för populationen är proportionell mot populationens storlek. Vi betecknar antalet djur med y , tiden uttryckt i år med x och antar att antalet djur ökar med 3 % per år. Vi kan i så fall teckna differentialekvationen

$$y' = 0,03y$$

Redan i första avsnittet har vi sett att en lösning till den här typen av differentialekvationer ges av $y = Ce^{0,03x}$ där C är en konstant. Värdet på konstanten bestäms av begynnelsevillkoret. Om vi till exempel vet att djurpopulationen från början bestod av 400 djur, så kan vi se att värdet på C bestäms av villkoret $y(0) = 400$ eftersom

$$y(0) = Ce^{0,03 \cdot 0} = Ce^0 = 400$$

ger $C = 400$.

En homogen differentialekvation

Den här typen av differentialekvationer är vanligt förekommande i naturvetenskapliga modeller. Gemensamt för dem är att de leder till differentialekvationer som kan skrivas i formen

$$y' + ay = 0, \text{ där } a \text{ är en konstant.}$$

Det här är en första ordningens differentialekvation, eftersom förstaderivatet är den högsta förekommande ordningen av derivatan. Differentialekvationen kallas även för en *homogen differentialekvation*. I en homogen differentialekvation har varje term den obekanta funktionen eller någon av dess derivator som faktor. En homogen differentialekvation av andra ordningen består alltså enbart av termer som innehåller y'' , y' och y .

Lösningen till $y' + ay = 0$

Den allmänna lösningen till en homogen differentialekvation av första ordningen

$$y' + ay = 0$$

ges av funktionen

$$y = Ce^{-ax}$$

där C och a är konstanter.

Vi har tidigare visat att $y = C \cdot e^{-ax}$ är en lösning till differentialekvationen $y' + ay = 0$. Vi ska nu visa att det är den enda lösningen.

Bevis

Vi har alltså tidigare visat att $y = C \cdot e^{-ax} \rightarrow y' + ay = 0$ och visar här omvändningen, dvs. att $y' + ay = 0 \rightarrow y = C \cdot e^{-ax}$.

Vi multiplicerar båda led i ekvationen $y' + ay = 0$ med e^{ax} . Det kan vi göra eftersom $e^{ax} \neq 0$ för alla värden på x .

Vi får den motsvarande ekvationen

$$y' \cdot e^{ax} + ay \cdot e^{ax} = 0 \cdot e^{ax}$$

$$y' \cdot e^{ax} + ay \cdot e^{ax} = 0$$

Om vi jämför vänsterledet med $D(y \cdot e^{ax}) = y' \cdot e^{ax} + y \cdot a \cdot e^{ax}$, så ser vi att VL kan skrivas som derivatan av produkten $y \cdot e^{ax}$. Det ger

$$D(y \cdot e^{ax}) = 0$$

$$y \cdot e^{ax} = C \quad \text{Eftersom derivatan av en konstant är 0}$$

$$y = \frac{C}{e^{ax}} = C \cdot e^{-ax}$$

Det innebär att alla lösningar till ekvationen $y' + ay = 0$ är av formen

$$y = C \cdot e^{-ax}$$

v.s.v.

Exempel:

Bestäm den lösning till $4y' - 2y = 0$ för vilken

a) $y(0) = 2$

b) $y(2) = 1$

Lösning:

a) Vi skriver först om ekvationen till formen $y' - ay = 0$

$$4y' - 2y = 0 \quad \text{Dela båda led med 4}$$

$$y' - 0,5y = 0$$

som har den allmänna lösningen $y = Ce^{0,5x}$

Villkoret $y(0) = 2$ ger ekvationen

$$Ce^{0,5 \cdot 0} = 2 \quad e^0 = 1$$

$$C = 2$$

Svar: Lösningen $y = 2e^{0,5x}$ uppfyller villkoret $y(0) = 2$.

b) Den allmänna lösningen är $y = Ce^{0,5x}$. Vi sätter $y(2) = 1$ och bestämmer C

$$Ce^{0,5 \cdot 2} = 1$$

$$Ce^1 = 1 \quad \text{ger } C = \frac{1}{e}$$

Vi sätter in värdet på C i ekvationen $y = Ce^{0,5x}$ och får

$$y = \frac{1}{e} \cdot e^{0,5x} = e^{-1} \cdot e^{0,5x} = e^{0,5x-1}$$

Svar: Lösningen $y = e^{0,5x-1}$ uppfyller villkoret $y(2) = 1$.

Koefficienten framför y i differentialekvationen är $-0,5$. Det ger $y = C \cdot e^{-(-0,5x)} = C \cdot e^{0,5x}$

Exempel:

Vid en inventering av rävmamman på en ö räknade man antalet rävar. Antalet antas sedan förändras endast genom nativitet och mortalitet, det vill säga endast bero av antalet födslar och antalet dödsfall. För att kunna ställa upp en modell för hur populationens storlek förändras antar man att både nativiteten och mortaliteten är proportionella mot antalet individer i populationen. Man antar också att förändringshastigheten av antalet individer per år är differensen av nativiteten och mortaliteten.



- Ställ upp en differentialekvation som beskriver populationens tillväxt.
- Bestäm en lösning till differentialekvationen genom att utgå från att antalet rävar vid försökets start uppskattades till 30 stycken och att proportionalitetskonstanten för nativiteten var 3 procentenheter större än för mortaliteten.

Lösning:

a) Eftersom både nativitet och mortalitet är proportionella mot antalet individer N kan de skrivas nN respektive mN , där n och m är konstanter som anger nativiteten respektive mortaliteten.

Om antalet rävar vid inventeringen är N stycken vid tiden t år, så är förändringshastigheten $\frac{dN}{dt}$. Eftersom förändringshastigheten räknat i antal individer per år är differensen av nativiteten och mortaliteten, så kan vi ställa upp differentialekvationen

$$\frac{dN}{dt} = nN - mN = (n - m)N \quad \text{Förändringshastigheten är differensen av nativiteten och mortaliteten}$$

b) Den allmänna lösningen till differentialekvationen $\frac{dN}{dt} = (n - m)N$ är $N(t) = Ce^{(n-m)t}$. Vi bestämmer C så att antalet rävar vid $t = 0$ är 30 st.

$$N(0) = 30 \quad \text{ger } C = 30 \quad 30 = Ce^{(n-m) \cdot 0}$$

Proportionalitetskonstanten för nativiteten är 3 procentenheter större än för mortaliteten. Det ger $n - m = 0,03$ och lösningen till differentialekvationen blir

$$N(t) = 30e^{0,03t}$$

Både nativitet och mortalitet är proportionella mot antalet individer N :
Antal födda = $n \cdot N$
Antal döda = $m \cdot N$

NIVÅ 1

- 3201** Bestäm den allmänna lösningen till
- $y' + 2y = 0$
 - $y' - 3y = 0$
 - $y' - 7y = 0$
- 3202** Bestäm den lösning till $4y' = -12y$ för vilken
- $y(0) = -5$
 - $y(2) = e^2$
 - $y(-1) = e^7$
- 3203** I en bakterieodling är tillväxthastigheten, $N'(t)$ bakterier per minut, proportionell mot antalet bakterier $N(t)$. Proportionalitetskonstanten är $0,05 \text{ min}^{-1}$.
- Ställ upp den differentialekvation som visar detta.
 - Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
 - Vilken lösning får du om du använder begynnelsevillkoret $N(0) = 1\,500$?
 - Hur många bakterier finns det i sådana fall efter 7 minuter?
- 3204** Antalet mördarsniglar M i Astons trädgård ökar enligt differentialekvationen $\frac{dM}{dt} = 0,03M$ där t är tiden i dygn. Vid $t = 0$ är $M = 175$.
- Lös differentialekvationen.
 - Bestäm antalet mördarsniglar efter 5 dygn.
- 3205** I en bakterieodling finns vid starten av ett försök 3 000 bakterier. Antalet bakterier ökar med en hastighet som är 4 % av antalet bakterier varje timme. Låt t vara tiden i timmar efter försökets start och N antalet bakterier vid tiden t .
- Ställ upp en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver tillväxten i bakterieodlingen.
 - Lös differentialekvationen.

3206 När Lasse och Karin kommer ut till stugan en vårdag är temperaturen inne i stugan 14°C . Två timmar efter att de har börjat elda har temperaturen stigit till 17°C . Om temperaturen är $y^\circ\text{C}$ efter t timmar, så kan man beskriva förändringen av temperaturen i stugan med differentialekvationen $y' = ky$.

- Lös differentialekvationen.
- Hur lång tid dröjer det, från det att Lasse och Karin kom till stugan, innan temperaturen i stugan är 20°C ?

