

4 Omfångsrika problem

DELKAPITEL

- 4.1 Problemlösning och redovisning
- 4.2 Redovisningsuppgifter

FÖRKUNSKAPER

- Derivata
- Integraler
- Differentialekvationer
- Trigonometri

CENTRALT INNEHÅLL

- Omfångsrika problemsituationer inom karaktärsämnena som även fördjupar kunskaper om integraler och derivata. Matematikens möjligheter och begränsningar som verktyg i dessa situationer.



Det här kapitlet består i huvudsak av större, mer omfattande uppgifter. De är valda för att ge dig en rejäl utmaning och för att du ska kunna fördjupa dina kunskaper om bland annat integraler och derivata. Tanken är att du ska välja ut en av uppgifterna, noga arbeta igenom den och sedan skriva en utförlig redovisning. För att kunna lösa uppgifterna behöver du i de allra flesta fall göra en del antaganden och förenklingar. Dina beräkningar blir därför en mer eller mindre väl överensstämmande modell av den verklighet du vill beskriva. När du senare jämför resultatet av dina beräkningar med hur motsvarande problem har behandlats i det praktiska livet, kommer du kanske att hitta avvikelser. För alla som arbetar med matematiska modeller är det därför viktigt att förstå de möjligheter och begränsningar som modellerna har.

När du är klar med kapitlet ska du kunna

- självständigt analysera och lösa en mer omfattande uppgift
- redovisa lösningen utförligt

Flödet i en älv

Greger har arbetat fram en modell som beskriver flödet i en älv. Utifrån modellen vill han bestämma det största flödet i älven. Här nedanför ser du en del av hans redovisning.

... så länge tiden x dygn ligger i intervallet $0 \leq x \leq 100$, kan flödet p m^3/s i älven beskrivas med polynomet

$$p(x) = 0,0009x^3 - 0,198x^2 + 8,64x + 259$$

Det största flödet blir därför

$$p'(x) = 0,0027x^2 - 0,396x + 8,64$$

$$p'(x) = 0 \text{ ger } x \text{ i } 26,67$$

$$p(26,67) \approx 366$$

Största flödet är alltså $366 \text{ m}^3/\text{s}$

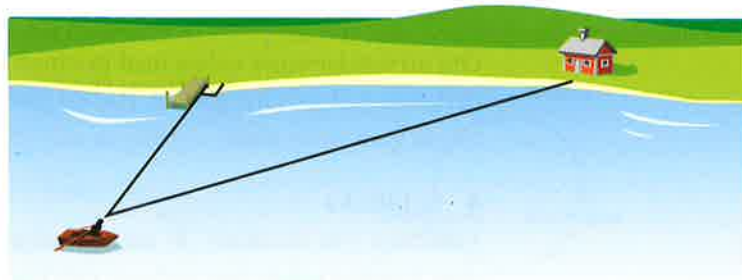
- Kommentera Gregers redovisning och ge förslag på hur den kan förbättras.

4.2 Redovisningsuppgifter

RO OCH SEDAN SPRINGA

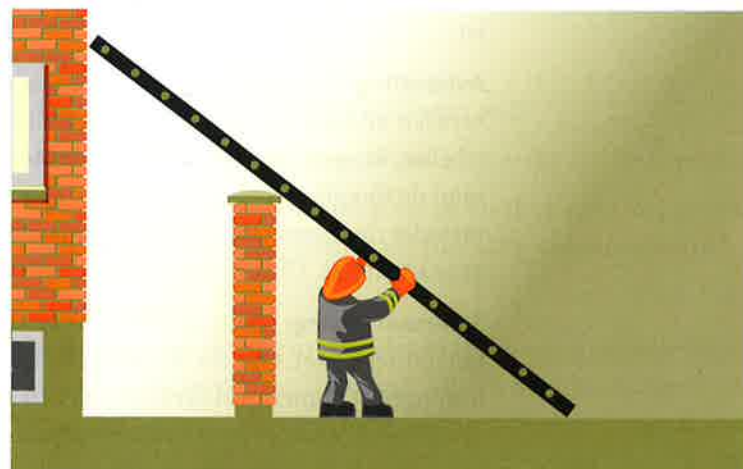
Pelle sitter i en båt 3,5 kilometer från stranden rakt utanför en brygga. Strandlinjen bildar rät vinkel med bryggan och på stranden 7 kilometer från bryggan ligger Pelles stuga. Han kan ro båten med hastigheten 3,5 km/h och när han kommer till stranden, så kan han springa dubbelt så fort.

- Under vilken vinkel ska han ro mot stranden för att komma till stugan så fort som möjligt?
- Hur lång tid behöver han i så fall för att komma till stugan?



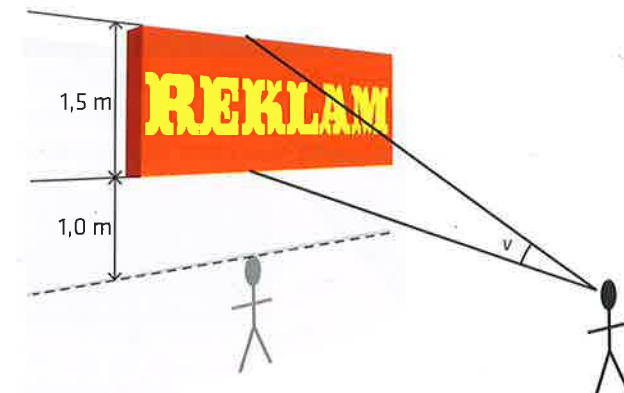
KORTASTE STEGEN?

Två meter framför ett hus står en tre meter hög mur som är fyra decimeter bred. En brandman ska resa en stegen mot huset och över muren. Vilken är den kortaste stegen brandmannen kan använda för att nå fram till huset?



SYNVINKEL

Du står under en reklamskylt. Hur långt ska du förflytta dig från skylten för att se den under största synvinkeln? Alltså bestäm hur långt från skylten du måste placera dig för att vinkeln v ska bli så stor som möjligt.



