

1 Talteori

- 1101** a) 210
b) 2 310
- 1102** a) $2^2 \cdot 13$
b) $2 \cdot 3^3$
c) $3 \cdot 137$
d) 2^8
- 1103** a) 1, 3, 5, 15
b) 1, 2, 4, 8, 16
c) 1, 13
d) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
- 1104** a) 11 har endast triviala delare, dvs. 1 och 11
b) 11 är inte delbart med något primtal $p < \sqrt{11}$, dvs. 2 eller 3
- 1105** 4
- 1106** Alla jämna tal är delbara med 2 och för alla jämna tal $a > 2$ är inte 2 en trivial delare
- 1107** Både Emma och Klara har rätt faktorisering. Det är bara ordningen mellan faktorerna som skiljer, så faktoriseringarna är lika. Emma har alltså fel när hon säger att Klara har gjort fel och Klara har rätt när hon säger att båda lösningarna är korrekta.
- 1108** Hefi har rätt. Eftersom alla primtal är större än 1 går det inte att primtalsfaktorisera negativa tal, så -25 ska inte vara med i uppgiften.
- 1109** 6
- 1110** a) 25, 26, 27, 29
b) 30
c) 28

- 1111** Om det finns ett heltal k , sådant att $a = bk$ (a och b heltal), så ger ledvis division med b att $\frac{a}{b} = k$. Eftersom k var ett heltal så motsvarar det den andra definitionen.
- 1112** Alla $n \neq 0$
- 1113** a) 3 och 5; 5 och 7; 11 och 13; 17 och 19
b) 3, 5 och 7
c) Låt det minsta talet vara a ($a > 3$). Då är de övriga talen $b = a + 2$ respektive $c = a + 4$. Om 3 är delare i a , så är a inte ett primtal. Anta därför att 3 inte är delare i a . Då gäller antingen $a = 3k + 1$ eller $a = 3k + 2$, där $k > 1$ är ett heltal. I första fallet får vi $b = a + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3 \cdot (k + 1)$, dvs. b är delbart med 3 och därmed inte ett primtal. På samma sätt ger det andra fallet $c = a + 4 = 3k + 2 + 4 = 3 \cdot (k + 2)$, dvs. att c inte är ett primtal. Så om $a > 3$, så är antingen a , b eller c delbart med 3 och därmed kan inte tre på varandra följande udda tal (förutom 3, 5 och 7) vara primtal.
- 1114** Eftersom $p > 2$ och $q > 2$, så är både p och q udda primtal. Då är $p + q$ ett jämnt tal och därmed gäller $p + q = 2a$, för något heltal a . Eftersom $a = \frac{p+q}{2}$ och $p < q$, så gäller $p < a < q$. Men mellan p och q fanns enligt förutsättningarna inget primtal och då finns heltal b och c sådana att $a = bc$. Därmed gäller $p + q = 2 \cdot b \cdot c$, dvs. summan kan skrivas som en produkt av (minst) tre primtalsfaktorer.

- 1115** a) 2, 3
b) 2, 3, 7
c) 2, 5
d) 2, 5
- 1116** a) $2^2 \cdot 5^3$
b) $3 \cdot 41$
c) $3 \cdot 283$
d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
- 1117** a) kvot 1, rest 2
b) kvot 4, rest 3
c) kvot 0, rest 3
d) kvot 10, rest 0
- 1118** a) Klockan är elva.
b) Klockan visar tio minuter över nio.
- 1119** 0, 1, 2, 3, 4 och 5
- 1120** T.ex. 33 318
- 1121** T.ex. 3 och 14
- 1122** Nina kan ha tagit maximala antalet gånger som 6 går i 35 och därmed fått kvoten 5 och resten 5. Peter kan ha försökt hitta en kvot k , som gör att $6k$ är så nära 35 som möjligt. Då blir $k = 6$ och resten -1.
- 1123** 113
- 1124** T.ex. 3 111 324
- 1125** Enklast blir det förmodligen om kvoten är 1 och resten är 2. Då måste nämnaren vara minst 3. T.ex. uppgiften: "Ange kvot och rest för divisionen $\frac{5}{3}$."

- 1126** August har sannolikt tänkt att man måste kolla alla tal som är mindre än 887, men inte de som är större eftersom ett positivt tal aldrig kan vara delbart med ett större tal än sig självt. Hugo vet att ett tal går att primtalsfaktorisera och att man därmed bara behöver undersöka om 887 är delbart med något primtal. Maja tänker förmodligen att om vi tar ett primtal $p > 443$, så kommer $2p > 887$. Alltså behöver man inte undersöka dessa primtal. Bernt inser att om inget av primtalen mindre än 31 delar 887, så måste $887 = ab$ där både a och b är minst 31 om inte 887 ska vara ett primtal. Men då blir ju produkten ab som minst $31 \cdot 31 = 961 > 887$. Alltså behöver man bara undersöka delbarhet med primtal $p < \sqrt{887} \approx 29,8$ dvs. primtal upp till och med 29.

- 1127** Eftersom AB är ett tvåsiffrigt tal, så gäller att $A + B$ antingen är 9 eller 18. $A + B = 9$ ger $B = 9 - A$ och då gäller att talet är $10A + B = 10A + 9 - A = 9 \cdot (A + 1)$, som är delbart med 9. Om $A + B = 18$, så är talet $99 = 9 \cdot 11$ och det är förstås också delbart med 9.

- 1128** Alla naturliga tal kan skrivas $n = 100a + b$, där $a \geq 0$ och $0 \leq b \leq 99$ är heltal. Enligt förutsättningarna är b delbart med 4, dvs. vi kan skriva $b = 4k$ för något heltal k . Vi får $n = 100a + 4k = 4(25a + k)$, som visar att n är delbart med 4.

- 1129** Eftersom $a|b$, så gäller $b = ak$ för något heltal k ($k \neq 0$). Då gäller $b^2 = (ak)^2 = a^2 \cdot k^2$, dvs. $a^2|b^2$ v.s.v.

- 1130** a) 3
b) 5

- 1131** a) 3
b) 3

- 1132** a) T.ex. 1, 6 och 11
b) T.ex. 0, 7 och 14

- 1133** A och B

- 1134** T.ex. att de har samma rest vid division med 10

- 1135** a) $12 \equiv 17 \pmod{5}$
b) $43 \equiv 23 \pmod{10}$

- 1136** 3

- 1137** a) $x = 1$
b) $x = 0$

- 1138** a) $x = 6$
b) $x = 2$

- 1139** a) T.ex. -15, -7, 9
b) $1 + 8n$, där n är ett heltal.

- 1140** Om $a \equiv b \pmod{n}$ så har a och b samma rest vid division med n . Då kan vi skriva $a = k_1n + r$ respektive $b = k_2n + r$. Vi får $a - b = (k_1n + r) - (k_2n + r) = (k_1 - k_2)n = kn$ för något heltal k . Alltså gäller $n|(a - b)$ v.s.v.

- 1141** Vilket är det minsta naturliga tal x , som uppfyller $79 - 16 \equiv x \pmod{7}$?

- 1142** Det är 63 dagar mellan dessa datum och 63 har resten 0 vid division med 7. Alltså är det samma veckodag för dagar som infaller med 63 dagars mellanrum.

- 1143** a) $m = 1$
b) $m = 1$

- 1144** a) $a = 0$
b) $a = 2$
c) $a = 1$

- 1145** a) 5
b) 6
c) 1

- 1146** Oktober

- 1147** 16.00

- 1148** a) $26\,039 = 26\,000 + 39 \equiv 0 + 0 = 0 \pmod{13}$, som visar att 26 039 är delbart med 13
b) $1\,734 = 1\,700 + 34 \equiv 0 + 0 = 0 \pmod{17}$, som visar att 1 734 är delbart med 17.

- 1149** a) 9
b) 1

- 1150** a) $u = 2$
b) $u = 0$

- 1151** T.ex. $u = 0$, $u = 9$

- 1152** $ABCD = 1\,000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D \equiv A + B + C + D \pmod{9}$, eftersom 999, 99 respektive 9 är delbara med 9. Så om summan $A + B + C + D$ är delbar med 9, så är även talet $ABCD$ det.

- 1153** a) $x = 2k + 1$, k är ett heltal

Lösning: Att $2x \equiv 2 \pmod{4}$ betyder att $4|(2x - 2)$ dvs. att $2x - 2 = 4k$ för något heltal k . Löser vi ut x får vi $x = 2k + 1$.

- b) $x = 2n + 1$, där n är ett heltal.

Lösning: Att $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ betyder att $8|(x^2 - 1)$, dvs. att $x^2 - 1 = 8k$ för något heltal k . Om vi faktorerisar VL, så får vi $(x - 1)(x + 1) = 8k$. Om x är ett udda tal, så kommer båda faktorerna i VL att vara jämna tal. Eftersom de dessutom följer på varandra, så måste något av talen vara delbart med 4. Det följer att VL då kan skrivas som $2 \cdot 4 \cdot k = 8k$ för något heltal k . Likheten är alltså uppfylld för udda tal x , dvs.

$x = 2n + 1$, n är ett heltal. Det finns inga andra tal x som uppfyller likheten eftersom om x vore ett jämnt tal, så blir VL produkten av två udda tal vilket aldrig kan vara delbart med 8.

- c) $x = 7n + 1$ där n är ett heltal.

Lösning: Att $5x - 10 \equiv 30 \pmod{7}$ betyder att $7|(5x - 40)$ dvs. att $5x - 40 = 7k$ för något heltal k . Löser vi ut x får vi $x = \frac{7k + 40}{5} = \frac{7k}{5} + 8$.

Detta är dock inte ett heltal för varje heltal k . För att detta ska gälla måste k vara delbart med 5, dvs. $k = 5m$ för något heltal m . Vi får:

$$x = \frac{7 \cdot 5m}{5} + 8 = 7m + 8 \text{ för}$$

varje heltal m . Dessa lösningar skrivs enklare $x = 7n + 1$ där n är ett heltal.

1154 $a \equiv b \pmod{n}$ betyder att $a = b + k_1 n$, för något heltal k_1 . På samma sätt är $c = d + k_2 n$, för något heltal k_2 . Det ger $a + c = b + k_1 n + d + k_2 n = b + d + (k_1 + k_2)n = b + d + kn$, för något heltal k . Alltså gäller att $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

1155 Om $a \equiv b \pmod{n}$ så är också $a \cdot a \equiv b \cdot b \pmod{n}$ enligt räknelag 2. Genom upprepad användning av räknelag 2 får vi att $a^p \equiv b^p \pmod{n}$ för alla positiva heltal p .

1156 Låt talets siffror vara $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Talet har då värdet $10^n \cdot a_n + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0$. Det gäller att $10^m \equiv 1 \pmod{3}$ för alla naturliga tal m . Alltså gäller $10^n \cdot a_n + \dots + 10 \cdot a_1 + a_0 \equiv 1^n \cdot a_n + \dots + 1 \cdot a_1 + a_0 = a_n + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}$. Så om summan $a_n + \dots + a_1 + a_0$ är delbar med 3, så är även det ursprungliga talet det.