3207 Föryngringen av lodjurspopulationen i ett område antas ske så att tillväxten är proportionell mot antalet djur i området. Låt t vara tiden i år efter det att man började studera lodjurspopulationen i området och låt N vara antalet djur.

- Ställ upp en differentialekvation som visar lodjurspopulationens tillväxt.
- Det var 5 djur i området från början och proportionalitetskonstanten antogs vara 0,08. Hur många djur bör det då finnas i området efter 7 år?



3208 Sångsvanen är en fågelart som var starkt hotad år 1960. Då räknade man med att det endast fanns 20 par i Sverige. Sedan dess har det skett en kraftig ökning av antalet sångsvanar. Tillväxthastigheten antas ha varit proportionell mot antalet par. Låt antalet par av sångsvanar vara N st och tiden t år.

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver ökningen av antalet par.
- Bestäm lösningen till differentialekvationen då antalet par av sångsvanar var 4 000 år 2008.



3211 Vilken funktion uppfyller villkoren $3f'(x) = f(x)$ och $f(0) = 5$?

3212 Lufttrycket y kPa avtar med höjden x km över havet. Förändringshastigheten av lufttrycket med avseende på höjden är proportionell mot det aktuella lufttrycket på samma höjd.

- Ställ upp och lös den differentialekvation som beskriver lufttryckets förändring.
- Bestäm proportionalitetskonstanten om lufttrycket är hälften så stort på höjden 5,5 km, som det är vid havsytan.

3213 Antalet invånare i en stad minskar med 2 % per år av det aktuella antalet.

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver minskningstakten $N'(t)$.
- Hur många bor i staden i slutet av år 2023 om det bodde 47 000 personer där i slutet av år 2013?

3214 Bestäm den lösning till $y' = ky$ för vilken

- $y(0) = 3$ och $y'(0) = 6$
- $y(0) = 5$ och $y(1) = 2$
- $y(1) = 2$ och $y(2) = 3$

3215 I 1,0 gram kol i levande materia finns i genomsnitt $6,5 \cdot 10^{10}$ atomer av den radioaktiva isotopen kol-14. När en organism dör tillförs inga fler kol-14-atomer. Mängden kol-14-atomer minskar då med en hastighet som antas vara proportionell mot antalet atomer som finns kvar.

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.
- Bestäm differentialekvationens allmänna lösning, då halveringstiden för kol-14 är 5 700 år.
- 1,0 gram kol från ett gammalt ben innehåller $1,8 \cdot 10^{10}$ atomer kol-14. Uppskatta benets ålder.
- Anta att antalet atomer i c) är mätt med felmarginalen $\pm 10\%$. Mellan vilka värden kan benets ålder ligga?

NIVÅ 2

3209 Bestäm den homogena differentialekvation av första ordningen som har den allmänna lösningen $y = Ce^{-3x}$.

3210 Lös differentialekvationen $y' + ky = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 5$ och $y'(1) = -10e^{-2}$.

3216 Vid kärnkraftsolyckan i Tjernobyl år 1986 spreds det radioaktiva ämnet cesium-137. Sönderfallet av ämnet kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0,023y$$

där y är antalet atomkärnor och t är tiden i år.

- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
- Bestäm halveringstiden för cesium-137.
- När har 95 % av ämnet sönderfallit?

3217 I en elektrisk krets urladdas en kondensator genom en resistor. Laddningen förändras enligt differentialekvationen

$$R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

där q är kondensatorns laddning i coulomb vid tiden t sekunder och C dess kapacitans i farad. R ohm är resistorns resistans.

- Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoret $q(0) = Q$.
- Hur lång tid tar det innan laddningen sjunkit till hälften om $R = 10 \text{ k}\Omega$ och $C = 0,5 \text{ nF}$?

3218 Vid en fabrik tillverkas jäst i en tank, och omständigheterna är sådana att mängden jäst har en tillväxthastighet som är proportionell mot jästens massa y kg, med proportionalitetskonstanten $0,003 \text{ min}^{-1}$. När processen startar finns 200 kg jäst i tanken.

- Teckna en differentialekvation som beskriver jästens tillväxthastighet.
- Hur mycket jäst bör det enligt modellen finnas i tanken efter fem timmar?
- Vid produktionen tar man ut ett konstant flöde av jästmassan. Teckna en differentialekvation som beskriver jästmassans förändring när man tar ut a kg jäst per minut ur tanken.
- Hur mycket jäst kan tappas ut per minut om jästmassan i tanken hela tiden skall vara 200 kg?

(Np MaE ht 1997)

3219 Kokkett vatten i en viss termos svalnar med en hastighet som är proportionell mot den temperatur som vattnet har just då. Vilken temperatur har vattnet efter 8 h om vattnet efter 4 h har temperaturen 60°C ?

NIVÅ 3

3220 Den så kallade Kermack-McKendrick modellen beskriver antalet infekterade människor vid spridningen av en smittsam sjukdom i en begränsad population. Modellen bestäms av differentialekvationerna

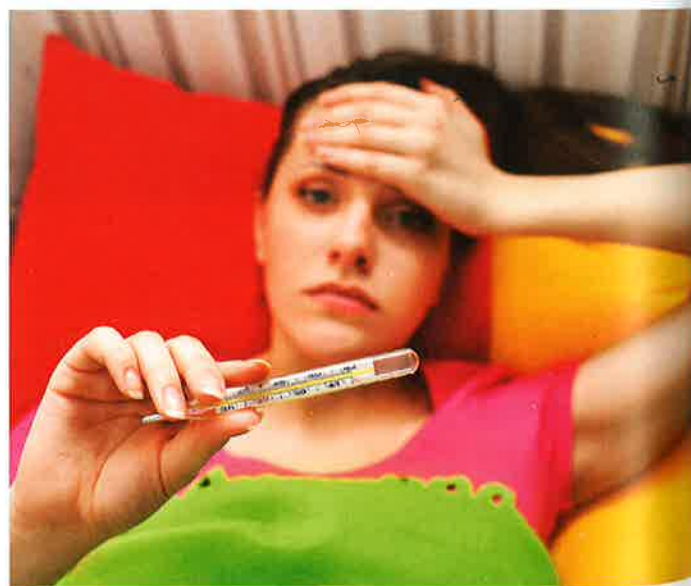
$$\frac{dS}{dt} = -rSI \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = aI \quad (3)$$

där $S(t)$ är det antal som är mottagliga för sjukdomen (susceptibles), $I(t)$ är det antal som är infekterade och kan föra sjukdomen vidare (infected), $R(t)$ är de tillfrisknade eller, ifall sjukdomen är dödlig, avlidna (removed) medan a och r är konstanter.

- Tolka differentialekvationerna (1), (2) och (3) med ord.
- Motivera vad summan $S + I + R$ motsvarar.



Inhomogena differentialekvationer

Om $f(x)$ i $y' + ay = f(x)$ är ett polynom, så måste lösningen vara av samma grad som $f(x)$. I ekvationen ovan kan vi anta att lösningen är av formen $y = ax + b$, eftersom högerledet är förstgradspolynomet $6x$.

Inhomogena differentialekvationer av första ordningen

En homogen differentialekvation av första ordningen kan skrivas i formen $y' + ay = 0$. Den har alltså endast termer med den obekanta funktionen y eller dess derivata y' som faktor. Men differentialekvationen $y' + 3y = 6x$ innehåller termen $6x$, som varken har y eller y' som faktor. En sådan ekvation kallas *inhomogen*.

En inhomogen differentialekvation av första ordningen är av formen $y' + ay = f(x)$, där högerledet är en funktion av x . Man kan ofta hitta en lösning till en inhomogen differentialekvation genom att man helt enkelt gissar på en lämplig funktion. Man säger då att man *ansätter* en funktion.

Eftersom det högra till ledet $y' + 3y = 6x$ är ett förstgradspolynom, så kan vi anta att en lösning till differentialekvationen är av formen $y = ax + b$.

Deriverar vi $y = ax + b$ får vi $y' = a$. Ekvationen $y' + 3y = 6x$ ger

$$a + 3(ax + b) = 6x$$

$$\begin{matrix} y' & y \\ a & ax + b \end{matrix}$$

$$a + 3ax + 3b = 6x$$

Termer av samma grad måste vara lika i båda led. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3a = 6 & (1) \\ a + 3b = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Eftersom } 3ax = 6x$$

Ekvation (1) ger $a = 2$, som sätts in i ekvation (2)

$$2 + 3b = 0 \quad \text{ger } b = -\frac{2}{3}$$

En lösning till differentialekvationen är alltså $y = 2x - \frac{2}{3}$. En sådan lösning kallas en *partikulärlösning* och betecknas y_p . Men partikulärlösningen y_p är inte den enda lösningen till $y' + 3y = 6x$. Eftersom lösningen till motsvarande homogena ekvation $y' + 3y = 0$ vid insättning $y' + 3y = 6x$ ger VL = 0, så kan vi addera den till y_p utan att VL ändras vid insättning. Lösningen till motsvarande homogena ekvation är i det här fallet $y_h = Ce^{-3x}$.