NUMERISK INTEGRERING

Den primitiva funktionen till $f(x) = e^x$ är lätt att bestämma. Därför är det kanske extra förvånande att det faktiskt är helt omöjligt att skriva en formel för den primitiva funktionen till $f(x) = e^{x^2}$ med hjälp av så kallade *elementära funktioner*, som till exempel exponentialfunktioner, polynomfunktioner och trigonometriska funktioner. Vill man beräkna integralen

$$\int_0^2 e^{x^2} dx$$

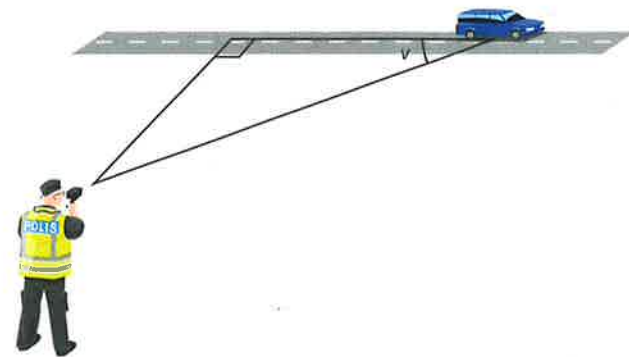
får man därför förlita sig till andra metoder. Du ska här få beräkna integralen

$$\int_0^2 e^{x^2} dx$$
 med hjälp av tre olika numeriska metoder.

- Finn ett ungefärligt värde på integralen $\int_0^2 e^{x^2} dx$ genom att dela in arean under grafen till $f(x) = e^{x^2}$ i ett antal rektanglar.
- Finn ett ungefärligt värde på integralen $\int_0^2 e^{x^2} dx$ genom att dela in arean under grafen till $f(x) = e^{x^2}$ i ett antal parallelltrapetser.
- En annan metod för numerisk integrering är den så kallade *Simpsons formel*. Ta reda på hur Simpsons formel fungerar och använd den för att beräkna integralen $\int_0^2 e^{x^2} dx$.
- Beräkna integralen med något digitalt hjälpmedel och jämför resultatet med dina numeriska beräkningar. Diskutera för- och nackdelar med de olika integrationsmetoderna.

FARTKAMERA

En polis mäter hastigheten på förbipasserande bilar. Han siktar på bilen med ett laserinstrument och kan sedan läsa av med vilken hastighet avståndet mellan instrumentet och bilen förändras.

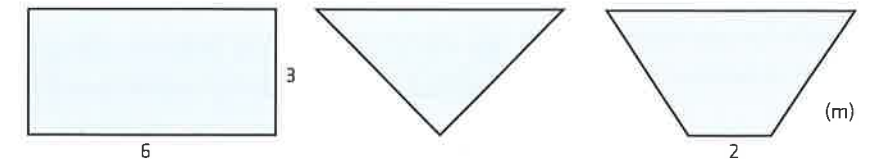


- När vinkeln v i figuren är 45° läser polisen av att avståndet från instrumentet till den förbipasserande bilen ökar med 120 km/h. Hur snabbt färdas bilen?
- Vid ett senare tillfälle mäter polismannen mot en bil som färdas med hastigheten 70 km/h längs vägen. Vinkeln v i figuren bestäms nu till 30° . Med vilken hastighet avlägsnar sig bilen från instrumentet?
- Polisens laserinstrument kan mäta hastigheter med mycket stor precision, men vinkeln v i figuren kan inte bestämmas bättre än med ett fel på $\pm 2^\circ$. Vilka vinklar bör polismannen begränsa sin mätning till om han vill vara säker på att han inte bestämmer hastigheten med ett större fel än 5 %?
- Ta reda på hur polisen bestämmer hastigheten hos en bil i verkligheten. Jämför polisens verkliga metoder med de metoder du har använt här.



FLÖDESHASTIGHET I EN KANAL

På grund av översvämningsrisken har en kommun bestämt sig för att avleda vattnet i ett vattendrag med hjälp av en grävd kanal. Kanalen kommer att vara 3 meter djup på det djupaste stället och 6 meter bred. Det finns tre modeller för hur kanalen kan komma att grävas: en rektangulär, en triangulär och en i form av ett parallelltrapets. För att veta vilken av de tre modellerna de ska välja behöver kommunen veta med vilken hastighet, mätt i kubikmeter per sekund, som vattnet kommer att flöda genom kanalen. Det är din uppgift att ta reda på detta.



Det som försvårar beräkningarna är att flödeshastigheten inte är densamma på alla ställen i kanalen. Vattnet flödar nämligen långsammare ju närmare stranden man kommer. Utifrån tidigare erfarenhet uppskattar man att flödeshastigheten kommer att vara ca 0,5 m/s vid stranden och ca 2,5 m/s i mitten av kanalen.

- Anta att flödeshastigheten ökar linjärt från strandkanten till kanalens mitt. Beräkna vattenflödet i kubikmeter per sekund för var och en av de tre kanalmodellerna.



VILDSVINEN

Vid slutet av 1600-talet kunde man konstatera att vildsvinen i Sverige var utrotade. Under 1900-talet har djur hållna i vilthägn rymt och bildat en vild stam. I dag beräknar man att antalet vildsvin i Sverige är någonstans mellan 200 000 och 300 000 djur.

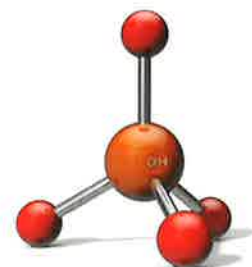
Om man antar att det finns en största möjliga population av vildsvin på ett avgränsat område, så kan man modellera antalet vildsvin $N(t)$ i detta område med en differentialekvation som beskriver logistisk tillväxt,

$$N'(t) = r \left(1 - \frac{N}{M} \right) \cdot N$$

där r är en konstant som beskriver tillväxten, t är tiden i år och M är det maximala antalet vildsvin området kan hålla.

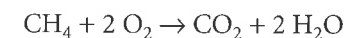
I dag bedrivs dessutom omfattande jakt på vildsvin. Om vi antar att uttaget (t.ex. jakt) av vildsvin är L djur per år, så får vi en ny differentialekvation som beskriver antalet vildsvin.

- Ställ upp den differentialekvationen som under dessa förhållanden beskriver antalet vildsvin i det avgränsade området. Sätt $r = 0,12$; $M = 10\,000$; $L = 100$ samt $N(0) = 2\,000$ och lös differentialekvationen numeriskt, till exempel med ett program för Eulers stegmetod. Hittar du något värde som funktionsvärdet stabiliseras kring?
- Om uttaget överskrider en viss gräns, kommer vildsvinspopulationen i området att dö ut. Sätt ett lämpligt värde på $N(0)$ och bestäm numeriskt det största möjliga uttag som möjliggör en livskraftig vildsvinsstam i området.
- Jämför denna enkla modell med fakta om uttaget ur verkliga viltpopulationer.