1201 a) Slutet formel
b) $a_4 = 38$

1202 a) $a_5 = 27,5$
b) $b_5 = 48$

1203 a) $4 + 8 + 12 + 16 + 20$
b) 2, 4, 10, 28, 82

1204 a) $\sum_{k=1}^7 2k$
b) $\sum_{k=1}^5 (3k-1)$
c) $\sum_{k=1}^{19} 7k$

1205 a) 31 st
b) $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1} + 3$ för $n \geq 2$ respektive $a_n = 3n + 1$

1206 a) $a_n = n^2$ för $n = 1, \dots, 5$
b) $b_n = \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

1207 a) $n = 19$
b) $n = 3$

1208 a) $\sum_{k=1}^6 2^k$
b) $\sum_{k=0}^6 3 \cdot 2^k$

1209 a) 20 st
b) $n^2 + n$ st

1210 $\sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} \cdot 2^k$

1211 7, 11, 15, ..., 35

1212 $a_{10} = 13,8$

1213 a) Differensen mellan varje term är konstant ($d = 3$)
b) $s_{23} = 851$

1214 a) $a_{21} = 42$
b) $s_{21} = 1\,512$

1215 a) 2, 5, 8, 11
b) Ja ($d = 3$)
c) $a_1 = 2$; $a_n = a_{n-1} + 3$ för $n > 1$

1216 98 st

1217 $s_{15} = 495$

1218 $a_1 = 13$

1219 a) $s_{25} = 2\,000$
b) $s_{25} = 3\,400$

1220 a) För att bilda figur 4 behövs 15 prickar och för att bilda figur 5 behövs 19 prickar.

b) $a_n = 4n - 1$
c) $s_{100} = \frac{100(3 + 399)}{2} = 20\,100$

1221 a) $a_n = 11 - 2n$
b) $s_n = 10n - n^2$

1222 Talföljden kan beskrivas $a_n = a_1 + (n-1)d$, där $a_1 \neq 0$.

$s_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(a_1 + a_m)}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(a_1 + a_1 + (m-1)d)}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2ma_1 + m(m-1)d}{2}$

Om $d = 0$, så gäller $s_\infty = \infty$ om $a_1 > 0$ och $s_\infty = -\infty$ om $a_1 < 0$.

Om $d > 0$ så gäller $s_\infty = \infty$ och om $d < 0$ så gäller $s_\infty = -\infty$, oavsett värdet på a_1 .

1223 a) $a_1 = 2$; $k = 3$
b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

1224 a) 5 st
b) $a_1 = 0,7$; $a_5 = 437,5$

1225 a) $n = 15$
b) $s_{15} \approx 440\,000$ (438 467)

1226 $s_8 \approx 17\,500$

1227 a) $s_{12} \approx 47,5$
b) $s_{20} \approx 7,9$

1228 a) $20 + 20 \cdot 0,65 + 20 \cdot 0,65^2 + \dots + 20 \cdot 0,65^{13}$

b) 57 mg

1229 54 100 kr

1230 2, 6 och 18

1231 $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

1232 $s_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1}$
• $ks_n = a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1} + a_1 k^n$
• $ks_n - s_n = (a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1} + a_1 k^n) - (a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1})$ som efter förenkling ger $ks_n - s_n = a_1 k^n - a_1$
• $s_n(k-1) = a_1(k^n - 1)$ som ger $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$ v.s.v.

1233 $1 \leq n \leq 168$

1234 a) $-1 < k \leq 1$ (där $k \neq 0$)
b) $A = 0$ om $|k| < 1$; $A = a_1$ om $k = 1$

1235 a) Låt $|k| < 1$.
 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1} = \frac{a_1(0-1)}{k-1} = \frac{a_1}{1-k}$ v.s.v.

b) För att $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$ krävs att $|k| < 1$. Om inte det gäller så kommer termerna antingen att vara konstanta ($k = 1$), gå mot ∞ eller $-\infty$ ($k > 1$) alternativt hoppa mellan positiva och negativa värden utan att närma sig 0 ($k \leq -1$). Då kan inte summan närma sig ett visst värde.

1236 a) VL = 3; HL = $2 \cdot 1 + 1^2 = 3$. Alltså gäller VL = HL för $n = 1$.

b) VL = $3 + 5 + \dots + 2p + 1 + 2(p+1) + 1 = 2p + p^2 + 2p + 2 + 1 = p^2 + 4p + 3$
HL = $2(p+1) + (p+1)^2 = 2p + 2 + p^2 + 2p + 1 = p^2 + 4p + 3$
Så VL = HL v.s.v.

c) I a) visas att likheten är sann för $n = 1$. I b) visas att likheten gäller för två på varandra följande värden på n , oavsett vilket n man väljer. Därmed har man bevisat att likheten gäller för alla heltal $n \geq 1$.

1237 För $n = 1$ gäller VL = 7 och HL = $2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$. Så VL = HL för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $7 + 11 + \dots + (7 + 4(p-1)) = 2p^2 + 5p$.

Vad gäller då för $n = p + 1$?

VL = $7 + 11 + \dots + (7 + 4(p-1)) + (7 + 4((p+1)-1)) = 2p^2 + 5p + (7 + 4p)$ enligt induktionsantagandet. Så VL = $2p^2 + 9p + 7$.

HL = $2(p+1)^2 + 5(p+1) = 2p^2 + 4p + 2 + 5p + 5 = 2p^2 + 9p + 7$.

Alltså gäller VL = HL även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

1238 För $n = 1$ gäller VL = $3 \cdot 1 + 2 = 5$ och HL = $\frac{7 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2}{2} = 5$

Så VL = HL för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta

$\sum_{m=1}^p (3m+2) = \frac{7p+3p^2}{2}$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$\sum_{m=1}^{p+1} (3m+2) = \frac{7p+3p^2}{2} + 3(p+1) + 2 = \frac{7p+3p^2}{2} + 3(p+1) + 2$

enligt induktionsantagandet. Så

VL = $\frac{13p+3p^2+10}{2}$
HL = $\frac{7(p+1)+3(p+1)^2}{2} = \frac{7p+7+3p^2+6p+3}{2} = \frac{13p+3p^2+10}{2}$

Alltså gäller VL = HL även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

1239 a) $s_n = n^2$

b) $a_n = 2n - 1$

c) För $n = 1$ gäller VL = 1 och HL $1^2 = 1$. Så VL = HL för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1) = p^2$.

Vad gäller då för $n = p + 1$?

VL = $1 + 3 + 5 + \dots + (2p-1) + (2(p+1)-1) = p^2 + (2(p+1)-1)$ enligt induktionsantagandet. Så VL = $p^2 + 2p + 1$.

HL = $(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$

Alltså gäller VL = HL även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n \geq 1$.

d) VL är en aritmetisk summa med n st termer, där $a_1 = 1$ och $a_n = 2n - 1$. Insättning i formeln för aritmetisk summa ger

$s_n = \frac{n(1 + (2n-1))}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2 = \text{HL}$

Det blir ett kortare bevis med formeln för aritmetisk summa. Dock bör man tänka på att det här beviset bygger på att man tidigare har bevisat den formeln, så en del nödvändigt arbete har utelämnats här.

1240 För $n = 1$ gäller VL = 1 och HL $\frac{3^1-1}{2} = 1$.

Så VL = HL för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{p-1} = \frac{3^p-1}{2}$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

VL = $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{p-1} + 3^p = \frac{3^p-1}{2} + 3^p$ enligt induktionsantagandet.

Så VL = $\frac{3 \cdot 3^p - 1}{2} = \frac{3^{p+1} - 1}{2}$
HL = $\frac{3^{p+1} - 1}{2}$

Alltså gäller VL = HL även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla positiva heltal.

1241 För $n = 1$ gäller VL = a_1 och HL = $\frac{a_1(k^1-1)}{k-1} = a_1$.

Så VL = HL för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{p-1} = \frac{a_1(k^p-1)}{k-1}$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

VL = $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{p-1} + a_1 k^p = \frac{a_1(k^p-1)}{k-1} + a_1 k^p$ enligt induktionsantagandet. Så

VL = $a_1 \left(\frac{k^p-1}{k-1} + \frac{k^p(k-1)}{k-1} \right) = \frac{a_1(k^p-1 + k^{p+1}-k^p)}{k-1} = \frac{a_1(k^{p+1}-1)}{k-1}$
HL = $\frac{a_1(k^{p+1}-1)}{k-1}$

Alltså gäller VL = HL även för $n = p + 1$. Vi har visat att formeln är sann för $n = 1$ och att formeln är sann för två på varandra följande värden på n . Därmed är formeln sann för alla värden på n .

1242 Mikael har i stort sett rätt. Han har visat att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 1$, men inte att det gäller för alla n . Det är förstås lite ovanligt att anta att det gäller för $n = k + 1$ och sedan visa att det då gäller även för $n = k + 2$, men det är trots det korrekt eftersom det är två på varandra följande tal.

1243 För $n = 1$ gäller $VL = 1^2 = 1$ och

$$HL = \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1}{6} = 1.$$

Så $VL = HL$ för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $1^2 + 2^2 + \dots + p^2 =$

$$= \frac{2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 + p}{6}$$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$$VL = 1^2 + 2^2 + \dots + p^2 + (p + 1)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 + p}{6} + (p + 1)^2$$

enligt induktionsantagandet.

$$\text{Så } VL = \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}.$$

HL =

$$= \frac{2(p + 1)^3 + 3(p + 1)^2 + (p + 1)}{6} =$$

$$= \frac{2p^3 + 6p^2 + 6p + 2 + 3p^2 + 6p + 3 + p + 1}{6} =$$

$$= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

Alltså gäller $VL = HL$ även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n \geq 1$.

1244 För $n = 1$ gäller $VL = 1 \cdot 2 = 2$ och $HL =$

$$= \frac{1(1 + 1)(1 + 2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2.$$

Så $VL = HL$ för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p + 1) =$

$$= \frac{p(p + 1)(p + 2)}{3}.$$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$$VL = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p + 1) + (p + 1)(p + 2) =$$

$$= \frac{p(p + 1)(p + 2)}{3} + (p + 1)(p + 2)$$

enligt induktionsantagandet. Så

$$VL = \frac{p(p + 1)(p + 2)}{3} +$$

$$+ \frac{3(p + 1)(p + 2)}{3} =$$

$$= \frac{(p + 3)(p + 1)(p + 2)}{3}.$$

HL =

$$= \frac{(p + 1)((p + 1) + 1)((p + 1) + 2)}{3} =$$

$$= \frac{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}{3}$$

Alltså gäller $VL = HL$ även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n \geq 1$.

1245 För $n = 1$ gäller

$$VL = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ och}$$

$$HL = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Så $VL = HL$ för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(2p - 1) \cdot 2p} = \frac{1}{p + 1} + \frac{1}{p + 2} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{2p}$$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$$VL = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(2p - 1) \cdot 2p} +$$

$$+ \frac{1}{(2(p + 1) - 1) \cdot 2(p + 1)} =$$

$$= \frac{1}{p + 1} + \frac{1}{p + 2} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2p} + \frac{1}{(2p + 1)(2p + 2)}$$

enligt induktionsantagandet.

HL =

$$= \frac{1}{(p + 1) + 1} + \frac{1}{(p + 1) + 2} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p + 1} + \frac{1}{2p + 2} =$$

$$= \frac{1}{p + 2} + \frac{1}{p + 3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p + 1} + \frac{1}{2p + 2}$$

$VL - HL =$

$$= \frac{1}{p + 1} + \frac{1}{(2p + 1)(2p + 2)} -$$

$$- \left(\frac{1}{2p + 1} + \frac{1}{2p + 2} \right) =$$

$$= \frac{2(2p + 1)}{(2p + 1)(2p + 2)} + \frac{1}{(2p + 1)(2p + 2)} -$$

$$- \frac{(2p + 2) + (2p + 1)}{(2p + 1)(2p + 2)} =$$

$$= \frac{(4p + 3) - (4p + 3)}{(2p + 1)(2p + 2)} = 0$$

Alltså gäller $VL = HL$ även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n \geq 1$.

1246 Då $n = 3$ är n -hörningen en triangel som saknar diagonaler, dvs. $VL = d_3 = 0$. Insättning i formeln ger $HL = \frac{3(3 - 3)}{2} = 0$.

Alltså gäller formeln för $n = 3$.