Sätter vi in $y = y_h + y_p = Ce^{-3x} + 2x - \frac{2}{3}$ i ekvationen $y' + 3y = 6x$, så får vi

$$\begin{aligned} \text{VL} &= -3Ce^{-3x} + 2 + 3 \cdot \left(Ce^{-3x} + 2x - \frac{2}{3} \right) = -3Ce^{-3x} + 2 + 3Ce^{-3x} + 6x - 2 = \\ &= 6x = \text{HL} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} y' & y \\ -3Ce^{-3x} + 2 & Ce^{-3x} + 2x - \frac{2}{3} \end{matrix}$$

Alltså är *summan* av lösningen till den homogena ekvationen och partikulärlösningen också en lösning till differentialekvationen. Det gäller allmänt.

Lösningen till differentialekvationen $y' + ay = f(x)$

Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen

$$y' + ay = f(x) \text{ är } y = y_h + y_p$$

där y_h är den allmänna lösningen till $y' + ay = 0$ och y_p är en partikulärlösning till differentialekvationen.

Vi har alltså visat att $y = y_p + y_h \rightarrow y' + ay = f(x)$ och ska nu visa omvändningen, dvs. att $y' + ay = f(x) \rightarrow y = y_p + y_h$

Vi har förklarat att om y_p är en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + ay = f(x)$, och y_h är en lösning till motsvarande homogena ekvation $y' + ay = 0$, så är även $y = y_p + y_h$ en lösning till differentialekvationen. Vi ska nu visa att *varje* lösning y till differentialekvationen $y' + ay = f(x)$ kan skrivas på denna form.

Bevis

Anta att y är en godtycklig lösning till ekvationen, dvs. y uppfyller likheten $y' + ay = f(x)$, och att y_p är en partikulärlösning, dvs. $y_p' + ay_p = f(x)$. Om vi subtraherar ekvationerna ledvis får vi

$$y' + ay - (y_p' + ay_p) = 0$$

$$y' - y_p' + a(y - y_p) = 0$$

$$(y - y_p)' + a(y - y_p) = 0$$

Alltså är $(y - y_p)$ en lösning till motsvarande homogena differentialekvation: $y' + ay = 0$, dvs.

$$y_h = y - y_p \text{ vilket ger } y = y_h + y_p$$

Eftersom y var en godtycklig lösning till ekvationen har vi nu visat att *varje* lösning till ekvationen $y' + ay = f(x)$ kan skrivas på formen $y = y_h + y_p$

Exempel:

Den inhomogena differentialekvationen $y' + 2y = 6$ har partikulärlösningen $y_p = 3$ och den homogena differentialekvationen $y' + 2y = 0$ har lösningen $y_h = Ce^{-2x}$.

- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' + 2y = 6$
- Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 2y = 6$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$

Lösning:

- Den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' + 2y = 6$ ges av $y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + 3$

Svar: Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $y = Ce^{-2x} + 3$

- Givet att den allmänna lösningen är $y = Ce^{-2x} + 3$, så har vi att $y(0) = 0$ ger $C + 3 = 0$, dvs. $C = -3$.

Svar: Den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = 0$ är $y = -3e^{-2x} + 3$.

Exempel:

Bestäm den allmänna lösningen till de inhomogena differentialekvationerna

- $y' + 5y = 5$
- $y' - 4y = 2x^2$

Lösning:

- En partikulärlösning till $y' + 5y = 5$ är av formen $y_p = a$.

Ansätt en partikulärlösning som är av samma grad som högerledet

Sätter vi in $y_p' = 0$ och $y_p = a$ i ekvationen får vi $0 + 5a = 5$.

Partikulärlösningen blir alltså $y_p = 1$.

Lösningen till motsvarande homogena differentialekvation $y' + 5y = 0$ är $y_h = Ce^{-5x}$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är $y = y_h + y_p = Ce^{-5x} + 1$.

Svar: Den allmänna lösningen är $y = Ce^{-5x} + 1$.

- En partikulärlösning till $y' - 4y = 2x^2$ kan vara av typen $y_p = ax^2 + bx + c$, eftersom högerledet innehåller en x^2 -term.

Då är $y_p' = 2ax + b$. Insättning i differentialekvationen ger

$$2ax + b - 4(ax^2 + bx + c) = 2x^2$$

$$2ax + b - 4ax^2 - 4bx - 4c = 2x^2$$

Termer av samma grad ska vara lika. Det leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -4a = 2 & (1) & -4ax^2 = 2x^2 \\ 2a - 4b = 0 & (2) & 2ax - 4bx = 0 \\ b - 4c = 0 & (3) & \end{cases}$$

$$\text{Ekvation (1): } -4a = 2 \text{ ger } a = -\frac{1}{2}$$

Insättning i (2) ger

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4b = 0 \quad \text{Lös ut } b$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

Insättning i (3) ger

$$-\frac{1}{4} - 4c = 0 \quad \text{Lös ut } c$$

$$c = -\frac{1}{16}$$

$$\text{Det ger partikulärlösningen } y_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{16}$$

Lösningen till motsvarande homogena differentialekvation $y' - 4y = 0$ är $y_h = Ce^{4x}$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = Ce^{4x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{16}$$

Svar: Den allmänna lösningen är $y = Ce^{4x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{16}$

Exempel:

En liten sten som väger 0,06 kg släpps utan begynnelsehastighet från ett utsiktstorn. Eftersom hastigheten är relativt liten, så kan man anta att luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten, med proportionalitetskonstanten 0,03 kg/s.

- Ställ upp en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver stenens rörelse.
- Bestäm differentialekvationens lösning.
- Vilken hastighet har stenen efter 2 sekunder?

Lösning:

- Kraften som stenen påverkas av beror dels på tyngdkraften, dels på luftmotståndet. Tyngdkraften är $F_T = mg$ och kraften som beror på luftmotståndet är $F_L = kv$. Eftersom tyngdkraften och luftmotståndet verkar i motsatt riktning får vi $F = mg - kv$. Enligt Newtons andra lag gäller att $F = ma$.

Tillsammans ger de differentialekvationen

$$ma = mg - kv \quad \text{Accelerationen är derivatan av hastigheten}$$

Om vi sätter in $a = \frac{dv}{dt}$ och $g = 9,82 \text{ m/s}^2$, så får vi

$$m \frac{dv}{dt} = m \cdot 9,82 - kv \quad \text{Dela båda led med } m$$

$$\frac{dv}{dt} = 9,82 - \frac{k}{m} \cdot v$$

$$k = 0,03 \text{ kg/s} \text{ och } m = 0,06 \text{ kg ger } \frac{k}{m} = 0,5 \text{ s}^{-1}$$

Vid tiden $t = 0$ var hastigheten $v = 0$. Det ger begynnelsevillkoret $v(0) = 0$.

Svar: Den sökta differentialekvationen är $\frac{dv}{dt} = 9,82 - 0,5v$ med begynnelsevillkoret $v(0) = 0$.

- Vi skriver differentialekvationen $\frac{dv}{dt} = 9,82 - 0,5v$ i formen $v' + 0,5v = 9,82$ och löser den.

Vi ansätter en funktion av samma form som HL.

Vi ansätter $v_p = a$ som ger $v_p' = 0$. Insättning ger $0,5a = 9,82$ och $a = v_p = 19,64$.

Lösningen till motsvarande homogena differentialekvation $v' + 0,5v = 0$ är $v_h = Ce^{-0,5t}$. Den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen blir då $v = v_h + v_p = Ce^{-0,5t} + 19,64$.

Villkoret $v(0) = 0$ ger $C = -19,64$

Svar: Lösningen till differentialekvationen är $v = -19,64e^{-0,5t} + 19,64$

- Efter 2 sekunder har stenen hastigheten $v(2) = -19,64e^{-0,5 \cdot 2} + 19,64 \approx 12 \text{ m/s}$.

Svar: Hastigheten efter 2 sekunder är 12 m/s.

NIVÅ 1

3221 Visa att

- $y_p = 4x - 1$ är en partikulärlösning till $y' + 4y = 16x$
- $y_p = x^2 + x$ är en partikulärlösning till $y' - 2y = 1 - 2x^2$

3222 Vilka av funktionerna y_1, y_2, y_3, y_4 ska man ansätta för att bestämma en partikulärlösning till differentialekvationerna här nedanför? Para ihop respektive differentialekvation med passande ansats.