KEMISK REAKTION

När metan förbränns bildas koldioxid och vatten enligt



I ett laboratorieförsök kunde man konstatera att koncentrationerna av metan och koldioxid i en behållare kunde modelleras med följande system av differentialekvationer

$$M'(t) = -kM(t) \quad (\text{I})$$

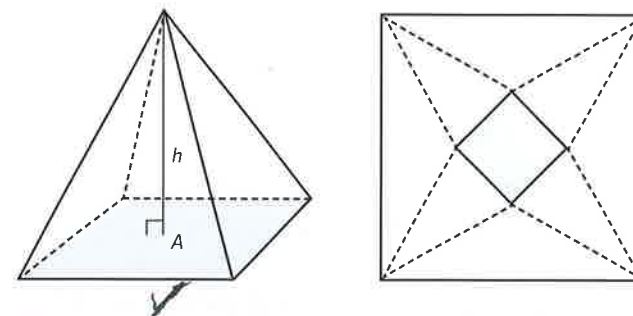
$$C'(t) = kM(t) \quad (\text{II})$$

där $M(t)$ är koncentrationen av metan, $C(t)$ är koncentrationen av koldioxid efter t timmar och k är en proportionalitetskonstant som bestäms av med vilken hastighet förbränningen sker.

- Tolka systemet av differentialekvationer med ord.
- Bestäm den allmänna lösningen till ekvationssystemet.
- Med hjälp av spektroskopi kunde man bestämma att koncentrationen av metan i behållaren var $0,012 \text{ mol/dm}^3$ och att koncentrationen av koldioxid i samma behållare var $0,0037 \text{ mol/dm}^3$. Med samma teknik kunde man 12 timmar senare konstatera att koncentrationen av koldioxid var $0,0092 \text{ mol/dm}^3$. Hur lång tid kommer det att ta innan koncentrationen av koldioxid överstiger $0,010 \text{ mol/dm}^3$?

FLYTKROPPAR

En metallverkstad har fått i uppgift att tillverka flytkroppar i form av pyramider med kvadratisk botten. Se figuren här nedanför. De tänker skära ut materialet ur en kvadratisk skiva av plåt med sidan $1,20 \text{ m} \times 1,20 \text{ m}$ längs de streckade linjerna, bocka plåten efter de heldragna linjerna i kvadraten i mitten och sedan svetsa ihop pyramiden.



- Eftersom en flytkropp flyter bättre ju större volym den har, så är man på verkstaden intresserad av hur man ska gå till väga för att få den största volymen på flytkroppen. Beskriv hur de ska skära ut pyramiden för att den ska få så stor volym som möjligt.
- Vilken blir pyramidens största volym?

TEMPERATUR OCH DIFFERENTIALEKVATIONER

Anta att du dricker nybryggt kaffe på balkongen en lördagsmorgon. När telefonen ringer går du in, men glömmer kaffekoppen. Vilken temperatur har kaffet när du kommer tillbaka en halvtimme senare?

Enligt Newtons avsvlningslag kommer kaffets temperatur att förändras med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan omgivningens temperatur och kaffets egen temperatur. Detta kan uttryckas med differentialekvationen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{omg}})$$

där T är kaffets temperatur efter t timmar, och T_{omg} är omgivningens temperatur.

- Gör lämpliga antaganden om kaffets ursprungstemperatur och utomhus-temperaturen och bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen under dessa förutsättningar.
- Värdet av konstanten k beror på många parametrar, bland annat på kaffekoppens storlek och vilket material den är gjord av. Undersök med experiment värdet av konstanten k för två olika koppar. Uppskatta med hjälp av dina värden på k och den matematiska modellen kaffets temperatur efter en halvtimme.

I differentialekvationen ovan förutsätter vi att den omgivande temperaturen är konstant. Men anta att den omgivande temperaturen T_{omg} beror av tiden enligt $T_{\text{omg}} = at + b$ där t är tiden i timmar efter det att du gick ut med kaffekoppen på balkongen.

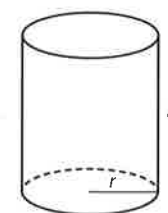
- Samla in data om temperaturförändringen under morgontimmarna, t.ex. där du bor. Anpassa en rät linje T_{omg} till dina mätvärden och lös sedan differentialekvationen på nytt genom att ersätta T_{omg} med den linjära funktionen.
- Undersök, för några rimliga värden på konstanten k , kaffets temperatur efter en halvtimme enligt denna modell.
- Diskutera och jämför resultaten.



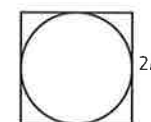
KONSERVBURKAR

Du har av en förpackningsindustri fått i uppdrag att utforma en ny serie konserverburkar. Ditt uppdrag är att hitta de proportioner på burkarna som gör att materialåtgången blir så liten som möjligt.

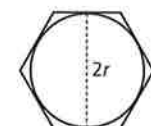
- Anta att man kan skära ut alla delar till en cylinderformad konserverburk utan att man gör några materialförluster. Bestäm förhållandet mellan höjden h och radien r till en cylinderformad konserverburk som gör att materialåtgången blir så liten som möjligt.



- Nu är det inte möjligt att skära ut topp och botten till konserverburken utan att göra materialförluster. Anta därför att topp och botten skärs ut ur en kvadratisk skiva med sidlängden $2r$. Bestäm förhållandet mellan höjden h och radien r som med detta antagande gör materialåtgången så liten som möjligt.



- Ännu mindre materialspill får man om man i stället skär ut topp och botten ur en skiva med formen av en regelbunden sexhörning. Se figuren här nedanför. Bestäm förhållandet mellan höjden h och radien r som med detta antagande gör materialåtgången så liten som möjligt.



- Bege dig till en livsmedelsaffär och kontrollmät förhållandet mellan höjd och radie för olika konserverburkar. Vilka avvikelser finner du från dina beräkningar? Ge en rimlig förklaring till eventuella avvikelser mellan resultaten från dina beräkningar och de burkar du hittade i affären.



RÄNTA PÅ RÄNTA

Du har många gånger blivit ombedd att beräkna räntan av ett kapital på banken. Hittills har vi förutsatt att räntan ska beräknas under en period om ett år. Men vad händer om ränteperioden blir kortare?

Om man delar in året i n lika stora perioder och beräknar ränta på ränta för dem, så kan man beräkna den totala behållningen i kronor efter ett år med uttrycket

$$K\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

där K är det insatta kapitalet och p räntesatsen i decimalform.

- Låt $p = 0,025$ och undersök värdet av $K\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ för några olika värden på n . Vad händer om ränteperioden är ett år, en månad, en vecka, en dag?
- Undersök numeriskt gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

och använd det resultatet för att visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p$$

- Vilka slutsatser kan du dra av dina undersökningar?