Anta att påståendet är sant för $n = p$, dvs. antag att antalet diagonaler i en p -hörning är

$$\frac{p(p - 3)}{2} \text{ stycken. Vi vill visa att}$$

antalet diagonaler i en $(p + 1)$ -hörning då kan beskrivas med uttrycket

$$d_{n+1} = \frac{(p + 1)(p + 1 - 3)}{2} =$$

$$= \frac{(p + 1)(p - 2)}{2} = \frac{p^2 - p - 2}{2}$$

Låt oss därför undersöka vad som gäller för antalet diagonaler d_{n+1} i en $(p + 1)$ -hörning. Vi utgår från en godtycklig $(p + 1)$ -hörning. Tar vi bort ett av hörnen från vår figur får vi en p -hörning som enligt

antagandet har $\frac{p(p - 3)}{2}$ stycken diagonaler. Hur många extra diagonaler blir det om vi lägger till hörn nummer $p + 1$ igen? Från vårt nya hörn kan vi dra en diagonal till alla andra hörn förutom hörnet självt och dess två grannar. Det ger

$p + 1 - 3 = p - 2$ extra diagonaler. Men när vi lägger till vårt hörn kommer också en av sidorna i den tidigare p -hörningen (markerad med rött i figuren) att bli en diagonal. Vi får alltså det

totala antalet diagonaler som:

$$\frac{p(p - 3)}{2} + (p - 2) + 1 =$$

$$= \frac{p(p - 3)}{2} + \frac{2(p - 1)}{2} =$$

$$= \frac{p^2 - 3p + 2p - 2}{2} = \frac{p^2 - p - 2}{2}$$

Detta är samma uttryck som formeln ger. Alltså är påståendet sant också för $n = p + 1$ och tillsammans med fallet $n = 3$ betyder det att satsen gäller för

allt n -hörningar där $n \geq 3$.

s.v.s.

1247 För $n = 1$ gäller $VL = \cos x$ och

$$HL = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} =$$

$$= \frac{2 \cos x \sin x}{2 \sin x} = \cos x.$$

Så $VL = HL$ för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta

$$\cos x + \cos 3x + \dots +$$

$$\cos (2p - 1)x = \frac{\sin 2px}{2 \sin x}$$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$$VL = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2p - 1)x + \cos (2p + 1)x =$$

$$= \frac{\sin 2px}{2 \sin x} + \cos (2p + 1)x$$

$$\text{enligt induktionsantagandet. Så } VL =$$

$$= \frac{\sin 2px + 2 \sin x \cos (2p + 1)x}{2 \sin x} =$$

$$= \{ \text{Vi utnyttjar formeln}$$

$$\sin u \cos v =$$

$$= \frac{\sin (u + v) + \sin (u - v)}{2} \}$$

$$= \frac{\sin 2px}{2 \sin x} + \frac{\sin (x + (2p + 1)x)}{2 \sin x} +$$

$$+ \frac{\sin (x - (2p + 1)x)}{2 \sin x} =$$

$$= \frac{\sin 2px + \sin (2p + 2)x + \sin (-2px)}{2 \sin x} =$$

$$= \frac{\sin (2p + 2)x}{2 \sin x}$$

$$HL = \frac{\sin 2(p + 1)x}{2 \sin x} =$$

$$= \frac{\sin (2p + 2)x}{2 \sin x}$$

Alltså gäller $VL = HL$ även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n \geq 1$ och $x \neq m\pi$.

1248 a) $n = 1$ ger värdet $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, som är delbart med 3.

$$\text{b) } (p + 1)^3 + 2(p + 1) =$$

$$= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + 2p + 2 =$$

$$= (p^3 + 2p) + 3(p^2 + p + 1).$$

Den första termen är delbar med 3 enligt förutsättningarna och i den andra ingår faktorn 3. Därmed är hela uttrycket delbart med 3.

c) Att $n^3 + 2n$ är delbart med 3 för alla värden på $n \geq 1$.

1249 a) Induktion kan inte, som i detta fall, användas för att visa att en olikhet gäller för alla reella tal större än 2.
b) Vi ska visa att $m^2 - 4m + 4 > 0$. Men $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 > 0$ för alla $m > 2$.

1250 a) Enligt potenslag är $3^{p+1} = 3^1 \cdot 3^p = 3 \cdot 3^p$

$$\text{b) } 3 \cdot 3^p = 3^p + 3^p + 3^p \text{ och } 2(p + 1) + 1 = 2p + 2 + 1$$

c) Här utnyttjar William induktionsantagandet att $3^p \geq 2p + 1$.

d) Här utnyttjar William att för alla $p \geq 0$ så är $3^p \geq 3^0$.

1251 För $n = 0$ är uttrycket $0^3 - 0 = 0$ och eftersom $3|0$ är påståendet sant för $n = 0$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = p$. Det innebär att vi antar $3|(p^3 - p)$.

Undersök vad som gäller för $n = p + 1$, med antagandet som en förutsättning.

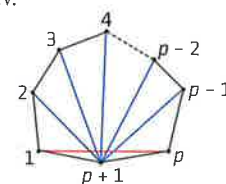
$$(p + 1)^3 - (p + 1) =$$

$$= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p - 1 =$$

$$= (p^3 - p) + 3(p^2 + p)$$

där den första termen är delbar med 3 enligt induktionsantagandet och den andra termen är

uppenbart delbar med 3. Alltså är påståendet sant även för $n = p + 1$ och det betyder att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 0$.



1252 För $n = 0$ är uttryckets värde 0 och eftersom $6|0$ är påståendet sant för $n = 0$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = p$. Det innebär att vi antar $6|p(2p+1)(7p+1)$ (*)

Undersök vad som gäller för $n = p + 1$, med antagandet som en förutsättning.

Insättning av $n = p + 1$ ger $(p+1)(2p+3)(7p+8)$ (**)

Vi skriver om uttrycken

(*) ger $p(2p+1)(7p+1) = 14p^3 + 9p^2 + p$, som alltså antas vara delbart med 6

(**) ger $(p+1)(2p+3)(7p+8) = 14p^3 + 51p^2 + 61p + 24 = (14p^3 + 9p^2 + p) + 6(7p^2 + 10p + 4)$ där den första termen är delbar med 6 enligt induktionsantagandet och den andra termen är uppenbart delbar med 6. Alltså är påståendet sant även för $n = p + 1$ och det betyder att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 0$.

1253 a) $N = 5$, $VL = 2^5 > 4 \cdot 5 = HL$. (Observera att olikheten också är sann för alla heltal $n \leq 0$, men däremot inte för $1 \leq n \leq 4$)

b) *Induktionsantagande*: Anta att påståendet är sant för $n = p$, dvs. anta att $2^p > 4p$.

c) Vill visa att $VL - HL > 0$ dvs. att $2^{p+1} - 4(p+1) > 0$.

$$\begin{aligned} 2^{p+1} - 4(p+1) &= 2 \cdot 2^p - 4p - 4 = \\ &= 2^p + 2^p - 4p - 4 \geq 2^p - 4 \geq \\ &\geq 2^5 - 4 > 0. \end{aligned}$$

Alltså är $VL - HL > 0$ också för $n = p + 1$.

d) Vi har visat att satsen är sann för $n = 5$, och att om satsen är sann för ett visst tal n , säg $n = p$, så är den sann också för nästföljande tal $n = p + 1$. Vi har därigenom visat att satsen är sann för alla heltal $n \geq 5$.

1254 För $n = 1$ gäller $VL = \frac{1}{1^2} = 1$ och $HL = 2 - \frac{1}{1} = 1$.

Så $VL \leq HL$ för $n = 1$.

Anta att likheten gäller för ett visst n , säg $n = p$. Dvs. anta

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2} \leq 2 - \frac{1}{p}.$$

Vad gäller då för $n = p + 1$?

$$HL - VL = 2 - \frac{1}{p+1} -$$

$$-\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) \geq$$

$$\geq 2 - \frac{1}{p+1} - \left(2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2}\right)$$

enligt induktionsantagandet.

Förenkling ger

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} =$$

$$= \frac{(p+1)^2 - p(p+1) - p}{p(p+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{p(p+1)^2} > 0 \text{ eftersom } p > 0.$$

Alltså gäller $VL \leq HL$ även för $n = p + 1$. Därmed är påståendet sant för alla värden på $n > 0$.

1255 a) För $n = 1$ är uttryckets värde $2^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 3$ och eftersom $3|3$ är påståendet sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = p$. Det innebär att vi antar $3|2^{2p-1} + 1$

Undersök vad som gäller för $n = p + 1$, med antagandet som en förutsättning.

Insättning av $n = p + 1$ ger $2^{2p+1} + 1$.

Vi skriver om uttrycket:

$$\begin{aligned} 2^{2p+1} + 1 &= 2^2 \cdot 2^{2p-1} + 4 - 3 = \\ &= 4(2^{2p-1} + 1) - 3, \text{ där den första termen är delbar med 3 enligt induktionsantagandet och den andra termen är uppenbart delbar med 3. Alltså är hela uttrycket delbart med 3 och påståendet är sant även för } n = p + 1, \text{ vilket betyder att påståendet är sant för alla heltal } n > 0. \end{aligned}$$

b) För $n = 1$ är uttryckets värde $2^{4 \cdot 1 - 2} + 1 = 5$ och eftersom $5|5$ är påståendet sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = p$. Det innebär att vi antar $5|2^{4p-2} + 1$

Undersök vad som gäller för $n = p + 1$, med antagandet som en förutsättning.

Insättning av $n = p + 1$ ger $2^{4p+2} + 1$.

Vi skriver om uttrycket:

$$\begin{aligned} 2^{4p+2} + 1 &= 2^4 \cdot 2^{4p-2} + 16 - 15 = \\ &= 16(2^{4p-2} + 1) - 15, \text{ där den första termen är delbar med 5 enligt induktionsantagandet och den andra termen är uppenbart delbar med 5. Alltså är hela uttrycket delbart med 5 och påståendet är sant även för } n = p + 1, \text{ vilket betyder att påståendet är sant för alla heltal } n > 0. \end{aligned}$$

B Blandade uppgifter

- 1 a) $5 \cdot 11$
b) $2^2 \cdot 11$
c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
d) $2 \cdot 3^3$

- 2 a) 3 rest 2
b) 4 rest 0
c) 9 rest 4
d) 0 rest 20

- 3 a) 1, 3, 5, 15
b) 1, 2, 4, 5, 10, 20
c) 1, 7, 49
d) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

4 T.ex. 6 och 20

- 5 a) $5 + 8 + 11 + 14 + 17$
b) $6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192$
c) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

6 T.ex. 17, 53, 89 och 17, 41, 65, 89

7 Därför att $365 \equiv 1 \pmod{7}$. Då är det ett helt antal veckor (52 st) plus en dag.

8 04.00

- 9 a) $30 (2 \cdot 3 \cdot 5)$
b) $8 (2^3)$

10 Boa är 24 år, Cia är 36 år och Daga är 54 år.

- 11 a) 0
b) 3
c) 2

- 12 a) Kvoten mellan två på varandra följande element är konstant, $k = \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{8}$
c) 64

13 a) För $n = 1$ gäller $VL = 4$ och $HL = 2 \cdot 1(1+1) = 4$, så påståendet är sant för $n = 1$.
Anta att påståendet är sant för ett visst n , t.ex. $n = p$. Det innebär att vi antar att

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4p = 2p(p+1)$$

Undersök om detta också medför att påståendet är sant för $n = p + 1$.

$$\begin{aligned} VL &= 4 + 8 + 12 + \dots + 4p + \\ &+ 4(p+1) = 2p(p+1) + \\ &+ 4(p+1) \text{ enligt induktionsantagandet.} \end{aligned}$$

$$VL = 2p^2 + 2p + 4p + 4 = 2p^2 + 6p + 4$$

Sätt in $n = p + 1$ direkt i formeln i HL

$$\begin{aligned} HL &= 2(p+1)(p+1+1) = \\ &= (2p+2)(p+2) = 2p^2 + 4p + \\ &+ 2p + 4 = 2p^2 + 6p + 4 \end{aligned}$$

Så $VL = HL$ och påståendet är sant även för $n = p + 1$ under förutsättning att det är sant för $n = p$. Tillsammans med att påståendet är sant för $n = 1$ innebär det att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

b) $s_n = 4 + 8 + 12 + \dots + 4n$ är en aritmetisk summa med n stycken termer, där $a_1 = 4$ och $a_n = 4n$. Enligt formeln för aritmetisk summa gäller $s_n = \frac{n(4+4n)}{2} = \frac{4n(1+n)}{2} = 2n(n+1)$ v.s.v.