A $y' - 4y = 5$ **B** $y' - 4y = -3x$

C $y' - 4y = 2 + 5x^2$

Ansatser:

$y_1 = ax + b$ $y_2 = ax$

$y_3 = ax^2 + bx + c$ $y_4 = a$

3223 Lös differentialekvationen $y' - 9y = 6x$ genom att

- bestämma lösningen till motsvarande homogena ekvation y_h
- bestämma en partikulärlösning y_p
- bestämma den allmänna lösningen

3224 Bestäm den allmänna lösningen till

- $y' + 5y = 10$ b) $y' - 3y = 9x$
- $y' - 3y = -3x^2$ d) $y' + y = 3e^{2x}$

3225 Bestäm den lösning till $y' - 3y = -3x$ som uppfyller $y(0) = 4$.

NIVÅ 2

3226 Elisabeth och Atle har fått i uppgift att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen

$$y' + 11y = 11x^2 + 3.$$

Atle säger att han helst vill ansätta $y_p = ax^2 + b$, eftersom den ansatsen liknar högerledet i ekvationen. Elisabeth påstår att Atles ansats inte leder till önskat resultat och vill i stället ansätta $y_p = ax^2 + bx + c$.

Vem har rätt? Motivera ditt svar.

3227 Maja har gräddat en sockerkaka. Temperaturen i ugnen var 200°C och temperaturen i rummet är 21°C . När Maja tar ut kakan ur ugnen beräknas den svalna enligt Newtons avsvlningslag

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

där $T^\circ\text{C}$ är kakans temperatur efter t min och $T_0^\circ\text{C}$ är temperaturen i rummet.

- Bestäm k om kakans temperatur är 150°C efter 5 minuter.
- Efter hur lång tid är kakans temperatur 50°C ?



3228 Bestäm den lösning till $y' - 2y = 6x^2 - 5$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.

3229 Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen

$$y' + 7y = \sin x + \cos x$$

3230 Kan det finnas något tal k , så att $y = x^2 + 1 + Ce^{-x}$ satisfierar differentialekvationen $y' + ky = x^2$? Motivera ditt svar.

Modellering med hjälp av differentialekvationer

Vi har tidigare i kapitlet främst löst differentialekvationer av första ordningen. De differentialekvationer av andra ordningen som vi behandlat har varit av formen $y'' = f(x)$ och vi har löst dem genom att bestämma primitiva funktioner i två steg.

Det finns många exempel på differentialekvationer av andra ordningen som inte kan lösas med denna metod. Ett exempel är den differentialekvation som beskriver harmonisk svängningsrörelse.

Tillämpning

Säg att vi har en vikt med massan m som är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten k . Om vi vill bestämma viktens avvikelse y från jämviktsläget som funktion av tiden t när vikten satts i svängning, så kan vi ställa upp en differentialekvation med hjälp av Newtons andra lag, $F = ma$.

För en vikt som hänger i en fjäder gäller att den resulterande kraften är proportionell mot avvikelserna y från jämviktsläget dvs. vi har att

$$F = -ky$$

Eftersom $F = ma$ och accelerationen a ges av andraderivatan av y så har vi att

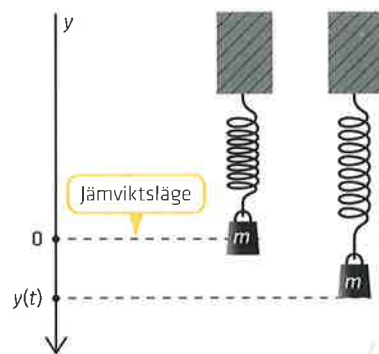
$$my'' = -ky$$

Det kan skrivas som

$$y'' + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

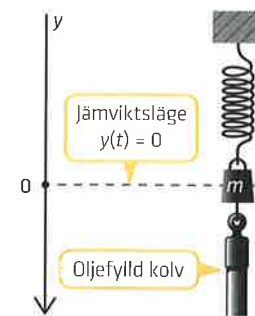
Om vi vill bestämma viktens avvikelse från jämviktsläget, så måste vi lösa differentialekvationen här ovanför.

Det finns analytiska metoder för att lösa den här och liknande differentialekvationer, men de hör inte till gymnasiet matematik och vi kommer här inte att gå in närmare på dem. Vi kommer i stället att fokusera på att ställa upp differentialekvationer som modeller för verkliga situationer och att tolka lösningen av dem. Vi väljer därför att använda ett datorprogram för att lösa ekvationer av samma typ som i exemplet ovan. I flera av uppgifterna förutsätter vi att du har tillgång till digitala verktyg som kan hantera lösning av differentialekvationer.



Exempel:

Något förenklat kan man likna stötdämparen på en bil vid en vikt som är upphängd i en fjäder. Viktens avvikelse från jämviktsläget motsvarar det som händer med stötdämparen om bilen kör i ett gupp. För att vikten (stötdämparen) inte ska svänga så länge, kopplas vikten ihop med en kolv i en cylinder fylld med olja. Oljan har som funktion att dämpa kolvens och viktens rörelse, dvs. minska viktens fart.



- Beskriv fjäderkraften som en funktion av viktens avvikelse y från jämviktsläget.
- Friktionskraften från oljan inne i cylindern, som hindrar kolvens rörelse, är proportionell mot farten. Beskriv friktionskraften med ett uttryck.
- Teckna den differentialekvation som beskriver viktens rörelse sedan den rubbats från jämviktsläget och sedan släppts.
- Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 0,2$ och $y'(0) = 0$ givet att $m = 1$, $b = 1$ och $k = 2$. Rita grafen till $y(t)$.

Lösning:

- Fjäderkraften är proportionell mot avvikelserna från jämviktsläget. Det innebär att fjäderkraften F_f kan skrivas $F_f = -ky$, där k är fjäderkonstanten och y är avvikelserna från jämviktsläget.
- Friktionskraften F_{fr} är proportionell mot kolvens fart och kan därför tecknas $F_{fr} = -bv$, där b är en positiv proportionalitetskonstant som brukar kallas för dämpning och v är kolvens fart.
- Enligt Newtons andra lag, $F = ma$, är den resulterande kraften proportionell mot accelerationen. Vi kan ställa upp följande ekvation:

$$ma = F_f + F_{fr} = -ky - bv \quad F_f = -ky, F_{fr} = -bv$$

$$ma + bv + ky = 0$$

$$my'' + by' + ky = 0 \quad \text{Eftersom } a = y'' \text{ och } v = y'$$

- Vi sätter in givna värden på m , b och k och löser $my'' + by' + ky = 0$ med hjälp av ett datorprogram. Lösningen till ekvationen är

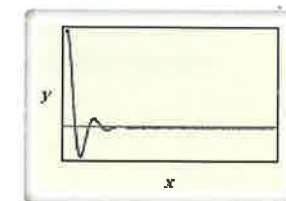
$$y(t) = e^{-t/2} \left(0,0755929 \sin \left(\frac{\sqrt{7}t}{2} \right) + 0,2 \cos \left(\frac{\sqrt{7}t}{2} \right) \right)$$

där vi använt begynnelsevillkoren

$$y(0) = 0,2 \text{ och } y'(0) = 0.$$

Grafen till funktionen är ritad till höger.

Vi kan tydligt se att svängningen dämpas.



Exempel:

I den allra enklaste tillväxtmodellen för en population utgår man från att tillväxthastigheten är proportionell mot populationens storlek N , dvs. $\frac{dN}{dt} = kN$. På grund av begränsande faktorer som t.ex. tillgång på mat, är det i många sammanhang rimligare att anta att det finns en maximal storlek M för populationen. En modell som bättre beskriver tillväxten över tid är i sådana fall den *logistiska tillväxtmodellen* $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$.

Tjugo kackerlackor finns i ett begränsat område. Enligt en uppskattning kommer maximalt 500 kackerlackor att kunna överleva i området. Proportionalitetskonstanten k bedöms vara 0,003.

- Använd modellen $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$, där $N(t)$ är antalet kackerlackor vid tiden t månader, och lös ekvationen med aktuella värden.
- Rita en graf till lösningen och förklara kurvans utseende.
- Efter hur många veckor har populationen av kackerlackor uppnått halva maximala antalet?

Lösning:

- För $k = 0,003$ och $M = 500$ får vi

$$\frac{dN}{dt} = 0,003N(500 - N) \text{ med } N(0) = 20$$

Från början fanns det 20 kackerlackor.