När $n \rightarrow \infty$ motsvarar modellen att man kontinuerligt beräknar ränta på ränta. Den modellen kan man också beskriva med en differentialekvation. Låt $k(t)$ vara kapitalet vid tiden t och låt $k(0) = K$. Om Δt är längden av en ränteperiod räknat i år och räntesatsen är p , så kommer kapitalet mellan t och $t + \Delta t$ att förändras enligt

$$k(t + \Delta t) = k(t)(1 + p\Delta t)$$

- Motivera formeln här ovanför och visa att om $\Delta t \rightarrow 0$, så får vi differentialekvationen
 $k'(t) = pk(t)$
- Bestäm en lösning till differentialekvationen och jämför ditt resultat med dina tidigare beräkningar.

HITTA ROTEN

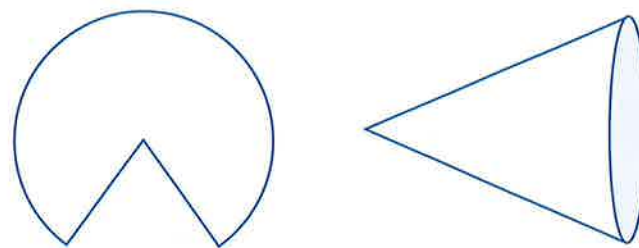
I Matematik Origo 2 arbetade vi med en Lösningsformel för andragradsekvationer, och i Matematik Origo 4 (s. 205) visade vi motsvarande formel för polynomekvationer av tredje graden. Även för ekvationer av fjärde graden existerar en allmän Lösningsformel. Detta visade den italienske matematikern Ferrari på 1500-talet. Alla dessa formler uttrycker rötterna med hjälp av polynomekvationens koefficienter, de fyra räknesätten och rotutdragning. På 1800-talet bevisade den norske matematikern Niels Abel att det inte kan finnas en sådan Lösningsformel för polynomekvationer av grad fem och högre. För att lösa denna typ av ekvationer behövs därför i de flesta fall numeriska metoder.

- Ta reda på hur Newton-Raphsons metod för ekvationslösning fungerar. Redogör för idéerna bakom metoden och härled dess formel.
- Använd Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $x^3 + 3x = 1$
- Använd Newton-Raphsons metod för att hitta ett närmevärde till $\sqrt[5]{2}$ med tre korrekta decimaler.
- Newton-Raphsons metod förutsätter att man först gissar en rot till ekvationen. Hittar man alltid den rot till ekvationen som man söker, oavsett vilken första gissning man gör? Motivera ditt svar.

GODISSTRUTEN

Emelie ska sälja hemlagat godis på en marknad. Hon har fått en bunt papper som är cirkelformade och undrar hur hon ska klippa till dessa för att struten som hon ska ha godiset i ska få så stor volym som möjligt.

Ur ett papper med formen av en cirkelskiva med radien r klipper hon först ut en cirkelsektor. Därefter sammanbinder hon snittytorna så att det bildas en kon. Se figuren här under.

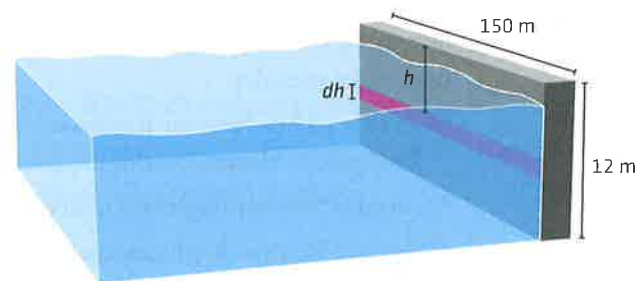


- Vilken är den största möjliga volymen av konen som Emelie kan skapa på detta sätt?
- Hur stor cirkelsektor ska hon klippa bort från cirkelskivan för att få den maximala volymen?

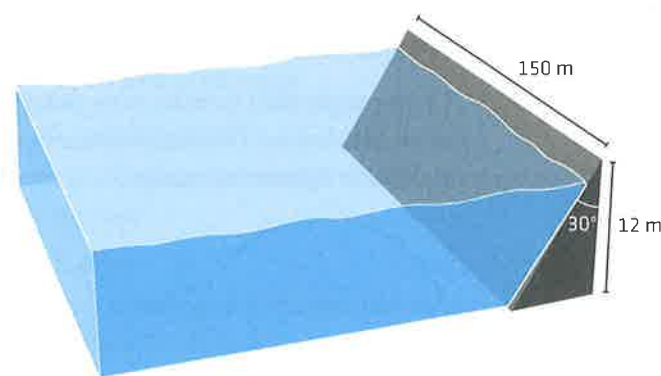
DAMMEN

För att skapa en damm har man byggt en vall som är 150 m lång och 12 m hög.

- Anta att den sida som möter vattnet är lodrät. Bestäm ett uttryck för den hydrostatiska kraften dF N på en horisontell remsa på djupet h m och med tjockleken dh m. Tjockleken dh på remsan antas vara så pass liten att det hydrostatiska trycket med god approximation endast beror av det djup h remsan befinner sig på. Se figur.



- Beräkna den totala hydrostatiska kraften mot vällen om dammen är fylld till brädden.
- I själva verket är den sida av vällen som möter vattnet oftast inte lodrät. Anta i stället att den sidan bildar vinkeln 30° mot en lodlinje och beräkna det totala hydrostatiska trycket mot vällen om dammen är fylld till brädden.



- Ta reda på hur en verklig dammvall är konstruerad och fundera över varför den ser ut så. Vilka säkerhetsmarginaler räknar man med när man konstruerar en dammvall?

FLYKTHASTIGHET

Tänk dig att du ska resa till en plats långt bort från jorden. Den gravitationskraft F som jorden påverkar dig med kommer att avta med avståndet r till jordens centrum enligt *Newtons gravitationslag*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

där m_1 och m_2 är din respektive jordens massa.

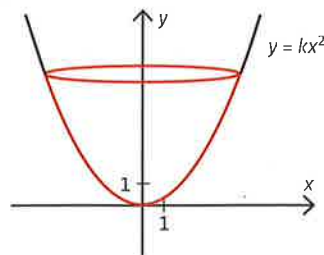
- Beräkna det arbete som krävs för att ta dig från jorden till månen.
- Beräkna med hjälp av en *generaliserad integral* det arbete som krävs för att ta dig (i princip) oändligt långt bort från jorden.
- Flykthastigheten* är den hastighet som ett föremål måste ha för att ha tillräckligt stor rörelseenergi för att kunna frigöra sig från en himlakropps gravitation. Härled ett uttryck för flykthastigheten.
- Bestäm flykthastigheten från jorden, vårt solsystem och från Vintergatan.
- Värdera dina svar och ange de viktigaste felkällorna.