- 14 a) -410
b) -52 429

15 Talet är delbart med både 4 och 9 och de två talen har inga gemensamma primtalsfaktorer. Delbarhet med 4 kollas enkelt genom att talet slutar på 64, som är delbart med 4. Delbarhet med 9 framgår av att siffersumman $3 + 8 + 1 + 9 + 5 + 6 + 4 = 36$ är delbar med 9.

16 1

17 $a_n = 10^{2n} + 6$

18 a) Genom att först konstatera att 6 637 698 är ett jämnt tal och därmed delbart med 2, och där efter dra slutsatsen att talet också är delbart med 9 eftersom siffersumman $6 + 6 + 3 + 7 + 6 + 9 + 8 = 45$ är delbar med 9.

b) Eftersom 2 och 9 inte har några gemensamma primtalsfaktorer och 6 637 698 är delbart med både 2 och 9, så är det även delbart med 18.

c) Eftersom talet slutar på 04, så är det delbart med 4. Det är därför även delbart med 2 och siffersumman $4 + 3 + 0 + 6 + 5 + 8 + 0 + 4 = 30$ visar att talet är delbart med 3. Därmed är talet delbart med 6.

d) Därför att 4 och 6 har den gemensamma faktorn 2. Då kan man inte kontrollera delbarhet med 24 på det sättet. (T.ex. är 12 delbart med både 4 och 6, men uppenbart inte med 24. Delbarhet med 24 kan undersökas genom att kontrollera om talet är delbart med 3 och 8.)

19 a) Vi utgår ifrån att talen a och b är positiva heltal. Om $a = kb + r$ där $r \geq b$ så kan vi alltid öka kvoten med 1, och skriva $a = (k+1)b + (r-b)$. För den nya resten $r_2 = (r-b)$ gäller $r_2 \geq 0$ eftersom $r \geq b$. Om den nya resten r_2 är mindre än b är vi klara. Om den nya resten fortfarande är större än b upprepar vi proceduren. Eftersom r är ett ändligt tal kommer proceduren ha ett slut och på det sättet har vi visat att vi alltid kan finna en rest r_n sådan att $0 \leq r_n < b$.

b) Eftersom nämnaren b är negativ kan vi aldrig finna en positiv rest r som är mindre än b .

c) 1 resp. 5

20 8 504 kr

21 a) $u = 4$
b) $u = 1$

22 a) 12 sidor

b) $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ i.e., där Figur 1 har omkretsen 3 i.e.

23 32 dagar

- 24 a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

b) Alla multiplar av 3 som är jämna tal, dvs. de tal som är delbara med 6.

c) Upp till och med 7 (det största primtal som är mindre än $\sqrt{100}$)

- 25 a) För $n = 1$ gäller $VL = 4^0 = 1$ och

$$HL = \frac{4^1 - 1}{3} = 1, \text{ så påståendet}$$

är sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , t.ex. $n = p$, dvs.

$$\sum_{m=0}^{p-1} 4^m = 1 + 4 + \dots + 4^{p-1} = \frac{4^p - 1}{3}$$

Undersök vad som gäller för $n = p + 1$.

$$VL = \sum_{m=0}^p 4^m = 1 + 4 + \dots + 4^{p-1} + 4^p = \frac{4^p - 1}{3} + 4^p = \frac{4^p - 1 + 3 \cdot 4^p}{3} = \frac{3 \cdot 4^p + 4^p - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^p - 1}{3}$$

$$HL = \frac{4^{p+1} - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^p - 1}{3}$$

Alltså $VL = HL$ även för $n = p + 1$. Tillsammans med att påståendet är sant för $n = 1$ innebär det att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

b) Det är en geometrisk summa med n stycken termer, där $a_1 = 1$ och $k = 4$. Insättning i formeln ger

$$s_n = \frac{1(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \text{ vilket är samma som HL.}$$

- 26 För $n = 1$ gäller

$$VL = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \text{ och}$$

$$HL = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2} \text{ så påståendet är}$$

sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst $n = p$, dvs.

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1}$$

Visa att påståendet är sant för $n = p + 1$

$$VL = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2) + 1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

$$HL = \frac{p+1}{(p+1)+1} = \frac{p+1}{p+2}$$

Alltså gäller att påståendet är sant även för $n = p + 1$ och vi kan dra slutsatsen att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

- 27 $x \approx 70,2$

- 28 Om $3|a - 1$ kan vi skriva $a - 1 = 3n$ för något heltal n . Lös vi ut a får vi $a = 3n + 1$. Då är $a^3 - 1 = (3n + 1)^3 - 1 = (27n^3 + 27n^2 + 9n + 1) - 1 = 27n^3 + 27n^2 + 9n = 9(3n^3 + 3n^2 + n)$ dvs. $9|a^3 - 1$ v.s.v.

- 29 a) För $n = 1$ har uttrycket värdet $2^{4 \cdot 0} - 1 = 0$ och eftersom $5|0$, så påståendet är sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst $n = p$, dvs. anta att $5|2^{4p} - 1$.

Visa att påståendet är sant för $n = p + 1$

Om $5|2^{4p} - 1$ kan vi skriva $2^{4p} - 1 = 5m$ för något heltal m . Då är $2^{4(p+1)} - 1 = 2^{4p+4} - 1 = 2^4 \cdot 2^{4p} - 1 = 16(5m + 1) - 1 = 80m + 16 - 1 = 80m + 15 = 5(16m + 3)$ och vi har visat att $2^{4(p+1)} - 1$ är delbart med 5.

Därmed är påståendet sant även för $n = p + 1$ och vi kan dra slutsatsen att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

I induktionssteget visar vi att $2^{4(p+1)} - 1$ är delbart med 5. Det kan också göras på följande eleganta sätt:

$$2^{4(p+1)} - 1 = 2^{4p+4} - 1 = 2^4 \cdot 2^{4p} - 1 = 16 \cdot 2^{4p} - 16 + 15 = 16(2^{4p} - 1) + 15, \text{ där induktionsantagandet ger att } 5 \text{ delar första termen och den andra termen är uppenbart delbar med } 5. \text{ Alltså gäller att } 5|2^{4(p+1)} - 1$$

$$b) 2^{4p} - 1 = (2^4)^p - 1 \equiv 1^p - 1 = 0 \pmod{5}$$

Alltså är uttrycket delbart med 5.

- 30 För $n = 2$ gäller $VL = 1 + 4 = 5$ och $HL = 2^3 = 8$, så $VL < HL$ vilket ger att påståendet är sant för $n = 2$.

Anta att påståendet är sant för ett visst $n = p$, dvs.

$$1 + 4 + 9 + \dots + p^2 < p^3$$

Visa att påståendet är sant för $n = p + 1$

$$VL = 1 + 4 + 9 + \dots + p^2 + (p+1)^2 < p^3 + (p+1)^2 \text{ enligt induktionsantagandet}$$

$$HL = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

Så $HL - VL > p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - (p^3 + (p+1)^2) = 2p^2 + p > 0$, där vi utnyttjat att $p \geq 2$ i det sista steget.

Alltså gäller att påståendet är sant även för $n = p + 1$ och vi kan dra slutsatsen att påståendet är sant för alla $n \geq 2$.

- 31 a) 1, 2, 3, 4, 6, 12

$$b) 14 = 2 \cdot 7$$

$$c) 4 \text{ st}$$

$$d) 12 \text{ st}$$

e) Ta en av primfaktorerna med multiplicitet, dvs. $p_1^{k_1}$. Då finns det $(k_1 + 1)$ möjligheter på hur många gånger p_1 kan förekomma i en delare till talet, nämligen ingen gång, en gång, två gånger, ..., k_1 gånger. Dessa faktorer är alltså $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{k_1}$. För varje enskild faktor $p_2, p_3, \dots, p_n$ gäller motsvarande. Delarna bildas av alla tänkbara kombinationer av dessa faktorer och antalet kombinationer är enligt multiplikationsprincipen $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$ v.s.v.

- 32 a) Eftersom $k \in \mathbb{Q}$, så kan vi skriva $k = \frac{p}{q}$ där p och q är heltal utan gemensamma primtalsfaktorer (och $q \neq 0$). Med formeln för det n :te elementet i en geometrisk talföljd kan vi skriva

$$a_i = a_1 k^{i-1} = a_1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} = \frac{a_1 \cdot p^{i-1}}{q^{i-1}}$$

Eftersom detta tal

enligt förutsättningarna är ett heltal, så måste gälla att $q^{i-1} | a_1$ för vi vet att q och p saknar gemensamma primtalsfaktorer. Men då gäller också att $q^m | a_1$ för alla heltal m i intervallet $1 \leq m < i - 1$. (Ett exempel på detta är att 2^4 delar 48 och att det medför att även $2^3, 2^2, 2^1$ delar 48). Därmed är även tal på formen $a_1 k^m$ heltal för dessa värden på m . Det var just det som skulle visas.

- b) Även om $q^{i-1} | a_1$, så är det inte säkert att $q^j | a_1$ för $j > i$. (Exempelvis gäller att 2^4 delar 48, men det är inte sant att 2^5 delar 48, där $5 > 4$). Därmed är det inte säkert att $a_j = a_1 k^{j-1} \in \mathbb{Z}$ för $j > i$.
- c) Ta exemplet där $i = 3$ och låt $a_1 = 1$ och $a_3 = 2$. Båda dessa är alltså heltal, men det mellanliggande talet är $a_2 = \sqrt{2}$ är inte ett heltal. Här är $k = \sqrt{2}$, som inte är ett rationellt tal.

? Kapiteltest

- 1 a) 1, 2, 3, 6, 9, 18

$$b) 1, 41$$

$$c) 1, 3, 9, 23, 27, 69, 207, 621$$

- 2 Man behöver testa delbarhet med alla primtal upp till och med det som är närmast under $\sqrt{373}$.

- 3 a) 8 rest 3

$$b) 6 \text{ rest } 6$$

- 4 T.ex. $x = 0, y = 14$ och $z = 28$

- 5 a) Differensen mellan två på varandra följande tal är konstant ($d = -5$).

$$b) a_1 = 47; a_n = a_{n-1} - 5 \text{ för } n > 1$$

$$c) a_n = 47 + (-5)(n - 1) = 52 - 5n$$

$$d) n \geq 20$$

- 6 $n = 2, 3, 6$

$$7 a) \sum_{k=1}^9 (9k + 1)$$

$$b) \sum_{k=1}^{46} 2 \cdot 1,04^{k-1}$$

- 8 a) $x = 3$

$$b) x = 5$$

- 9 Därför att kapitalet ökar med ränta på ränta. Om vi det första året har kapitalet K , så kommer vi nästa år på nyårsafton ha värdet $K \cdot p$, där p är förändringsfaktorn som beror av räntesatsen. Det tredje året har kapitalet värdet $K \cdot p^2$ och det fjärde året $K \cdot p^3$, osv. Det n :te året är värdet av kapitalet $K \cdot p^{n-1}$, vilket är ett uttryck för en geometrisk talföljd.

- 10 a) För $n = 1$ gäller

$$VL = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$\text{och } HL = \frac{3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1}{2} = 4, \text{ så}$$

$VL = HL$ och påståendet är sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , t.ex. $n = p$. Det innebär att vi antar

$$\sum_{k=1}^p (3k + 1) = \frac{3p^2 + 5p}{2}$$

Undersök om det också medför att påståendet är sant för $n = p + 1$.

$$VL = \sum_{k=1}^{p+1} (3k + 1) =$$

$$= \sum_{k=1}^p (3k + 1) + (3(p + 1) + 1) =$$

$$= \frac{3p^2 + 5p}{2} + 3p + 4 =$$

$$= \frac{3p^2 + 5p}{2} + \frac{6p + 8}{2} =$$

$$= \frac{3p^2 + 11p + 8}{2}$$

Sätt in $n = p + 1$ direkt i formeln i HL

$$HL = \frac{3(p+1)^2 + 5(p+1)}{2} =$$

$$= \frac{3p^2 + 6p + 3 + 5p + 5}{2} =$$

$$= \frac{3p^2 + 11p + 8}{2}$$

Så påståendet är sant även för $n = p + 1$ under förutsättning att det är sant för $n = p$. Tillsammans med att påståendet är sant för $n = 1$ innebär det att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

b) För $n = 1$ gäller $VL = \frac{1}{2}$ och

$$HL = \frac{1}{2}, \text{ så } VL \leq HL \text{ och}$$

påståendet är sant för $n = 1$.