Vi använder ett datorprogram anpassat för att lösa differentialekvationer och får lösningen

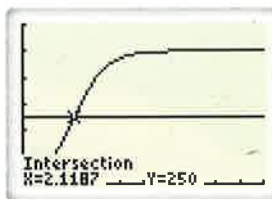
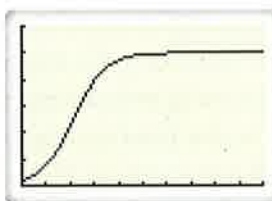
$$N = \frac{500e^{1,5t}}{24 + e^{1,5t}}$$

- Vi ritar kurvan $N = \frac{500e^{1,5t}}{24 + e^{1,5t}}$ i vårt datorprogram eller på den grafritande räknaren.

Av modellen framgår det att när populationen N är lika stor som den maximala populationsstorleken, dvs. $N = 500$, så är tillväxthastigheten noll. Populationen har då uppnått den storlek som svarar mot miljöns bärförmåga. Kackerlackorna har blivit så många att födan inte räcker till fler. Det förklarar varför kurvan planar ut.

- Vi lägger in kurvan till ekvationen $y = 250$ tillsammans med föregående graf och avläser skärningspunkten.

Av grafen kan vi se att det tar ca 2 månader för populationen att uppnå antalet 250.



NIVÅ 1

3231 Differentialekvationen $4y'' + 4y' + 5y = 0$ beskriver en fri dämpad svängning.

- Lös ekvationen t.ex. med hjälp av någon digital programvara. Anta att $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.
- Kontrollera genom att rita grafen till funktionen y att det verkligen är en dämpad svängning som beskrivs av differentialekvationen.

3232 I en kommun med positiv befolkningsutveckling så är befolkningstillväxten $\frac{dN}{dt}$ vid tiden t år proportionell mot den aktuella befolkningens mängd. Proportionalitetskonstanten är 0,05.

- Beskriv tillväxten med hjälp av en differentialekvation.
- Beskriv med ord vad den uppställda differentialekvationen betyder.
- Bestäm hur många invånare kommunen har år 2110 enligt modellen, givet begynnelsevillkoret $N(0) = 120\,000$ där år noll svarar mot år 2010.
- Näm en brist med den här modellen för befolkningstillväxt.



3233 I ett radioaktivt preparat sönderfaller kärnorna med en hastighet som är proportionell mot den aktuella mängden radioaktiva kärnor. Proportionalitetskonstanten kallas för sönderfallshastigheten och brukar betecknas λ . Sönderfallshastigheten är en positiv konstant som har olika värden för olika ämnen.

- Teckna en differentialekvation som beskriver situationen här ovanför. Använd λ som beteckning för den positiva proportionalitetskonstanten.
- Efter en halveringstid återstår hälften av de radioaktiva kärnorna i preparatet. För kol-14 är halveringstiden ca 5 730 år. Bestäm sönderfallskonstanten för kol-14.
- Visa att sönderfallskonstanten generellt sett kan skrivas $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ givet att $T_{1/2}$ är halveringstiden för det radioaktiva preparatet.

NIVÅ 2

3234 Kan $y = \sin ax$ vara en lösning till differentialekvationen $y'' + \frac{k}{m}y = 0$? Motivera ditt svar.

3235 En vikt med massan 0,1 kg är upphängd i en fjäder med fjäderkonstanten $k = 0,9$ N/m. Vikten påverkas av kraften $F = -ky$ då den befinner sig y meter från jämviktsläget. Med hjälp av kraftekvationen ($F = ma$) kan vi ställa upp differentialekvationen

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

- Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
- Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$.

3236 Bestäm ett tal k , så att $y = 2x + Ce^{-5x} + De^{5x}$ satisfierar differentialekvationen $y'' - ky = -50x$.

3237 En partikel svänger runt sitt jämviktsläge. Den kraft som partikeln påverkas av är riktad mot jämviktsläget och proportionell mot avståndet till detsamma. Viktens läge y cm från jämviktsläget vid tiden t sekunder bestäms av differentialekvationen $y'' + 4y = 0$, med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = -2$.

- Bestäm y som funktion av tiden.
- Efter hur lång tid passerar partikeln jämviktsläget för första gången efter $t = 0$?
- Vilken fart har vikten när den passerar jämviktsläget?

3238 Tänk dig att man släpper ut 40 kaniner på en ö, där det från början inte finns några kaniner. Vi betecknar antalet kaniner efter t månader med $N(t)$.

- Ange den differentialekvation, inklusive lämpligt begynnelsevillkor, som beskriver kaninpopulationen om tillväxttakten för kaninerna antas vara proportionell mot antalet kaniner med en proportionalitetskonstant som är 0,025?
- Hur många kaniner finns det enligt denna modell på ön efter 3 år?
- Kan modellen vara en rimlig beskrivning av kaninpopulationens storlek under en längre tidsperiod? Motivera ditt svar.

En modell som även tar hänsyn till att populationens storlek är begränsad till ett maximalt värde, som en följd av begränsad tillgång till bl.a. föda, är en så kallad *logistisk tillväxtmodell*.

Den kan skrivas $\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$, där M är det maximala värdet.

- Ange den differentialekvation som beskriver kaninpopulationens tillväxt om det uppskattningsvis är maximalt 700 kaniner som kan livnära sig på ön.
- Hur många kaniner finns på ön när tillväxthastigheten är som störst enligt denna modell?

3239 En kedja med längden 10,0 m hänger över en tunn metallstång som har en mycket glatt yta. Den kortare änden som har längden 4,0 m hålls fast. Då kedjan släpps glider den av stängen på grund av sin egen tyngd. Efter t sekunder har kedjan glidit y meter. Man kan visa att approximativt gäller

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2 + 2y$$

för kedjan ovan.

- Visa att $y = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}t} - 1$ är en lösning till differentialekvationen ovan.
- Bestäm med funktionen i a) hur lång tid det tar för kedjan att glida av stängen. Svara med två gällande siffror.

(Cp NT3 1983)

3240 Enligt Newtons avsvalningslag så är avsvalningshastigheten för en vätska proportionell mot temperaturskillnaden mellan vätskan och omgivningen. Kaffe som hålls upp i en kopp har från början temperaturen 80 °C. Fem minuter senare har temperaturen sjunkit till 66 °C. Vilken temperatur har kaffet efter 20 minuter om vi antar att kaffet är placerat i ett rum med temperaturen 20 °C.

NIVÅ 3

3241 En pendel består av en kula med massan m kg, som är upphängd i en tråd med längden L m. Krafterna som verkar på kulan ger differentialekvationen $mLy''(t) = -mg \sin y(t)$. Differentialekvationen går att lösa med exakta metoder, men för små vinklar y kan man sätta $\sin y \approx y$, vilket ger den förenklade ekvationen $mLy'' + mgy = 0$.

- Motivera att $\sin y \approx y$ för små vinklar y .
- Sätt $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ och $L = 1,09 \text{ m}$. Förenkla och bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.
- Bestäm den lösning som uppfyller villkoren $y(0) = 0,5$ och $y'(0) = 2$.

3242 Kalle är inblandad i en arbetsplatsolycka där han råkar inandas skadliga ångor från ett kemiskt preparat. Det dröjer ganska länge innan Kalle uppsöker ett sjukhus och inte förrän 20 timmar efter olyckan tas ett blodprov. Analysen visar att blodet innehåller 0,00372 mg/ml av det gift som han inandats. Efter ytterligare 8 timmar tas ett nytt blodprov och då har koncentrationen gift i blodet sjunkit till 0,00219 mg/ml. Låt oss anta att förändringshastigheten för giftkoncentrationen är proportionell mot koncentrationen och låt y mg/ml vara koncentrationen av gift i blodet t timmar efter det första blodprovet. Läkaren vill ge medicinsk behandling om giftkoncentrationen vid något tillfälle varit större än 0,017 mg/ml. Finns det enligt modellen någon risk för att giftkoncentrationen i Kalles blod varit så hög?

(Np MaE vt 1999)



3243 En viss svängningsrörelse kan beskrivas med differentialekvationen

$$y''(t) + by'(t) + 4y(t) = 0$$

Sätt $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Undersök hur värdet av b påverkar svängningsrörelsen.

3244 En boll med massan 0,5 kg släpps och faller sedan under inverkan av tyngdkraften och luftmotståndet. Bollen påverkas alltså av en kraft riktad mot marken, tyngdkraften, och en kraft riktad uppåt från marken, luftmotståndet. Vi betecknar hastigheten $v(t)$ m/s, kraften från luftmotståndet med F_L och antar att luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat. Proportionalitetskonstanten är 0,25 kg/m.