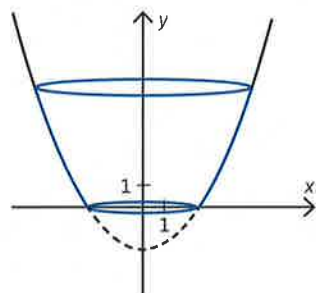
DESIGNA EN SKÅL

Ett företag ska tillverka en serie nya plastskålar i olika färger.

- Den första skålen är en ny godisskål. Designteamet har kommit fram till att skålens diameter vid öppningen ska vara 12 cm och dess höjd 8 cm. Formen kan approximeras med en kurva av typen $y = kx^2$. Designteamet vill veta hur mycket skålen kommer att rymma. Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.



- För att godisskålen här ovanför ska kunna stå måste den limmas fast på en botten. Företaget vill därför att du ska designa en variant av skålen som har en cirkulär bottenyta att stå på. De vill att skålens diameter i öppningen ska vara 12 cm och att skålens höjd ska vara 8 cm. Bestäm en andragsgradskurva som vid rotation runt y -axeln beskriver en skål med cirkulär bottenyta. Du får själv avgöra vad som blir en lagom diameter för botten. Beräkna sedan skålens volym.



- Ta reda på hur man använder integraler för att beräkna volym med hjälp av den så kallade *skalmetoden*. Redogör för hur metoden fungerar och lista ut hur du kan använda denna metod för att beräkna volymen av de båda skålarna ovan. Beräkna också volymerna.
- Diskutera för- och nackdelar med de olika metoderna.



TID UPP, TID NER

Om du kastar en boll rakt upp i luften, så tar det en viss tid för bollen att nå sin högsta höjd och en viss tid för bollen att sedan återvända till kastets utgångspunkt. Men vilket tar längst tid, färdan upp eller fallet ned? Eller tar färdan upp lika lång tid som fallet ned?

- Utgå från Newtons andra lag. Bortse från luftmotståndet och ställ upp den differentialekvation som beskriver rörelsen hos en boll som du kastar rakt upp i luften. Lös differentialekvationen och visa att det tar lika lång tid för bollen att nå sin högsta punkt, som det tar för bollen att falla tillbaka till utgångspunkten.
- Antag i stället att luftmotståndet F_l är en kraft som är proportionell mot bollens hastighet, dvs. $F_l = -kv$. Visa med hjälp av Newtons andra lag att bollens rörelse nu kan beskrivas med differentialekvationen

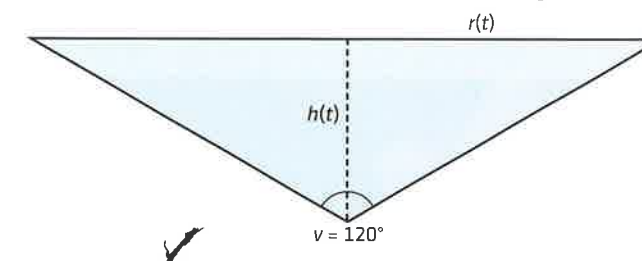
$$h''(t) + \frac{k}{m} h'(t) = -g$$

där $h(t)$ är bollens höjd över marken vid tiden t s.

- Formulera själv lämpliga begynnelsevillkor och värden på de ingående konstanterna. Lös därefter differentialekvationen och beräkna den tid det tar för bollen att nå sin högsta punkt respektive den tid det tar för bollen att från den högsta punkten åter nå kastets utgångspunkt.
- Värdera din lösning nog. Hur påverkas resultatet av bollens utgångshastighet och värdena på konstanterna k och m ?

FÅGELBAD

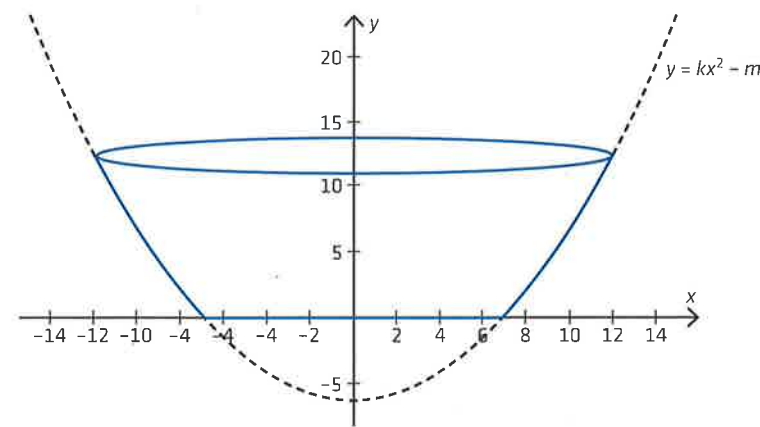
Ett konformat fågelbad fylls med vatten då det regnar. Under en varm sommardag när solen ligger på avdunstar vattnet med en hastighet som antas vara proportionell mot arean av vattenytan. Vattennivån i fågelbadet var vid ett visst tillfälle 50 mm räknat från konens spets, och efter två timmar hade hälften av vattnet försvunnit. Fågelbadets bottenvinkel är 120° .



- Hur lång tid tar det tills allt vatten i fågelbadet har avdunstat?

MÄTNING MED MÄRKNING

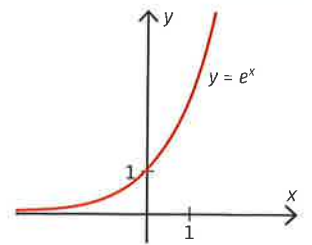
Ett företag ska formge en serie nya skålar. En av skålarna ska ha en cirkulär bottenyta med radien 7 cm och en cirkulär öppning med radien 12 cm. Skålens höjd ska vara 13 cm och dess ytterkant sedd från sidan ska kunna approximeras med kurvan $y = kx^2 - m$ (se figur).