Anta att påståendet är sant för ett visst n , t.ex. $n = p$. Det innebär att vi antar

$$\sum_{k=1}^p \frac{k}{k+1} \leq \frac{p^2}{p+1}$$

Undersök om det också medför att påståendet är sant för $n = p + 1$.

$$VL = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^p \frac{k}{k+1} + \frac{p+1}{p+2} \leq$$

$$\leq \frac{p^2}{p+1} + \frac{p+1}{p+2} \text{ enligt}$$

induktionsantagandet.

$$HL = \frac{(p+1)^2}{(p+1)+1} =$$

$$= \frac{(p+1)^2}{p+2}$$

$$\text{Så } HL - VL \geq \frac{(p+1)^2}{p+2} - \frac{p^2}{p+1} =$$

$$= \frac{p+1}{p+2}$$

$$= \frac{(p+1)^3 - p^2(p+2) - (p+1)^2}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p^3 - 2p^2 - p^2 - 2p - 1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p}{(p+1)(p+2)} \geq 0 \text{ eftersom}$$

$$p \geq 1.$$

Vi har visat att $HL - VL \geq 0$ dvs. att $VL \leq HL$, även för $n = p + 1$ under förutsättning att det är sant för $n = p$. Tillsammans med att påståendet är sant för $n = 1$ innebär det att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

2 Mängder och grafer

2101 a) Sant

b) Falskt

c) Falskt

2102 $\emptyset$; {katt}; {hund}; {kanariefågel}; {katt, hund}; {katt, kanariefågel}; {hund, kanariefågel}; {katt, hund, kanariefågel}

2103 a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $B = \{n; n \in \mathbb{Z} \text{ och } 11 \leq n \leq 16\}$

2104 a) Q är mängden av de rationella talen, R är mängden av de reella talen och C är mängden av de komplexa talen

b) $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

2105 a) T.ex. $A = \{a; a \text{ jämnt och } 12 \leq a \leq 26\}$

b) T.ex. $B = \{b^2; b \in \mathbb{Z} \text{ och } 3 \leq b^2 \leq 82\}$

c) $C = \{\text{katter med körkort för lastbil och som bor på min gata}\} = \emptyset$

2106 Ja, om $A = B$ så gäller ju $x \in A \rightarrow x \in B$ för alla element x .

2107 a) Ja, varje element i B ingår ju också i A . Däremot är det inte säkert att $B \subseteq A$ medför $B \subset A$.

b) $B = \{\text{basker, hatt, keps, mössa}\}$, dvs. $B = A$

2108 Om $\emptyset$ inte var en delmängd av A , så skulle det finnas något element i $\emptyset$ som inte finns i A . Men eftersom det inte finns något element i $\emptyset$ är detta en omöjlighet. Alltså är $\emptyset$ en delmängd av varje mängd A .

2109 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{1\}$

c) $|B| = 4$

2110 a) Sant

b) Sant

c) Sant

d) Falskt

2111 $A = \{1, 9, 17, 21\}$

2112 a) $A^C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $A \cap B = \{3\}$

d) $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$

e) $B \setminus A = \{5, 6\}$

f) $C \cap B = \emptyset$

2113 A^C är mängden av husdjur som inte är katter.

2114 $|A^C| = 22$

2115 a) $A^C = \{a; a \text{ udda}\}$

b) $B = \{b; b \text{ är ett negativt heltal}\}$

c) $A \cup B = \{x; x \text{ är ett jämnt eller ett negativt heltal}\}$

d) $A \cap B = \{y; y \text{ är ett jämnt och negativt heltal}\}$

2116 $B = \emptyset$

2117 Alla mängder där $A = B$

2118 $X = A^C$ eller $X = U$

2119 a) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

b) $(A \cap B) \cap C = \{1\}$

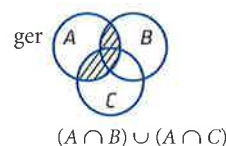
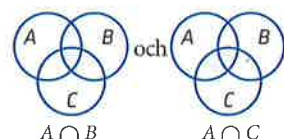
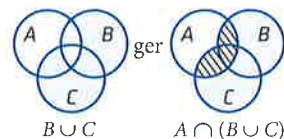
c) $(A \cup C) \cap B = \{1, 7\}$

d) $(B \cap C) \cup A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$

2120 T.ex. $A = \{a; a \text{ udda}\}$ och $B = \{b; b \text{ jämnt}\}$

2121 a) Låt $A = \{1\}$; $B = \{2\}$ och $C = \{3\}$. Då är $A \cap (B \cup C) = \{1\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$ och $(A \cap B) \cup C = \emptyset \cup \{3\} = \{3\}$ och självklart gäller $\emptyset \neq \{3\}$.

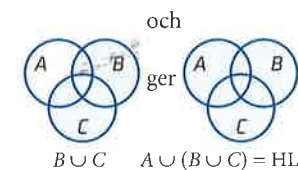
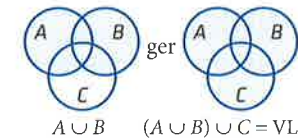
b) Av de skuggade, randiga områdena i figurerna ser vi att $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



2122 Det gäller att $A \cap B = \{x; x \in A \text{ och } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ och } x \in A\} = B \cap A$

2123 I) $(A \cup B) \cup C = \{x; x \in A \text{ eller } x \in B\} \cup C = \{x; x \in A \text{ eller } x \in B \text{ eller } x \in C\} = A \cup \{x; x \in B \text{ eller } x \in C\} = A \cup (B \cup C)$ v.s.v.

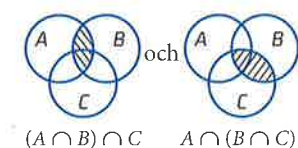
Vi kan också åskådliggöra likheten $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ med figurer.



I figurerna ser vi att mängderna $(A \cup B) \cup C$ och $A \cup (B \cup C)$ är lika.

II) $(A \cap B) \cap C = \{x; x \in A \text{ och } x \in B\} \cap C = \{x; x \in A \text{ och } x \in B \text{ och } x \in C\} = A \cap \{x; x \in B \text{ och } x \in C\} = A \cap (B \cap C)$ v.s.v.

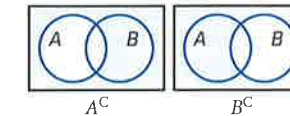
Av de skuggade områdena i figuren ser vi att mängderna $(A \cap B) \cap C$ och $A \cap (B \cap C)$ är lika.



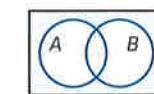
2124 a) $(A \cup B)^C = U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B) = A^C \cap B^C$ v.s.v.

b) $(A \cap B)^C = U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B) = A^C \cup B^C$ v.s.v.

Likheterna ovan kan åskådliggöras med figurer. Nedan åskådliggör vi komplementet till A respektive komplementet till B .

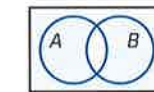


Vi kan se att snittet av dessa komplement är mängden av alla element som varken finns i A eller i B , dvs. $(A \cup B)^C$.



$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$$

Vi kan också se att unionen av komplementen A^C och B^C är mängden av alla element som inte finns med i snittet av A och B , dvs. mängden $(A \cap B)^C$.



$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

2125 a) 31

b) 11

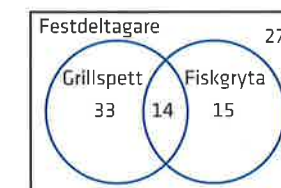
c) 13

d) 22

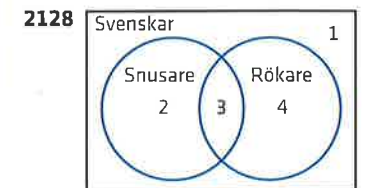
2126 a) 33 personer

b) 48 personer

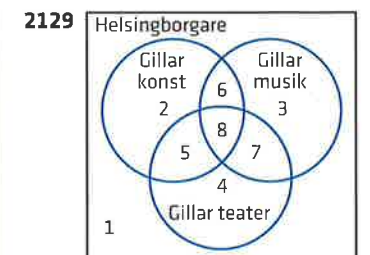
c) 27 personer



2127 Sektor 1 är hushåll i Ludvika som har trädgård, men inte husdjur. Sektor 2 är hushåll i Ludvika som har både trädgård och husdjur. Sektor 3 är hushåll i Ludvika som har husdjur, men inte trädgård. Sektor 4 är hushåll i Ludvika som varken har trädgård eller husdjur.



Sektor 1 är svenskar som varken snusar eller röker, sektor 2 är ickerökande svenska snusare, sektor 3 svenskar som både snusar och röker, sektor 4 är svenska rökare som inte snusar.



Sektor 1 är helsingborgare som varken gillar konst, musik eller teater. Sektor 2 är helsingborgare som gillar konst, men inte musik eller teater. Sektor 3 är helsingborgare som gillar musik, men inte konst eller teater. Sektor 4 är helsingborgare som gillar teater, men inte konst eller musik. Sektor 5 är helsingborgare som gillar konst och teater, men inte musik. Sektor 6 är helsingborgare som gillar konst och musik, men inte teater. Sektor 7 är helsingborgare som gillar musik och teater, men inte konst. Sektor 8 är helsingborgare som gillar såväl konst som musik och teater.

2130 Sektor 1 är elever på Balders-
torps gymnasium som utövar
konståkning, men inte ridning
eller gymnastik. Sektor 2 är
elever på Balderstorp som både
håller på med konståkning och
ridning, men inte med gymnas-
tik. Sektor 3 är elever på Bal-
derstorp som håller på med
såväl konståkning som ridning
och gymnastik. Sektor 4 är elev-
er på Balderstorp som håller på
med ridning och gymnastik,
men inte med konståkning.

- 2131** a) 24 st
b) 19 st
c) 4 st

2132 $B \cap (A \cup C)$

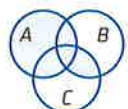
- 2133** a) Mängden av positiva tal del-
bara med 6
b) Mängden av positiva tal del-
bara med 10
c) Mängden av positiva tal del-
bara med 15

- 2134** a) $|A \setminus B| = 55$
b) $|A \cup B| = 90$
c) $|(A \cup B)^c| = 30$

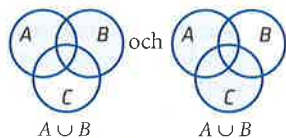
2135 $|A \cup B|$

2136 $A \subseteq B$

2137 Av de skuggade områdena i
figurerna ser vi att
 $A \cup (B \cap C) =$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cup (B \cap C)$

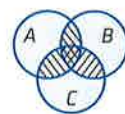


$A \cup B$ och $A \cup C$



ger $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

2138 Vi börjar med att addera antalet
element i A , B respektive C .
Men då har vi lagt till elemen-
ten som ingår i snittet av A och
 B två gånger. Vi subtraherar
därför med $|A \cap B|$. Av samma
anledning subtraherar vi med
 $|A \cap C|$ och $|B \cap C|$. Men då
har vi faktiskt subtraherat bort
lite för mycket. Antalet element
i mängden $|A \cap B \cap C|$ lades
nämligen först till tre gånger
när vi räknade $|A| + |B| + |C|$,
men subtraherades också tre
gånger när vi subtraherade med
 $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ och $|B \cap C|$.
För att få det rätta antalet måste
vi därför lägga till mängden
 $|A \cap B \cap C|$.