- Använd Newtons andra lag, $F = ma$, och teckna en differentialekvation som med lämpligt begynnelsevillkor beskriver rörelsen så bra som möjligt.
- Vilken hastighet har bollen 1 sekund efter det ögonblick som den släpptes, om vi antar att bollen släpps tillräckligt högt upp?
- Rita grafen som beskriver bollens hastighet som funktion av tiden och undersök om det finns någon största möjliga hastighet som bollen kan nå?
- För låga hastigheter brukar man kunna anta att luftmotståndet är proportionellt enbart mot hastigheten och alltså inte mot hastigheten i kvadrat. Anta som ovan att proportionalitetskonstanten är 0,25 kg/s och undersök om det då också finns någon största möjliga hastighet som bollen kan nå.

Resonemang och begrepp

- Vad är skillnaden mellan en homogen och en inhomogen differentialekvation?
- Beskriv hur man får den allmänna lösningen till en inhomogen differentialekvation.
- Ge exempel på olika typer av naturvetenskapliga problem som man kan lösa med differentialekvationer.
- Beskriv hur du kan finna partikulärlösningen till en inhomogen differentialekvation.
- Ge exempel på någon verklig företeelse som ger upphov till en andra ordningens differentialekvation.



Jordens befolkning



År 1900 uppgick jordens befolkning till 1,65 miljarder. Sedan dess har befolkningen mångdubblats och var år 2010 hela 6,8 miljarder. En enkel modell som kan användas för att beskriva hur en befolkning förändras över tid, är den så kallade *Malthusianska modellen*. Då befolkningen endast ökar genom födselar och minskar genom dödsfall är det rimligt att anta att dessa ökningar och minskningar är proportionella mot befolkningens storlek. Matematiskt kan vi beskriva befolkningens förändringshastighet med en differentialekvation:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN = rN$$

där N är antalet individer i populationen som funktion av tiden t och där a , b och r är konstanter.

- Vad står konstanterna a , b och r för?
- För vilka värden på konstanten r har vi en ökning respektive minskning av befolkningen? Finns det något värde på r som ger en konstant befolkning?
- Utgå från den Malthusianska modellen och bestäm hur stor jordens befolkning enligt denna modell kommer att vara om 100 år.

Denna modell är uppenbart orealistisk, eftersom den säger att en population kan växa obegränsat. En mer realistisk modell, föreslagen av den belgiske matematikern Pierre François Verhulst (1809–1849), tar hänsyn till att miljön begränsar tillväxten. Orsaken till att tillväxten begränsas kan till exempel vara att det finns ändlig tillgång till föda. Om vi antar att den övre gränsen för en viss befolkning är M individer, så kommer värdet av r att variera med befolkningens antal N . När N är nära den övre gränsen M är r litet och när N är nära noll, så blir r i stället stort. Vi ser alltså att värdet av r är en funktion av befolkningens antal N , dvs. $r = r(N)$. Eftersom populationens övre gräns är M individer, så har vi att $r(N) = 0$ för $N = M$. Det är rimligt att anta att $r(N)$ antar sitt största värde $r_{\max}$ för små N . Det enklaste sättet att modellera detta är att anta att $r(N)$ minskar linjärt från $r = r_{\max}$ för $N = 0$ till $r = 0$ för $N = M$.

- Teckna den linjära funktionen $r(N)$ givet de förutsättningar som beskrivs här ovanför.
- Teckna den differentialekvation som beskriver tillväxten under dessa förutsättningar.
- Motivera ett rimligt värde på $r_{\max}$ och förklara hur man bör gå till väga för att bestämma hur stor jordens befolkning enligt denna modell kommer att vara om 100 år.

Väder och väderprognoser



Meteorologi och differentialekvationer

Väder och väderprognoser intresserar många nordbor. Kanske för att vi här lever i ett område med fyra olika årstider som kan ge oss alltifrån långa, ljusa och varma sommardagar, till korta, mörka och kalla vinterdagar. Eftersom vädret varierar så pass mycket, följer många med stort engagemang de väderprognoser som varje dag erbjuds i tidningar, radio och tv.

En väderprognos tas fram av en yrkesgrupp som kallas meteorologer. Ordet prognos kommer från grekiskans *prognosticon*, som ungefär betyder ”att veta i förväg”. Väderprognoserna baseras på stora mängder observationer från väderstationer utspridda över hela jorden. Men meteorologerna hämtar också information från vädersatelliter och väderballonger ovanför och i atmosfären. Från alla dessa observationer erhåller meteorologerna mätvärden på till exempel lufttryck, temperatur, nederbörd, vindstyrka och luftfuktighet.

De insamlade observationerna används som utgångspunkt för de beräkningar som meteorologerna gör. Till grund för en del av beräkningarna ligger det system av differentialekvationer som, efter den franske ingenjören Louis Navier (1785–1836) och den brittiske matematikern George Gabriel Stokes (1819–1903), har fått namnet Navier-Stokes ekvationer:

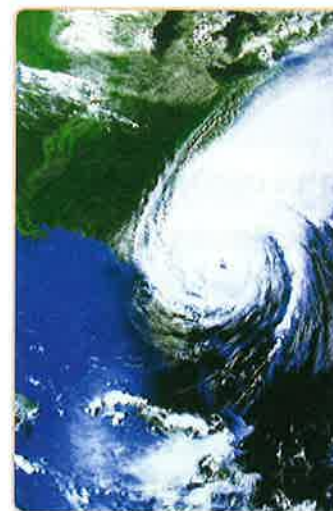
$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial p u_i}{\partial t} + \frac{\partial p u_i u_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial p E}{\partial t} + \frac{\partial p u_i H}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Vi ska här inte kommentera innebörden av dessa differentialekvationer, mer än att säga att de är en modell över luftens strömningar. Ekvationerna löses numeriskt och lösningarna bearbetas sedan för att kunna presenteras för allmänheten på ett begripligt och överskådligt sätt.

Tillförlitligheten hos meteorologernas prognoser beror inte bara av mängden och kvaliteten på insamlade data, utan även med vilken noggrannhet man har möjlighet att lösa de uppställda ekvationerna. Det senare är beroende av hur kraftfulla datorer man har tillgång till. Trots stora mängder observationer och dagens superdatorer, har det ändå visat sig vara svårt att framställa tillförlitliga långtidsprognoser. Luftens strömningar i atmosfären uppvisar ett alltför nyckfullt och ibland till och med kaotiskt beteende. Även en mycket liten förändring av villkoren, kan ge stora förändringar av vädret. I Sverige har SMHI 83 % träffsäkerhet i sina endygnsprognoiser medan träffsäkerheten i femdygnsprognoiser är ca 65 %.



Väderstation



Orkan över Florida.



Ta reda på några andra naturvetenskapliga områden där man kan ha användning av Navier-Stokes ekvationer.

NEWTONS AVSVÄLNINGSLAG

Enligt Newtons avsvälningsslag förändras temperaturen hos ett föremål med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan föremålet och omgivningen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{omg}})$$

där k är proportionalitetskonstanten, T_{omg} °C omgivningens temperatur och T °C föremålets temperatur vid t minuter ($T \geq T_{\text{omg}}$).

Vid ett visst tillfälle är kaffets temperatur 73,8 °C då det tas från en kaffeautomat och temperaturen i rummet är 21,3 °C.

- Bestäm $T(t)$ genom att lösa differentialekvationen.
- Sätt in olika värden på k , där $0,01 < k < 0,1$, och rita grafen till funktionen för $0 \leq t \leq 30$ med hjälp av räknaren. Hur påverkar k grafens utseende?
- Ta en kopp kaffe från närmaste automat och mät temperaturen varje minut medan kaffet svalnar. Rita ett koordinatsystem och pricka in värdena.
- Jämför din graf med de grafer som du har ritat med räknaren och försök uppskatta värdet på k .

DIFFERENTIALEKVATIONER AV ANDRA ORDNINGEN

Homogena differentialekvationer av andra ordningen kan skrivas i formen $y'' + ay' + by = 0$ där a och b är reella och konstanta koefficienter. Genom att ansätta $y = e^{rx}$ kan vi bestämma en lösning till ekvationen.

- Visa att $y = e^{rx}$ är en lösning till $y'' + ay' + by = 0$ om r är en lösning till ekvationen $r^2 + ar + b = 0$.

Ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ kallas den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$. Differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ har den allmänna lösningen $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ om r_1 och r_2 är två olika reella rötter till den karakteristiska ekvationen.

- Visa att $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ är en lösning till $y'' + ay' + by = 0$, om r_1 och r_2 är två olika reella rötter till den karakteristiska ekvationen.
- Ange den allmänna lösningen till $y'' - 4y' - 5y = 0$.
- Ange den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $y'' - 4y' - 5y = 4x + 1$.