- Bestäm skålens volym med hjälp av *skivmetoden*.
- Designa två liknande skålar vars respektive volym är 3 liter.
- Eftersom skålarna är tänkta att användas vid bakning, så vill företaget att man på insidan av skålen ska kunna läsa av volymen. En av dina treliters-skålar ska ha sådana märkningar för varje liter. Bestäm på vilka höjder dessa märkningar ska sitta.
- Ta reda på hur man använder integraler för att beräkna volym med hjälp av *skalmetoden*. Redogör för hur metoden fungerar och lista ut hur du kan använda denna metod för att beräkna volymen av någon av skålarna ovan. Beräkna också den volymen.
- Du behärskar nu två olika metoder för att beräkna volymen av en rotationskropp: skivmetoden och skalmetoden. Diskutera metodernas för- och nackdelar.

NÄRMARE OCH NÄRMARE TALET e

Du ska nu få lära dig ett sätt att beräkna värden av $f(x) = e^x$ då x ligger i närheten av 0. Ett sätt att göra detta är att ersätta $f(x) = e^x$ med ett förstgradspolynom som på ett bra sätt approximerar kurvan där $x = 0$. Det betyder att man approximerar $f(x) = e^x$ med tangenten till e^x i denna punkt.



- Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = e^x$ där $x = 0$ och rita den tillsammans med kurvan $y = e^x$ i ett koordinatsystem.
- Beräkna med hjälp av den tangenten ett approximativt värde på $f(1) = e$.

I den tidigare uppgiften bestämde du en rät linje $y = g_1(x)$, vars y -värde $g_1(0)$ var lika med $f(0)$ och vars derivata $g_1'(0)$ var lika med $f'(0)$. Den rätta linjen ligger nära kurvan $y = e^x$ för x -värden nära 0, men ger sämre approximationer ju längre bort från $x = 0$ man kommer. En funktion som bättre borde kunna approximera $f(x) = e^x$ nära $x = 0$ är en polynomfunktion av andra graden: $g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Om denna funktion ska vara en bra approximation av $f(x) = e^x$ nära noll bör följande villkor vara uppfyllda:

$$g_2(0) = f(0) \quad (1)$$

$$g_2'(0) = f'(0) \quad (2)$$

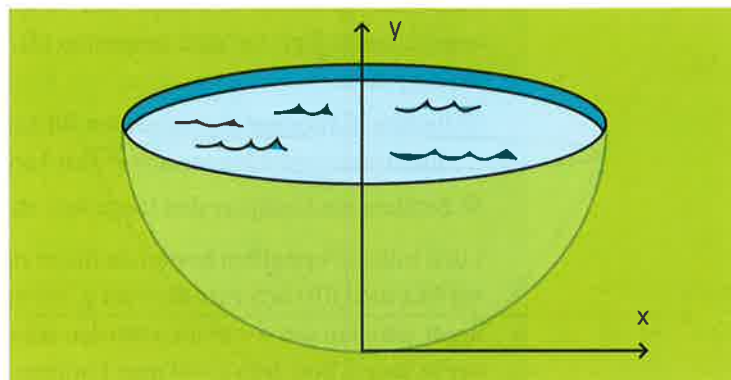
$$g_2''(0) = f''(0) \quad (3)$$

- Bestäm det andragradspolynom: $g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ som uppfyller de tre villkoren och rita grafen till polynomet tillsammans med grafen till $f(x) = e^x$ i ett koordinatsystem. Beräkna med hjälp av detta polynom ett approximativt värde på e .
- Utveckla metoden här ovanför så att du med hjälp av den kan få ett ännu bättre värde på e . Förklara varför din metod fungerar och visa att du med hjälp av din metod kan bestämma ett värde på e med fyra korrekta decimaler.
- Fundera på om metoden kan generaliseras på något sätt. Formulera två olika problem som skulle kunna lösas med samma metod. Lös problemen som du har formulerat.
- Diskutera metodens förtjänster och begränsningar. Vilka möjliga användningsområden kan det finnas för metoden?



TÖMMA POOLEN

Swimmingpoolen i bilden har en cirkulär kantlinje med radien 3,0 m. Poolens tvärsnitt följer formen av en parabel med ekvationen $y = 0,2x^2$. När man tömmer poolen pumpar man vattnet över kanten och ner i en vattenbrunn. Hur stort arbete behövs för att tömma poolen?



LÄNGDEN AV EN KURVA

Om man låter en kedja hänga fritt mellan två punkter, så får kedjan formen av den kurva som brukar kallas *kedjelinjen*. År 1691 kunde den schweiziske matematikern Johann Bernoulli visa att kedjelinjen kan beskrivas med ekvationen

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

där a är en konstant och $\cosh x$ är funktionen *cosinus hyperbolicus*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Du har tidigare beräknat arean under en kurva med hjälp av integraler. Det är också möjligt att beräkna längden av en kurva med hjälp av en integral.

- Förklara hur man med hjälp av en integral kan beräkna längden av en kurva.
- Beräkna längden av kurvan $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ mellan $x = 1$ och $x = 2$.
- Visa att längden s av en kedjelinje mellan $x = -b$ och $x = b$ bestäms av uttrycket $s = 2a \sinh \frac{b}{a}$, där $\sinh x$ är funktionen *sinus hyperbolicus*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

CELLEN

Människokroppen består till två tredjedelar av vatten. Nästan 70 % av detta finns i kroppens celler. Vatten är livsviktigt för att cellerna ska fungera, och uttorkning av cellerna kan leda till celldöd. Men det finns organismer, t.ex. jästceller, vars celler kan överleva även om så mycket som 99 % av vatteninnehållet försvinner.

Om en cell förlorar vatten, så sker det främst genom cellytan. Det är därför rimligt att anta att volymförändringen sker med en hastighet som är proportionell mot cellytan. För enkelhets skull antar vi att cellen helt består av vatten.

Att volymförändringen för en cell sker med en hastighet som är proportionell mot cellytan kan uttryckas med differentialekvationen