2201 12 sätt

2202 120 sätt

2203 10 000 st

- 2204** a) T.ex. (D, 1)
b) Rutornas beteckning. (D, 1)
står för ruta D1, som vit dam
står på vid spelets början.
c) 64

- 2205** a) $4,57 \cdot 10^{14}$ st (68^8)
b) $4,64 \cdot 10^{14}$ st
($68^6 + 68^7 + 68^8$)

2206 384 sätt

2207 $|A \times B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| =$
 $= |B \times A|$

- 2208** a) De fyra färgerna represe-
nterar lådor och de fem korten
representerar föremål.
b) Eftersom $5 > 4$ kommer,
enligt lådprincipen, minst en
låda att innehålla mer än ett
föremål, dvs. det finns mer
än ett kort i åtminstone en av
färgerna.

2209 3 personer (person = föremål
och kön = låda)

2210 Ja. 7 personer (föremål) ska
välja mellan 5 olika tröjor
(lådor) och eftersom $7 > 5$, så
ger Dirichlets lådprincip lös-
ningen.

2211 Ja. Det finns fler än
200 000 göteborgare och genom
att låta göteborgarna vara före-
mål och antal hårstrån vara
lådor, så ger lådprincipen svaret.

2212 25 st

2213 Då är uppgiften inte lösbar.
Man kan ha hur många elever
som helst i en klass utan att tre
eller fler av dem nödvändigtvis
är födda just i mars.

2214 25 st

- 2215** a) Nej. Det finns 8 rester vid
division med 8 (0, 1, 2, ..., 7)
och därmed är antalet före-
mål (elementen) inte fler än
antalet lådor (resterna).
b) $n = 7$

2216 Om vi tänker oss att vi vecklar
ut rektangelns omkrets till ett
100 cm långt streck, så kan vi
dela in rektangelns omkrets i
100 intervall enligt principen
 $0 \leq x < 1$ cm, $1 \leq x < 2$ cm osv.
Då måste enligt lådprincipen
minst ett intervall (låda) inne-
hålla minst två punkter (före-
mål), vilket medför att minst
två punkter befinner sig mindre
än 1 cm ifrån varandra.

2217 Enligt förutsättningarna ska vi
lägga m föremål i n lådor, där
 $m > n$. Vi försöker lägga föremål
i tomma lådor. Om vi inte väljer
en tom låda för varje föremål, så
har vi redan uppfyllt slutsatsen
att det ligger minst 2 föremål i
minst en låda. De första n före-
målen kan placeras i låda
1, 2, ..., n . Då är alla lådor fulla,
men vi har $m - n > 0$ föremål
kvar och då måste något före-
mål hamna i en låda som inte är
tom.

2218 a) Nej. Om vi antar att alla
kineser är mellan 30 cm och
250 cm, så kan vi dela in
intervallet mellan 30 cm och
250 cm i $2,2 \cdot 10^9$ intervall
med längden 1 nm. Efter-
som antalet intervall (lådor)
är fler än antalet kineser
(föremål) kan vi inte dra
slutsatsen att två kineser
nödvändigtvis har längder
som hamnar i samma inter-
vall, dvs. vi kan inte med
säkerhet säga att deras läng-
der skiljer sig åt med mindre
än 1 nm. Det är dock sanno-
likt att fler än 500 miljoner
kineser (av drygt 1,3 miljard-
er) har en längd mellan
135 cm och 185 cm, så det är
ändå sannolikt att påståendet
är sant.

b) "Det finns minst två svenskar
som har en kroppslängd som
inte skiljer sig med mer än
 $1/4 \mu\text{m}$." Om vi räknar med
en längdvariation mellan
30 cm och 250 cm får vi
 $2,2 \cdot 10^6$ olika längdintervall
med längden $1 \mu\text{m}$. Antalet
längdintervall med längden
 $1/4 \mu\text{m}$ (lådor) blir då
 $4 \cdot 2,2 \cdot 10^6 = 8,8 \cdot 10^6$ styck-
en. Det bor ca 9,5 miljoner
personer i Sverige (föremål)
och eftersom
 $9,4 \cdot 10^6 > 8,8 \cdot 10^6$ ger låd-
principen att påståendet är
sant.

c) Räknar vi med att skillnaden
mellan den som är längst och
den som är kortast är
 $2,2 \text{ m} = 2,2 \cdot 10^6 \mu\text{m}$, så är
kvoten mellan antalet invä-
nare (föremål) och antalet
längdintervall (lådor)
 $\frac{1,3 \cdot 10^9}{2,2 \cdot 10^6} > 590$. Med andra
ord $1,3 \cdot 10^9 > 2,2 \cdot 10^6 \cdot 590$.
Vi kan därför med säkerhet
säga att minst 590 kineser
kommer att vara inom
samma längdintervall, dvs.
vara lika långa på en 1 μm
när.

2219 $k \cdot n$

2220 $5! = 120$ sätt

2221 $P(28, 2) = 28 \cdot 27 = 756$ sätt

2222 $6! = 720$ st

- 2223** a) 6 st
b) 3 st
c) Det är 2 st A i APA, vilket ger
att det bara blir en variant av
t.ex. PAA. Vi kan inte skilja
ut vilket A som är vilket och
då blir det färre varianter.

- 2224** a) $29! \approx 8,8 \cdot 10^{30}$ st
b) $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = 570\,024$ st

- 2225** a) $3! = 6$ tal
b) $3^3 = 27$ tal

2226 Det första elementet kan väljas
på n olika sätt, då finns det
 $n - 1$ olika element kvar till
position 2, $n - 2$ olika element
kvar till position 3. Fortsatt
resonemang ger att det finns
2 element att välja på till näst
sista positionen och 1 element
till den sista. Multiplikations-
principen ger att antalet permu-
tationer är
 $n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

2227 Ett ord med 6 olika bokstäver
kan bilda $6!$ olika varianter.
LALLAR har en bokstav som
förekommer 3 gånger. Om
dessa vore 3 olika bokstäver så
skulle de kunna skifta ordning
på $3!$ olika sätt. Men LLL blir
alltid lika och därför måste man
dividera med $3!$. Samma reso-
nemang ger en division med $2!$
eftersom vi har 2 stycken A.

2228 $9! \cdot 4! \cdot 2 \approx 1,7 \cdot 10^7$ sätt

2229 a) $\frac{5!}{5} = 4! = 24$ sätt

b) $\frac{P(8, 5)}{5} = \frac{8!}{5!} = 344$ sätt

c) $\frac{P(n, k)}{k} = \frac{n!}{k(n - k)!}$

- 2230** a) $n! + (n + 1)! =$
 $= n! + (n + 1)n! =$
 $= (1 + n + 1)n! = (n + 2)n!$
b) $n! + (n - 1)! =$
 $= n(n - 1)! + (n - 1)! =$
 $= (n + 1)(n - 1)! =$
 $= (n + 1)(n - 1)(n - 2)! =$
 $= (n^2 - 1)(n - 2)!$

2231 a) $6! = 720$ sätt

b) $\frac{6!}{6 \cdot 2} = \frac{5!}{2} = 60$ sätt

Om vi bryr oss om vilken
stol gästerna sitter på finns
enligt resultatet i uppgift a)
 $6! = 720$ olika bordsplace-
ringar. Men samtliga perso-
ner kommer att ha precis
samma personer på sin högra
respektive vänstra sida om
alla bara roterar ett steg, t.ex.
om alla sätter sig på stolen
till höger om sig. Det finns
6 sådana rotationer. Vi divi-
derar därför med 6. Men
eftersom vi bara bryr oss om
vilka personer gästerna sitter
bredvid, och inte huruvida
de sitter på höger eller vän-
ster sida, så är en placering
där person A har B till höger
och C till vänster samma pla-
cering som när A har B till
vänster och C till höger. Vi
dividerar därför även med 2.

c) 6 sätt. De tre männen kan
placeras godtyckligt, efter-
som positionen runt bordet
saknar betydelse och likaså
vilken rotationsordning de
sitter i. För kvinnorna blir nu
positionen viktig, eftersom
det är intressant vem som
sitter bredvid vem och de
kan placeras på $3! = 6$ olika
sätt.

2232 Det finns 2 002 olika varianter
med 5 tillbehör, 1 001 olika
varianter med 4 tillbehör och
91 varianter med 2 tillbehör.

2233 a) $\left(\frac{7}{3}\right) = 35$ sätt

b) $\left(\frac{18}{3}\right) = 816$ sätt

c) $816 \cdot 35 = 28\,560$ sätt (enligt
multiplikationsprincipen)

2234 a) $\left(\frac{23}{2}\right) = 253$ sätt

b) $\frac{22}{253} = \frac{2}{23} \approx 9\%$

2235 a) $\left(\frac{35}{7}\right) = 6\,724\,520$ sätt

b) $\frac{1}{6\,724\,520}$

2236 $k = 950\,400$

2237 a) 54 000 prov
b) $3,9 \cdot 10^7$ prov ($54\,000 \cdot 6!$)

$$2238 \text{ a) } C(n, 0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1, \text{ v.s.v.}$$

b) Vi kan välja 0 element av n på ett enda sätt, nämligen genom att låta bli att välja något element.

$$2239 \text{ a) } HL = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = VL, \text{ v.s.v.}$$

b) Vi kan välja k element av n antingen genom att välja ut de k element av n som ska ingå, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt. Men vi kan lika gärna välja de $(n-k)$ element som inte ska ingå, vilket kan göras på $\binom{n}{n-k}$ sätt.

$$2240 \text{ Ja, } k=2. VL = C(8, 5) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} \text{ och } HL = P(8, k) = \frac{8!}{(8-k)!}. \text{ Likhet uppstår alltså när } 5! \cdot 3! = (8-k)! \text{ och eftersom } 5! \cdot 3! = 5! \cdot 6 = 6!, \text{ så ger } 8-k=6 \text{ en lösning.}$$

$$2241 \text{ a) } 22! \approx 1,1 \cdot 10^{21} \text{ sätt} \\ \text{b) } 7,68 \cdot 10^{10} \text{ sätt (Fås genom } \frac{22!}{7!7!4!4!} \text{ eller } \frac{(22)(15)(8)(4)}{(7)(7)(4)(4)})$$

$$2242 \text{ } P(12, 12) = 12! \approx 479 \text{ miljoner sätt}$$

$$2243 \text{ } \left(\frac{32}{8}\right) \approx 10,5 \text{ miljoner sätt}$$

$$2244 \text{ a) } 15 \text{ st} \\ \text{b) } 21 \text{ st}$$

$$2245 \text{ } \frac{1}{C(10, 3)} = \frac{1}{120}$$

2246 a) 10 st
b) Man dividerar 20 med 2. Det beror på att James har räknat samman hur många upplevda handskakningar det totalt finns hos respektive person. Men eftersom en handskakning görs mellan två personer, så blir antalet handskakningar hälften av det totala upplevda antalet.