Differentialekvationer



Differentialekvation

- innehåller en eller flera derivator av en funktion
- lösningen är en funktion
- verifiering av lösningen
- primitiv funktion
- naturvetenskapliga tillämpningar

Differentialekvationer av första ordningen

- $y' + ay = 0$ är en homogen differentialekvation
- lösning till den homogena ekvationen $y' + ay = 0$ är $y = Ce^{-ax}$
- begynnelsevillkor
- $y' + ay = f(x)$ är en inhomogen differentialekvation
- allmän lösning till $y' + ay = f(x)$ är $y = y_h + y_p$

Numeriska lösningsmetoder

- Eulers stegmetod
- använda datorer eller andra tekniska hjälpmedel

Differentialekvationer av andra ordningen

- homogen differentialekvation $y'' + ay' + by = 0$
- inhomogen differentialekvation $y'' + ay' + by = f(x)$

Modeller med differentialekvationer

- avsvälvning
- svängning
- populationsförändring
- fall med luftmotstånd

NIVÅ 1

- 1 Visa att $y = 2e^{-2x}$ är en lösning till $y' + 2y = 0$.
- 2 Visa att $y = 2 \cos x - x$ är en lösning till $y'' + y = -x$.
- 3 Tillväxthastigheten hos en bakteriepopulation är proportionell mot aktuell bakteriemängd. Beskriv bakterietillväxten med en differentialekvation. Låt bakteriemängden vara N efter tiden t timmar.
- 4 Differentialekvationen $A'(t) = -0,0021A(t)$ beskriver sönderfallet hos ett radioaktivt ämne. Tolka differentialekvationen med ord.
- 5 Bestäm den allmänna lösningen till
- $y' = \cos 2x + x$
 - $y'' = 4x^3 - 1$
 - $y' = \frac{2}{x}$
 - $y' = 3 \sin 4x$
- 6 Lös differentialekvationerna
- $y' = 6x - 2$ då $y(0) = 3$
 - $y' = \sin x$ då $y(\pi) = 4$
 - $y' = \frac{1}{x}$ då $y(1) = 0$
- 7 Tolka med ord differentialekvationen $N'(t) + 0,01N(t) = 0$ där N är antalet celler vid tiden t år.
- 8 Bestäm den allmänna lösningen till
- $y' + 3y = 0$
 - $2y' + 2y = 0$
 - $y' = 3y$
 - $3y' = 6e^{4x} + 9$
- 9 Lös differentialekvationerna
- $y' - 5y = 0$ då $y(0) = 2$
 - $y' + 4y = 0$ då $y(0) = 1$
 - $y' + 3y = 0$ då $y(1) = e^{-3}$
- 10 Per köper aktier för 5 000 kr. Aktiekapitalet minskar under en lågkonjunktur med en hastighet per år som är 4 % av värdet av aktuellt innehav. Ställ upp en differentialekvation som beskriver kapitalets förändring.
- 11 Bestäm den allmänna lösningen till
- $y' + 2y = 4$
 - $y' + 5y = x$
 - $y' - 3y = 6$
 - $y' - 3y = 2x + 1$
- 12 Bestäm den lösning till $y' - 2y = 2x$ där $y(0) = 1$.
- 13 Bestäm den lösning till $y' + y = 3x - 1$ som uppfyller $y(0) = 7$.
- 14 Verifiera att $y = C \sin ax + D \cos ax$ satisfierar ekvationen $y'' + a^2y = 0$ för alla värden på konstanterna a , C och D .
- 15 Rita först ett koordinatsystem. Utgå sedan från punkten $(0, 0)$ på en lösningskurva till $y' = 3y - x$.
- Använd Eulers stegmetod och rita ett steg med $h = 1$. Var hamnar du då?
 - Ta ett steg till. I vilken punkt befinner du dig då?
 - Förklara vad du har räknat ut.
- 16 Beräkna $y(3)$ med Eulers stegmetod, då $y' = 2x - 2y$. Utgå från $(1, 1)$ och använd steglängden $h = 0,5$.
- 17 Funktionen $y = Ce^{-x/2}$ är lösning till $y' = ky$.
- Bestäm k .
 - Bestäm C så att en tangent till $y = Ce^{-x/2}$ får riktningskoefficienten 5 i den punkt på kurvan där $x = 0$.
- (PB MaE 02-05)



- 18 Agneta har förverkligat sin dröm och köpt en motorcykel. På hösten, när säsongen är slut, upptäcker hon att ett av däck inte håller luften riktigt. Hon ställer in motorcykeln i ett garage för vinterförvaring och mäter lufttrycket till 2,9 bar. Fyra veckor senare har lufttrycket sjunkit till 2,7 bar.
- Antag att trycket i ett däck minskar med en hastighet som är proportionell mot trycket. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta.
 - Vilket tryck kommer det att vara i däck efter totalt 24 veckor i garaget enligt denna matematiska modell?

(PB MaE 02-05)

NIVÅ 2

- 19 Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' - 2y = 4x^2$.
- 20 Beräkna $y(3)$ med Eulers stegmetod, om $y' = 3y - x$ och $h = 0,5$. Utgå från punkten $(1, 1)$.
- 21 Bestäm konstanten k så att $y = e^{-kx^2}$ blir en lösning till $y'' + 2kxy' + y = 0$.
- 22 Tillgångarna i ett företag förändras på två sätt, genom investeringar och förslitning. Hur värdet av tillgångarna förändras kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{dK}{dt} + 0,1K = 450$, $K(0) = 600$, där K mäts i tusentals euro och tiden t i år.
- Bestäm lösningen till differentialekvationen.
 - Bestäm värdet av tillgångarna efter 4 år.

- 23 Nisse har ett akvarium som innehåller 200 liter vatten, förutom fiskar, växter och stenar. Det bildas nitrat i vattnet och om fiskarna ska hålla sig friska och pigga måste Nisse byta vatten i akvariet. Tidigare tappade han regelbundet ut 50 liter akvarievatten och ersatte det med lika mycket friskt vatten. Om det före vattenbytet fanns 100 mg nitrat per liter akvarievatten var koncentrationen 75 mg/l efter vattenbytet. Nu har Nisse utrustat sitt akvarium med en utrustning för vattenbyte. Den pumpar ur akvarievatten och fyller samtidigt på med lika mycket friskt vatten genom en slang. Vattnet som rinner från akvariet kommer att vara väl blandat eftersom motorfiltret är igång hela tiden och flödet i slangen på det tillrinnande vattnet inte är så kraftigt.

Under vattenbytet kan nitratkoncentrationen i akvariet beskrivas med differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{200}$ där y mg/l är nitratkoncentrationen då x liter friskt vatten tillsatts.

Hjälp Nisse med att lösa ekvationen och beräkna sedan hur mycket vatten som behöver tillsättas enligt den nya metoden för att sänka nitratkoncentrationen från 100 mg/l till 75 mg/l. (Np MaE vt 2000)

- 24 I en myrstack uppskattar man att antalet myror vid tiden t är N stycken. Tillväxthastigheten uttryckt i myror per dygn är proportionell mot antalet myror i stacken. Bestäm ett uttryck för hur lång tid det tar innan antalet myror har fördubblats.

- 25 Ett glas kallt vatten ställs i ett rum med temperaturen 20°C . En modell för hur vattentemperaturen därefter ökar ges av differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = -0,1(y - 20)$

där y är vattentemperaturen i $^\circ\text{C}$ och t är tiden i minuter. $y = 20 - 19e^{-0,1t}$ är en lösning till denna differentialekvation.

- Vilken temperatur hade vattnet från början?
- Med vilken hastighet stiger temperaturen då vattnets temperatur är 10°C ?
- Med vilken hastighet stiger temperaturen då det gått 10 minuter?
- Per har en digital termometer som visar vattnets temperatur i hela grader. Enligt Pers mätningar tar det 36 minuter för vattnet att nå rumstemperatur. Stina mäter temperaturen med en digital termometer som visar tiondels grader. Enligt Stina tar det 59 minuter för vattnet att nå rumstemperatur. Hur hänger det ihop?

(Np MaE vt 1997)

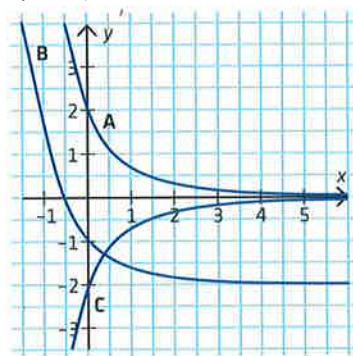
- 26 Den radioaktiva isotopen kol-14 sönderfaller med en hastighet som är $0,121\%$ per år av det aktuella antalet kol-14 atomer.