$$\frac{dV}{dt} = -k \cdot A(t)$$

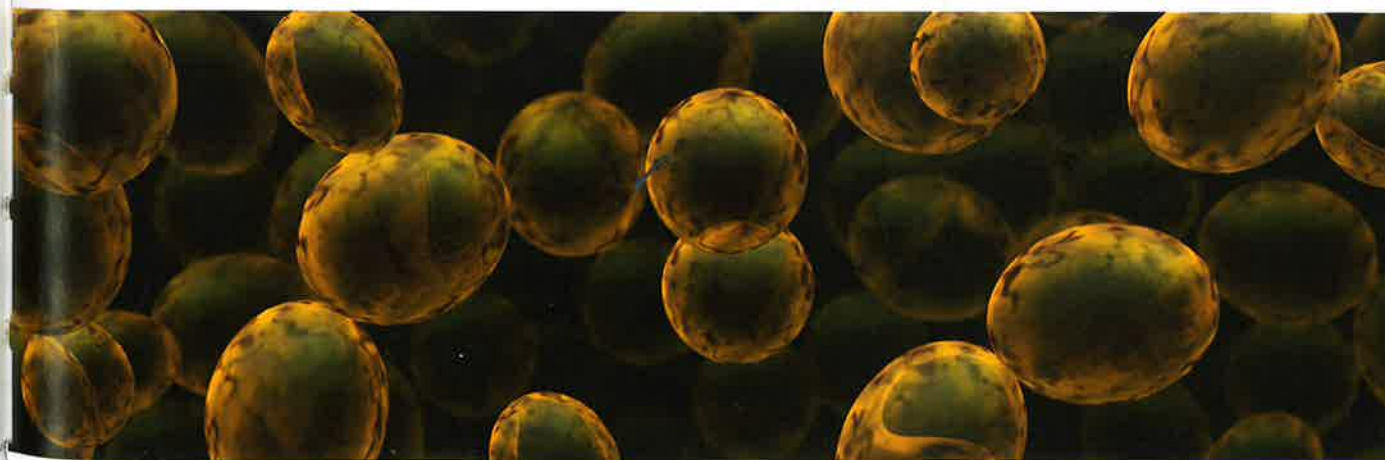
där $A(t)$ är den funktion som beskriver cellytans area vid tiden t timmar.

- För att lösa differentialekvationen behöver vi uttrycka $A(t)$ i termer av $V(t)$. Vi antar därför att det finns ett samband mellan arean och volymen som beskrivs av ekvationen

$$A(t) = d \cdot (V(t))^p$$

för någon proportionalitetskonstant d och något tal p . Visa med hjälp av ett exempel att vårt antagande är rimligt och undersök vad som skulle kunna vara ett rimligt värde på p . Ansätt också ett tänkbart värde på konstanten d och motivera ditt val.

- Ta reda på vad som är en rimlig volym för en jästcell och lös differentialekvationen $\frac{dV}{dt} = -k \cdot A(t)$ givet att cellens volymen minskar till en tredjedel på 6 timmar. Hur många timmar tar det enligt modellen innan cellen är helt uttorkad? (Om du ska lösa differentialekvationen algebraiskt behöver du ta reda på hur man löser *separabla differentialekvationer*.)





Bilden visar växten *Cardamine Pratensis* som tillhör samma släkte som *Cardamine Pensylvanica*.

FRÖSPRIDNING

Blommor sprider sina frön på olika sätt. Vissa blommor sprider sina frön med hjälp av djur som t.ex. myror eller bin, andra endast med hjälp av vinden. I en studie undersökte en grupp amerikanska forskare hur långt från en viss planta fröna hamnade. För arten *Cardamine Pensylvanica* ser du resultatet av studien i tabellen här nedanför.

Avstånd från plantan mätt i meter	Antalet frön på detta avstånd från plantan
$0 \leq x < 1$	462
$1 \leq x < 2$	115
$2 \leq x < 3$	31
$3 \leq x < 4$	12
$4 \leq x < 5$	2

- Sammanfatta informationen i tabellen i ett histogram. Anpassa därefter en exponentialfunktion $f(x) = Ce^{kx}$ efter värdena i tabellen, där $f(x)$ beskriver fröspridningen x meter från plantan.
- Förklara varför sannolikheten $P(a \leq x \leq b)$ för att ett frö hamnar mellan a och b meter från plantan kan beräknas med formeln

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_0^{\infty} f(x) dx}$$

- Bestäm sannolikheten för att ett frö hamnar mellan 0,5 m och 1,5 m från plantan.
- Bestäm sannolikheten för att ett frö hamnar mellan 0 och 1 meter från plantan. Beräkna också denna sannolikhet utifrån värdena som finns i tabellen. Jämför och diskutera resultaten.

Inom statistiken finns ett begrepp som kallas *väntevärde*. Om vi antar att fröspridningen kan beskrivas med funktionen f , så kan väntevärdet i vårt exempel beräknas med formeln

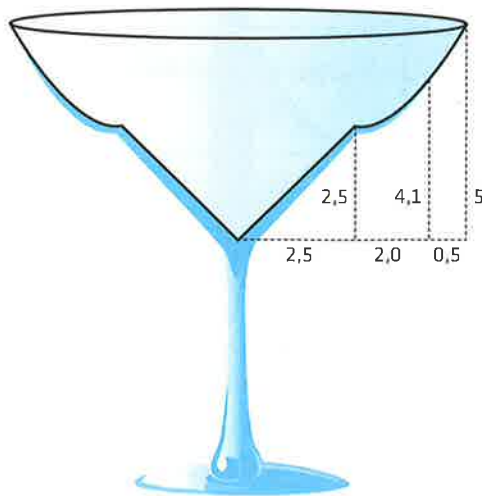
$$V = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx}{\int_0^{\infty} f(x) dx}$$

- Ta reda på hur väntevärdet kan tolkas i det här exemplet. Beräkna sedan väntevärdet med hjälp av formeln här ovanför och diskutera tillförlitligheten i ditt svar. För att kunna lösa denna uppgift algebraiskt behöver du ta reda på hur man utför en *partiell integration*.

DRINKGLAS

Ett glasbruk har designat ett nytt drinkglas och vill nu ta reda på hur mycket glaset rymmer. De anlitar dig för uppdraget och skickar sedan till dig en skiss av glasets form, med måtten angivna i centimeter.

- Bestäm med hjälp av skissen glasets volym.

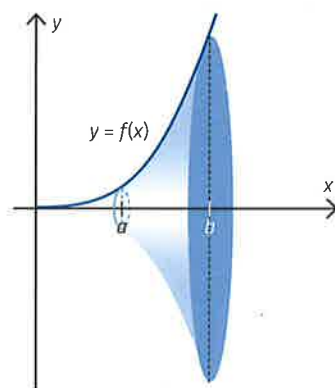


- På glasbruket finns det intresse av att ta fram nya former för både dricksglas och vaser. Designa ditt eget dricksglas eller en vas och bestäm sedan dess volym med hjälp av integraler.



MANTELAREAN AV EN ROTATIONSKROPP

Du har tidigare bestämt volym av rotationskroppar med hjälp av integraler. Med en liknande metod kan man också bestämma mantelarean av en rotationskropp.



Om vi låter kurvan $y = f(x)$ rotera runt x -axeln i intervallet $a \leq x \leq b$ bildas en rotationskropp.