2247 Sannolikheten att få tre av tärningarna att visa sexa och de två andra någonting annat är $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ men då har vi inte tagit hänsyn till att vi kan välja ut de tre tärningar som ska visa en sexa på $\binom{5}{3}$ olika sätt. Den totala sannolikheten blir då $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \binom{5}{3}$

$$2248 \text{ a) } 0,30 \\ \text{b) } 0,04$$

$$2249 \text{ a) } 0,23 \\ \text{b) } 0,26$$

$$2250 \text{ } C(2, 0) \cdot C(9, 5) + C(2, 1) \cdot C(9, 4) = 378 \text{ sätt}$$

$$2251 \text{ } 0,11$$

2252 Vid första valet finns det n möjligheter och det gör det vid resterande val också. Det är k stycken val som ska göras och multiplikationsprincipen ger då att antalet sätt är $n \cdot n \dots n$ med k stycken faktorer, dvs. n^k olika sätt.

$$2253 \text{ } \binom{23}{9} - \binom{20}{6} = 778 \text{ 430 sätt}$$

$$2254 \text{ a) } 5! = 120 \text{ sätt} \\ \text{b) } 4! = 24 \text{ sätt} \\ \text{c) } 72 \text{ sätt}$$

$$2255 \text{ a) } \binom{52}{5} = 2 \text{ 598 960 st} \\ \text{b) } \binom{13}{5} \cdot 4 = 5 \text{ 148 st} \\ \text{c) } 4^5 \cdot 10 = 10 \text{ 240 st}$$

$$2256 \text{ } \frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{(n+k-1)!} = \frac{(n-1)!(n+k-1-(n-1))!}{(n+k-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \text{ v.s.v.}$$

$$2257 \text{ a) } |\infty\infty|\infty$$

b) Vi ser att samtliga möjliga val ges av antalet möjliga sätt att placera ut de två lodräta strecken. Det finns tillsammans 7 ringar och streck. Vi kan tänka oss dessa som sju positioner, och på två av dessa positioner ska vi sätta lodräta streck. Dessa två positioner kan väljas ut på $\binom{7}{2}$ sätt.

c) Vi ska välja ut totalt k element av n element med repetition men utan hänsyn till ordning. Vi kan tänka på det som att vi ska välja k element där varje element tillhör någon av n sorter. Varje sort motsvarar ett fack och vi ska fördela våra k element i dessa n fack. För att göra indelningen i n fack behöver vi $(n-1)$ lodräta streck. Tillsammans med de k elementen (ringarna) får vi totalt $(n-1+k)$ positioner. Av dessa ska vi välja ut $(n-1)$ positioner där vi ska placera ut de lodräta strecken. Det kan göras på $\binom{n+k-1}{n-1}$ olika sätt, v.s.v.

$$2258 \text{ a) } \binom{26}{6} = 230 \text{ 230 sätt}$$

Calle ska fördela de 20 tennisbollarna i 7 hinkar (fack). Vi kan tänka på det som att vi lägger ut de 20 tennisbollarna på en lång rad och delar in dem i sju fack med hjälp av 6 lodräta streck.

$$o||\infty\infty|\infty\infty\infty\infty\infty|\infty\infty|o$$

Bilden ovan representerar att vi har en boll i den första hinken, 0 bollar i den andra hinken, 3 bollar i den tredje, 2 bollar i den fjärde, 10 bollar i den femte, 3 bollar i den sjätte och 1 boll i den sjunde hinken. Samtliga gruppindelningar ges av antalet sätt att placera ut de 6 lodräta strecken på de $(7-1+20) = 26$ positionerna, dvs. $\binom{26}{6}$ sätt.

$$\text{b) } \binom{19}{6} = 27 \text{ 132 sätt}$$

Lägger vi en boll i varje hink ska vi sedan lägga de 13 kvarvarande bollarna i 7 hinkar. Det kan göras på $\binom{7+13-1}{7-1} = \binom{19}{6}$ sätt

$$2259 \text{ a) } 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \\ \text{b) } 1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1 \\ 1 \ 8 \ 28 \ 56 \ 70 \ 56 \ 28 \ 8 \ 1$$

$$2260 \text{ } a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$2261 \text{ } a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$2262 \text{ } 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

$$2263 \text{ } n+1 \text{ st}$$

2264 Det finns bara ett enda sätt att välja n stycken a eller n stycken b från n parenteser. (Eller det finns bara ett sätt att välja 0 stycken a eller 0 stycken b från n parenteser.)

$$2265 \text{ a) } 81 \ 648x^5y^2 \\ \text{b) } 45a^{16}b^2$$

$$2266 \text{ } 1^5 \cdot 6^7 \cdot \binom{12}{7} = 221 \text{ 709 312}$$

2267 a) Det gäller ju att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ så } C_k = C_{n-k}$$

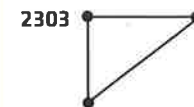
Termerna $a^k b^{n-k}$ och $a^{n-k} b^k$ kommer alltså att ha samma koefficient.

b) Om n är jämnt så har termen med $a^{n/2} b^{n/2}$ en koefficient som inte någon annan term har. Vi har ju att $C_{n/2} = \binom{n}{n/2} = \binom{n}{n-n/2}$ så det finns bara en sådan koefficient.

$$2268 \text{ } -15$$

$$2301 \text{ a) } 3 \text{ hörn och 4 kanter} \\ \text{b) } 9 \text{ hörn och 10 kanter}$$

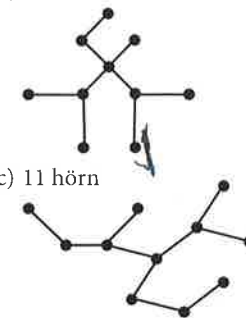
$$2302 \text{ a) } \deg(A) = 1; \deg(B) = 3; \deg(C) = 2; \deg(D) = 2 \\ \text{b) } \deg(E) = \deg(F) = \deg(H) = \deg(I) = 3; \deg(G) = 4$$



2304 Det ökar med 2.

2305 Därför att en av kanterna inte både börjar och slutar i ett hörn.

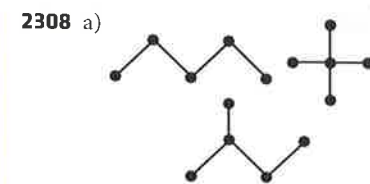
$$2306 \text{ a) } A: 4 \text{ hörn, 3 kanter;} \\ B: 6 \text{ hörn, 5 kanter;} \\ C: 8 \text{ hörn, 7 kanter} \\ \text{b) } 9 \text{ kanter}$$



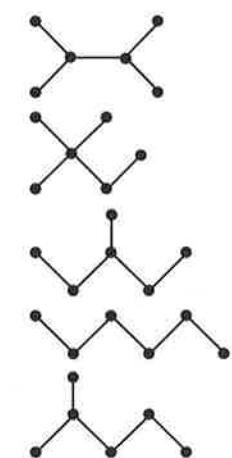
c) 11 hörn

$$\text{d) } H = K + 1$$

$$2307 \text{ } 10$$



b) 5 isomerer

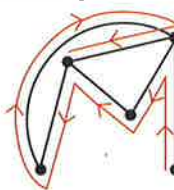


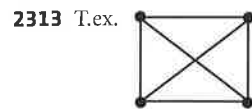
2309 Varje kant är förbunden med 2 hörn. Alltså ökar det totala gradtalet med 2 för varje kant. Om K är antalet kanter, så är summan av gradtalen $2K$ och det är ett jämnt tal.

2310 Man kan likna medlemmarna vid hörnen i en graf och bekantskapen mellan personerna inom föreningen med kanterna. Eftersom summan av hörnens gradtal är jämnt, så kan inte ett udda antal hörn ha udda gradtal. Därför kan inte ett udda antal medlemmar vara bekanta med ett udda antal personer inom föreningen.

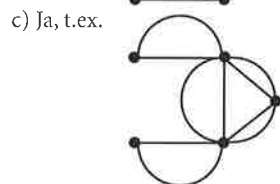
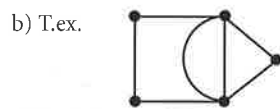
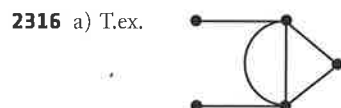
$$2311 \text{ a) } \text{Ja} \\ \text{b) } \text{Nej} \\ \text{c) } \text{Ja} \\ \text{d) } \text{Ja}$$

2312 Det finns två hörn i grafen med udda gradtal. Alltså existerar en Eulerväg, t.ex.



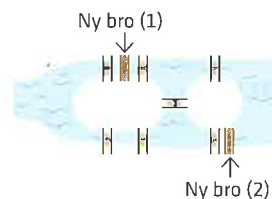


2315 Ja. Man kan passa på att gå runt öglan när man befinner sig i det hörnet. Sen fortsätter man som om öglan inte hade funnits.

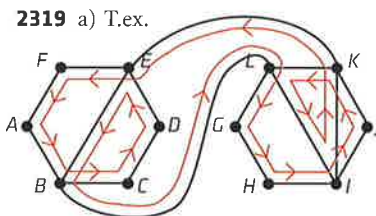
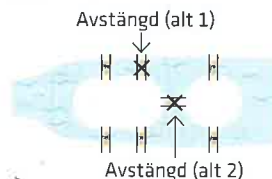


2317 Start och mål måste ligga i de två hörn som har udda gradtal, om det finns hörn med udda gradtal. Finns det inga hörn med udda gradtal kan start och mål ligga i vilket hörn som helst och då hamnar start och mål i samma hörn, dvs. Eulervägen är en Eulerkrets.

2318 a) Ja. Den nya bron kan faktiskt byggas parallellt med vilken som helst av de gamla broarna. Bilden visar två alternativ.



b) Nej, det spelar faktiskt ingen roll vilken bro som stängdes av. Bilden visar två möjligheter.



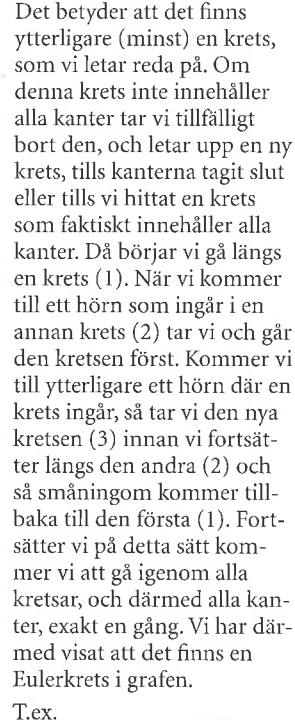
b) För att det ska bli en Eulerkrets måste samtliga kanter passeras precis en gång och vägen ska starta och sluta i samma punkt. Det krävs därför minst en kant för att komma från den ena grafen över till den andra, och sedan ytterligare minst en kant för att komma tillbaka till den första grafen igen. Två kanter är alltså det minsta antalet kanter som behövs.

2320 a) En graf innehåller en Eulerkrets om och endast om alla hörn har ett jämnt gradtal. (Grafen har en Eulerkrets $\Leftrightarrow$ Alla hörn har jämnt gradtal)

b) Vi visar först att om grafen har en Eulerkrets så måste alla hörn ha ett jämnt gradtal: I en Eulerkrets passeras alla kanter exakt en gång och man återvänder till startpunkten. Det betyder att man alltid måste gå lika många gånger in mot ett hörn som ut ur det, dvs. att antalet kanter vid varje hörn är jämnt. Med andra ord att alla hörn har ett jämnt gradtal.

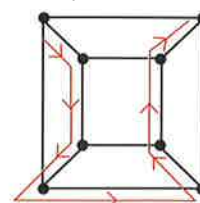
Vi visar nu implikationen åt andra hållet, dvs. om alla hörn har ett jämnt gradtal, så har grafen en Eulerkrets: Vi utgår ifrån att alla hörn har jämnt gradtal. Då finns det med säkerhet en krets i grafen. Vi ska nu visa att det måste vara en Eulerkrets. Eftersom vi är säkra på att det finns en krets i grafen, finner vi en sådan. Om den omfattar alla kanter, så har vi redan en Eulerkrets. I annat fall kan vi tillfälligt ta bort den första kretsen ur grafen.

Det innebär att vi tar bort ett jämnt gradtal från de ingående hörnen, så att alla hörn har fortsatt jämnt gradtal. Det betyder att det finns ytterligare (minst) en krets, som vi letar reda på. Om denna krets inte innehåller alla kanter tar vi tillfälligt bort den, och letar upp en ny krets, tills kanterna tagit slut eller tills vi hittat en krets som faktiskt innehåller alla kanter. Då börjar vi gå längs en krets (1). När vi kommer till ett hörn som ingår i en annan krets (2) tar vi och går den kretsen först. Kommer vi till ytterligare ett hörn där en krets ingår, så tar vi den nya kretsen (3) innan vi fortsätter längs den andra (2) och så småningom kommer tillbaka till den första (1). Fortsätter vi på detta sätt kommer vi att gå igenom alla kretsar, och därmed alla kanter, exakt en gång. Vi har därmed visat att det finns en Eulerkrets i grafen.

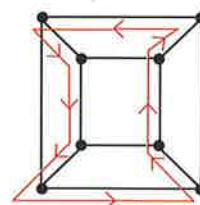


2321 Eftersom vandringen passerar varje hörn i grafen exakt en gång och återvänder till startpunkten, så är det en Hamiltoncykel. Eftersom vandringen inte passerar varje kant, så är det inte en Eulerkrets.