- Ställ upp och lös differentialekvationen som beskriver sönderfallshastigheten.
- Det fanns $5,41 \cdot 10^{16}$ kol-14 atomer från början i ett preparat. Hur många atomer finns det efter 2 000 år?
- Bestäm halveringstiden för kol-14?

- 27 Luftmotståndet för ett föremål kan enligt en enkel modell antas vara proportionellt mot föremålets hastighet. Använd Newtons andra lag, $F = ma$, för att teckna den differentialekvation som beskriver den fallrörelse där luftmotståndet är proportionellt mot föremålets hastighet.

- 28 Uppgiften handlar om lösningar till differentialekvationen $2y' + 3y = 0$

- Bestäm y då $y'(0) = -6$.
- Kurva A i figuren är också en lösning till differentialekvationen $2y' + 3y = 0$. Bestäm denna lösning. *Endast svar fordras.*
- Kan kurvorna B och C i figuren vara lösningar till differentialekvationen $2y' + 3y = 0$? Motivera ditt svar.



(Np MaE vt 1999)

- 29 En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön. Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön. För att studera hur mängden föroreningar (y kg) i sjön förändras med tiden (t år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y \quad \text{och} \quad y(0) = 500$$

- Förklara hur $\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y$ hänger ihop med förutsättningarna i texten.
- Lös differentialekvationen då $y(0) = 500$.
- Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

(PB MaE 05–05)

- 30 Anna vill mäta hur snabbt temperaturen av mjölk i ett glas stiger när hon tar ut glaset från kylskåpet. Mjölken temperatur är 8°C när hon tar ut glaset och temperaturen i rummet är 21°C . Efter 5 minuter har mjölken temperatur stigit till 12°C . Hon antar att mjölken temperatur är $y^\circ\text{C}$ efter t minuter och att temperaturen stiger med en hastighet som är proportionell mot differensen mellan mjölken och rummets temperatur. Beräkna mjölken temperatur efter en halvtimme.

NIVÅ 3

- 31 Maria har fått i uppgift att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - 6y = -18x^2$. Hon vill ansätta $y_p = ax^2$, eftersom hon tror att den ansatsen kommer att leda till ett korrekt resultat. Har hon rätt eller fel? Motivera ditt svar.

- 32 När Pelle står i fågeltornet och tittar på fåglar råkar han tappa objektivskyddet som hör till kikaren. Det väger $0,022$ kg och faller utan begynnelsehastighet. Luftmotståndet kan anses vara proportionellt mot hastigheten med proportionalitetskonstanten $0,01$ kg/s.

- Ställ upp en differentialekvation som beskriver fallrörelsen.
- Bestäm lösningen till differentialekvationen.
- Vilken hastighet har objektivskyddet efter 1 sekund?

- 33 Vismut sönderfaller till tallium med en sönderfallshastighet av 32% per minut. Tallium sönderfaller till bly med sönderfallshastigheten 15% per minut. Det bly som bildas är stabilt och sönderfaller alltså inte. Vid ett laboratorieförsök utgår vi från en viss mängd ren vismut. Vi betecknar mängderna av vismut och tallium med A respektive B vid den tidpunkt då sönderfallet pågått i t minuter. Förändringshastigheten hos mängden tallium kan då beskrivas differentialekvationen $\frac{dB}{dt} = 0,32A - 0,15B$.

- Beteckna mängden bly med C och ställ upp differentialekvationer som beskriver förändringshastigheterna hos mängderna av vismut och bly.
- Vad kan man säga om förändringshastigheterna för mängderna av vismut, tallium och bly vid den tidpunkt då mängden tallium är maximal?

(Np MaE ht 1998)

- 34 En vikt som är upphängd i en fjäder svänger kring jämviktsläget. Om man bortser från att rörelsen dämpas, så kan den beskrivas med differentialekvationen $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, där x m är avståndet till jämviktsläget vid t s och k är fjäderkonstanten.

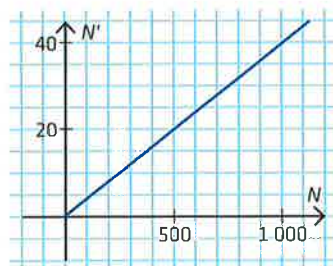
- Bestäm med hjälp av digitala hjälpmedel en lösning till differentialekvationen som uppfyller villkoret $x(0) = 0$.
- Hur stor blir viktens högsta fart?





DEL 1 Utan räknare

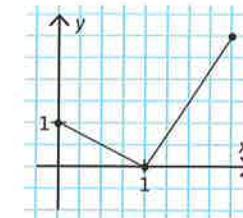
- 1 Invånarantalet i en stad ökar med en hastighet som är proportionell mot det aktuella invånarantalet. Ställ upp en differentialekvation som visar detta.
- 2 Verifiera att differentialekvationen $y'' + y' + y = 5x^2$ har partikulärlösningen $y_p = 5x^2 - 10x$.
- 3 Bestäm den allmänna lösningen till
 - a) $y' = 9x^2 + 1$
 - b) $y'' = e^{3x} - 1$
- 4 Bestäm den allmänna lösningen till
 - a) $y' - 7y = 0$
 - b) $3y' + y = 6x$
- 5 Accelerationen för en cyklist som åker utför en backe är 2 m/s^2 .
 - a) Bestäm ett uttryck som beskriver hur lång sträcka cyklisten färdas under en given tid.
 - b) Cyklisten hade farten 3 m/s när han passerade krönet längst upp i backen. Hur långt är det från krönet av backen till backens slut, om det tar 10 sekunder för cyklisten att nå slutet av backen?
- 6 Figuren visar sambandet mellan funktionen N och dess derivata N' .



- a) Uttryck sambandet som en differentialekvation
 - b) Funktionen $N(t)$ beskriver antalet individer i en djurpopulation som funktion av tiden. Uttryck med ord hur djurpopulationen ändras med tiden.
 - c) Lös ekvationen med begynnelsevillkoret $N(0) = 40$.
- 7 Elektromagnetisk strålning från till exempel en mobiltelefon absorberas av materia på ett sådant sätt att ändringen av intensiteten per längdenhet av det absorberande materialet är proportionell mot strålningens intensitet. Visa att den tjocklek x på det absorberande materialet, som ger att intensiteten $I(x)$ minskar till hälften, är $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$, där k är en proportionalitetskonstant.

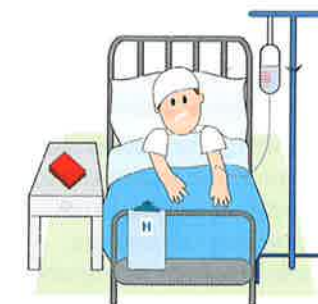
DEL 2 Med hjälpmedel

- 8 Hastigheten $v \text{ m/s}$ hos en kropp som rör sig efter en rät linje kan efter $t \text{ s}$ beskrivas med $v(t) = 2t + 1$. Efter 5 s befinner sig kroppen 40 m från en kontrollpunkt. Hur långt från samma kontrollpunkt befinner sig kroppen efter 12 s?
- 9 Med hjälp av Eulers stegmetod och grafen här intill har Oskar uppskattat värdet av $y(2)$ för den lösning till $y' = 3x - y$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.
 - a) Vilken steglängd använde Oskar?
 - b) Bestäm $y(2)$ under samma förutsättningar, men med steglängden 0,5.
- 10 Tillväxthastigheten i en bakterieodling är proportionell mot det aktuella antalet bakterier. Från början finns 3 000 bakterier i odlingen och efter 5 minuter 8 000 st. Hur många finns det efter 14 minuter?
- 11 Lufttrycket $p \text{ mbar}$ sjunker med höjden $h \text{ km}$ över havet. Förändringen kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{dp}{dh} = -kp$.



En dag med normalt lufttryck (dvs. 1 013 mbar vid havsnivån) är lufttrycket på Kiruna flygplats 956 mbar. Flygplatsen ligger 460 m över havet. Vilket kommer lufttrycket att vara på flyghöjden 10 000 meter över havet?

- 12 En patient får sin medicin intravenöst på ett sådant sätt att medicinen tillförs blodet med konstant hastighet. Detta sker med hastigheten $k \text{ mg/h}$. När det gått t timmar sedan medicineringen påbörjades, har patienten medicinmängden $M \text{ mg}$ i blodet. Från början innehöll blodet $C \text{ mg}$ av medicinen.



- Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen ovan, givet att vi antar att medicinen försvinner med en hastighet som är proportionell mot den aktuella medicinmängden.
- Lös ekvationen och bestäm funktionen M .
- Kommer medicinmängden i blodet att öka kontinuerligt om man fortsätter att medicinera patienten på det här sättet? Motivera ditt svar.