Mantelarean av denna rotationskropp beräknas med integralen

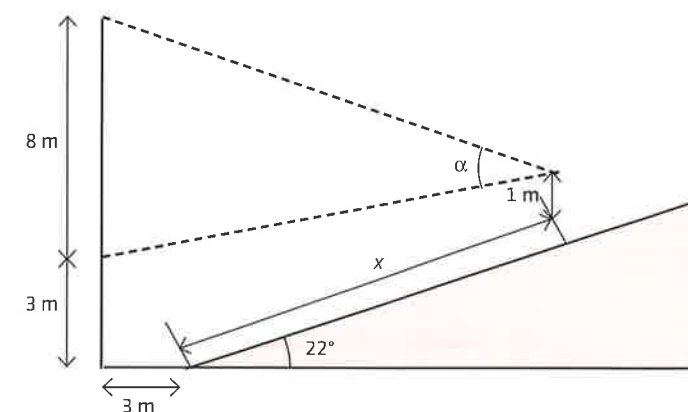
$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Om man låter kurvan $y = 2x$ rotera runt x -axeln i intervallet $0 \leq x \leq 3$ bildas en kon. Bestäm mantelarean av konen med hjälp av integralen här ovanför.
- Härled en formel för mantelarean av en kon med radien r och höjden h genom att låta en lämplig funktion av formen $y = kx$ rotera runt x -axeln.
- Visa att din formel överensstämmer med formeln för konens mantelarea.
- Samma teknik som du använde ovan kan användas för att härleda formeln för arean av en sfär. Ställ upp ekvationen för en cirkel med centrum i origo och radien a . Lös ut y som en funktion av x .
- Om du låter kurvan du bestämde i föregående uppgift rotera runt x -axeln bildas en sfär med radien a . Bevisa att mantelarean av sfären ges av formeln $M = 4\pi a^2$.

BIOSALONGEN

De flesta biosalonger i dag har så kallad gradäng. Det betyder att de bakre stolsraderna är upphöjda i jämförelse med de främre. I en viss biosalong är gradängvinkeln 22° . Salongen har en 8 meter hög bioduk som är placerad tre meter från golvet och tre meter från den första stolsraden.

- På vilken stolsrad ska du sätta dig så att du ser så bra som möjligt, dvs. för vilket värde på x maximeras synvinkeln α i figuren här nedanför? (Vi räknar med att dina ögon befinner sig ca 1 meter från golvet när du sitter ner.)



För att lösa den här uppgiften kan du behöva ta hjälp av digitala hjälpmedel.

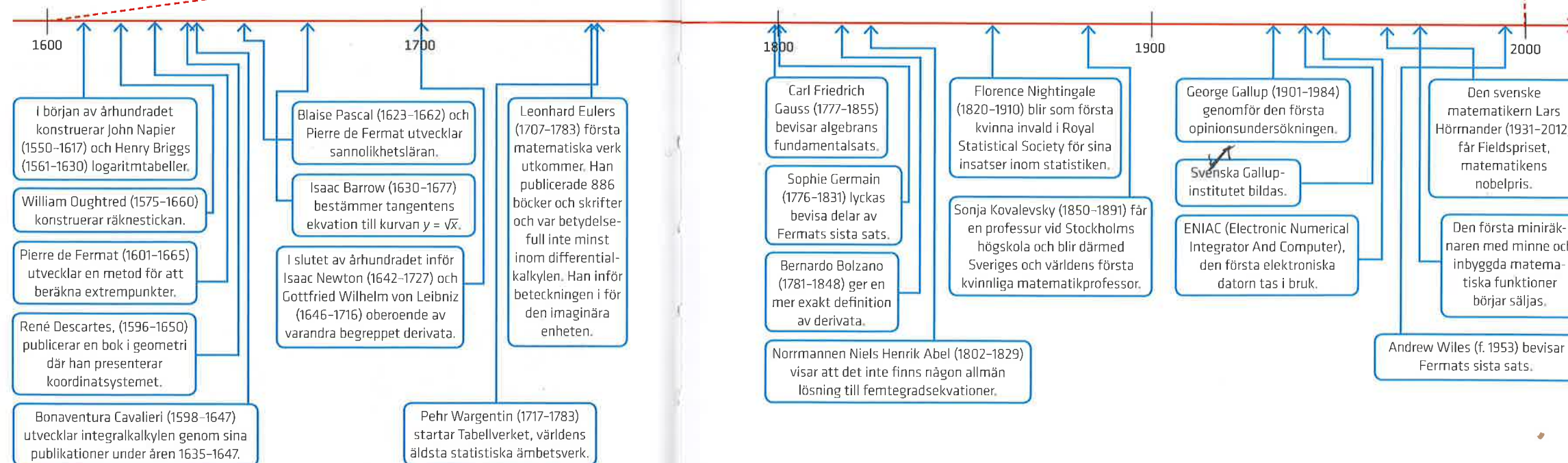
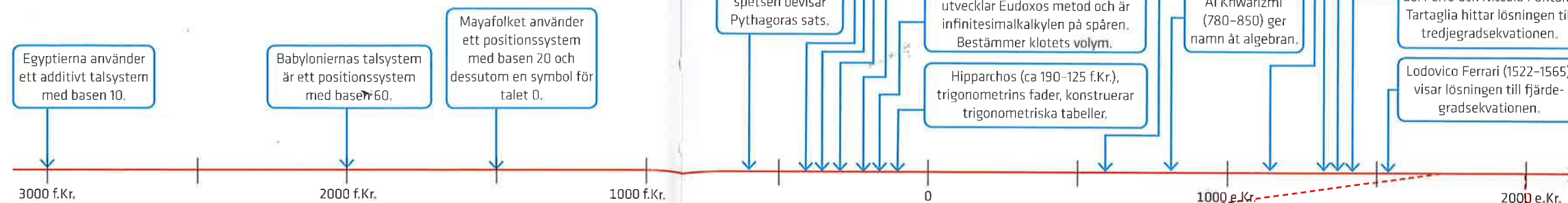




Matematikens historia

En tidsresa

Här presenteras en kortfattad översikt av matematikens historia, från det gamla Egypten till Andrew Wiles bevis av Fermats sista sats. På en tidsaxel har vi placerat in några av matematikhistoriens mest avgörande händelser. Som du ser så blir det tätare mellan upptäckterna när vi närmar oss modern tid. Därför har vi gjort en separat tidsaxel för tiden från år 1600 till våra dagar.



I ? Ibland går det långa perioder utan banbrytande matematiska upptäckter och sedan kommer flera slag i slag. Vad kan det bero på?

I ? Det är relativt få kvinnor som nämns här. Diskutera vad det kan bero på.