2322 Den markerade vägen i grafen här nedanför är ett exempel på en Hamiltonstig eftersom den passerar varje hörn exakt en gång.



Den markerade vägen i grafen här nedanför är ett exempel på en Hamiltoncykel eftersom den passerar varje hörn exakt en gång och återvänder till startpunkten. Den är inte en Eulerkrets eftersom den inte passerar varje kant.



2323 a) Ja, eftersom det bara finns två hörn med udda gradtal, så finns det en Eulerväg, dvs. en väg som passerar varje kant precis en gång. Ett exempel är $C-D-E-F-A-G-H-I-C-B-A$ där plogbilen alltså kör in i området från en väg som ansluter vid C, och ut från en väg som ansluter vid A.

b) Ja, brevbäraren kan ta vägen $G-B-A-F-E-D-C-I-H$.

c) Nej, då kommer det att finnas fler än två hörn med udda gradtal, vilket betyder att grafen inte kan ha någon Eulerväg.

2324 a) 352 km

b) Nej, exempelvis är resvägen Katrineholm-Örebro-Eskilstuna-Nyköping-Katrineholm är kortare, bara 311 km.

2325 a) T.ex.



b) För man kan inte komma till och från det vänstra hörnet i grafen, utan att passera hörnet till höger om detta två gånger.

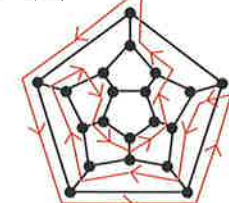
c) T.ex.



2326 a) Det står att Hamiltoncykeln är en krets och i en sådan återvänder man alltid till startpunkten.

b) "varje kant får inte passeras mer än en gång" är överflödigt information. Motiveringen liknar den ovan. Det är en krets och en krets är en väg, dvs. man får inte passera någon kant mer än en gång.

2327 T.ex.



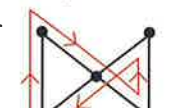
2328 a) T.ex.



b) T.ex.



c) T.ex.



d) T.ex.



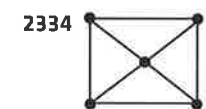
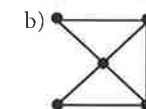
2329 Eftersom det i det här fallet är ganska arbetsamt att gå igenom alla möjliga resvägar, så är närmaste granne-metoden ett bra sätt att snabbt hitta en lämplig resväg. I det här fallet ger närmaste granne-metoden resvägen $S-D-B-C-A-S$ med en reskostnad på 123 kronor. I det här fallet är detta dessutom den billigaste resvägen.

2330 Varje hörn har grad 2.

För att grafen ska ha en Eulerkrets måste varje hörn ha jämnt gradtal (se uppgift 2320). Om grafen dessutom ska ha en Hamiltoncykel får man bara passera varje hörn en gång. Det gör man genom att gå in i hörnet via en kant och ut ur hörnet via en annan. Detta gör sammanlagt att varje hörn måste ha grad 2.

2331 13 hörn

2332 a)



$Y = 5, H = 5, K = 8$, ger vid insättning i Eulers polyederformel $VL = 5 + 5 - 8 = 2 = HL$ v.s.v.

2335



2336 Eftersom det är två kanter som korsar varandra utan att det finns ett hörn i korsningen, så är det inte en plan sammanhängande graf. Då gäller inte Eulers polyederformel.

- 2337 a) $H = 1, Y = 1$ och $K = 0$.
 $Y + H - K = 1 + 1 - 0 = 2$
 v.s.v.

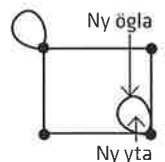
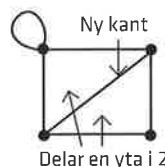
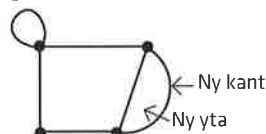
- b) Nytt hörn med kant ger
 $H = 2, Y = 1$ och $K = 1$.
 $Y + H - K = 1 + 2 - 1 = 2$
 v.s.v.



En tillkommande ögla ger
 $H = 1, Y = 2$ och $K = 1$.
 $Y + H - K = 2 + 1 - 1 = 2$
 v.s.v.

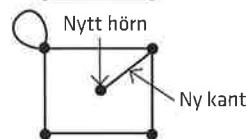
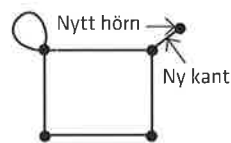


- c) Oavsett hur kanten dras, bildas också en ny yta. Det ger att både K och H ökar med 1, medan Y är oförändrad. Då gäller formeln fortfarande.



- d) Därför att grafen måste vara sammanhängande enligt förutsättningarna.

- e) Det tillkommer ett hörn och en kant, men antalet ytor är oförändrat. Det ger att H och K ökar med 1, medan Y är oförändrad. Då stämmer formeln fortfarande.



- f) Därför att alla plana sammanhängande grafer kan byggas upp på just dessa sätt. Utgå från ett hörn. Lägg sedan till nya hörn och kanter, sammanbind hörn eller lägg till öglor tills den önskade grafen erhållits.

B Blandade uppgifter

- 1 30 sätt

- 2 5 040 sätt

- 3 a) Sant
 b) Falskt
 c) Sant

- 4 5 472 sätt

- 5 a) A är mängden av positiva udda tal.
 b) B är mängden av tal delbara med 5.

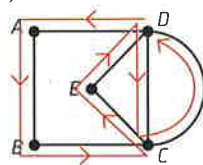
- 6 a) 4
 b) $\{c, d, e, r, s, t, u\}$
 c) $\{c, d\}$
 d) $\emptyset$

- 7 $C \subseteq A$ och $D \subseteq B$

- 8 a) 336
 b) 7
 c) 4 950

- 9 a) $\deg(A) = \deg(B) = \deg(E) = 2$;
 $\deg(C) = \deg(D) = 4$

- b) Det ökar med 2
 c) Ja, eftersom samtliga gradtal är jämna.



- 10 a) 120 st
 b) 216 st

- 11 a) $\{1, 6, 7, 8, 9\}$
 b) $\emptyset$
 c) $\{1\}$

- 12 240 st

- 13 735 471 sätt

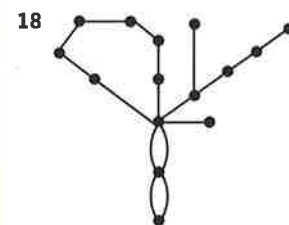
- 14 14 hörn

- 15 a) $30!$ sätt ($\approx 2,7 \cdot 10^{32}$)
 b) $8 \cdot 10^{24}$ år
 c) $6 \cdot 10^{14}$ universum

- 16 Nej, ingen av dem har rätt. Färgar man alla t-shirtar i samma färg, så stämmer inget av påståendena. Det laddprincipen kan säga här är att minst 5 t-shirtar kommer att ha samma färg (antalet föremål är 13 och antalet lådor är 3).

- 17 T.ex.

- a) I en handbollsturnering deltar 8 lag. På hur många sätt kan de 4 första platserna fördelas?
 b) Hur många bokstavskombinationer med tre bokstäver kan bildas med bokstäver ur det svenska alfabetet?
 c) På hur många olika sätt kan Elvira välja vilka två böcker hon ska köpa av de tio som hon vill ha?



- 19 Problem som går ut på att finna en optimal Hamiltonstig eller Hamiltoncykel. T.ex. när man ska ta reda på den kortaste resvägen eller lägsta resekostnaden vid besök i ett antal olika orter.

- 20 $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

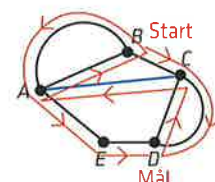
- 21 90 st

- 22 a) 1 260 st
 b) 120 st

- 23 19

- 24 a) Nej, grafen har ingen Eulerväg eftersom det är mer än två hörn som har udda gradtal.

- b) T.ex.



- 25 a) T.ex. $A = \{1\}; B = \{1, 2\}; C = \{1, 2, 3\}$

- b) T.ex. $A = \{1\}; B = \{2\}; C = \{1, 2\}$

- 26 $R \times R$

- 27 Ja. $A \cup B = \{x; x \in A \text{ eller } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ eller } x \in A\} = B \cup A$

- 28 15 st

- 29 a) Resultaten blir lika, dvs.

$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2}, \binom{4}{0} = \binom{4}{4} \text{ osv.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

- c) I stället för att välja 3 av fyra, så kan man tänka vilken av de fyra man inte väljer. Det går att göra på lika många sätt. Samma resonemang med att välja 5 av 7 eller vilka 2 av 7 som man inte väljer.

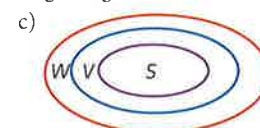
- 30 a) 1 person

- b) 10 personer

- c) 33 st

- 31 a) Ja. Om man inte återvänder till ett hörn, så kan man ju inte gå längs samma kant.

- b) Nej. Det kan gå flera kanter mellan samma hörn. Då kan man återvända till ett hörn, utan att gå längs samma kant.



- 32 a) $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} \approx 0,079$

- b) $\frac{7! \cdot 9! \cdot 5! \cdot 3!}{21!} \approx 2,6 \cdot 10^{-8}$

- 33 -48 384

- 34 a) $\frac{1}{3^{13}} \approx \frac{1}{1,6 \cdot 10^6}$
 b) 0,0016

- 35 90

- 36 a) 0,019
 b) 0,039

- 37 405

- 38 a) Det finns fyra varianter av punkter: (J, J) ; (J, U) ; (U, J) och (U, U) , där J betyder jämn koordinat och U betyder udda koordinat. Eftersom vi har fem punkter, finns enligt laddprincipen minst två punkter av samma sort. Drar vi en sträcka mellan två punkter av samma sort, t.ex. mellan punkter av typen (J, U) och (J, U) eller (U, U) och (U, U) , kommer mittpunkten på sträckan mellan dem alltid att ha heltalskoordinater, eftersom summorna av deras x -koordinater respektive y -koordinater alltid är jämna tal och därmed delbara med 2. Det betyder att vi med säkerhet kommer att kunna dra minst en sträcka där mittpunkten har heltalskoordinater.

- b) Punkterna kan ju vara av de olika slagen (J, J) ; (J, U) ; (U, J) och (U, U) och därmed är det inte säkert att mittpunkten för någon av sträckorna har heltalskoordinater. (Både antalet föremål och antalet lådor är 4 och då kan vi inte garantera att två punkter är av samma typ.)

- 39 0,3

? Kapiteltest

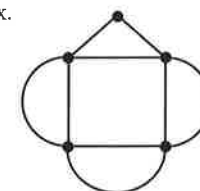
- 1 a) $\{1, 2, 5, 7, \%, \#, \&, @\}$
 b) $\{5, \&\}$
 c) 3

- 2 a) 30
 b) 165

- 3 a) En vandring i grafen som passerar varje kant exakt en gång.
 b) Nej. Det finns fler än två hörn med udda gradtal.

- 4 Rihanna ska utnyttja erbjudandet "Köp 3 t-shirtar och betala för 2". Det finns 14 olika sorters t-shirtar till salu. På hur många sätt kan hon göra sitt köp, om hon vill köpa tre olika t-shirtar?

- 5 6 ytor, t.ex. grafen



- 6 $64a^{12} - 192a^{10}b + 240a^8b^2 - 160a^6b^3 + 60a^4b^4 - 12a^2b^5 + b^6$

- 7 $VL = (n+2)! - (n+1)! - n! = (n+2)(n+1)! - (n+1)! - n! = (n+2-1)(n+1)! - n! = (n+1)(n+1)! - n! = ((n+1)^2 - 1)n! = (n^2 + 2n)n! = n(n+2)n! = HL$

- 8 a) Baback har antagligen tänkt att det finns $\binom{6}{4}$ sätt att välja

4 luckor av 6, när ordningen saknar betydelse. Då blir sannolikheten för supervinsten $\frac{1}{\binom{6}{4}}$

Alexandra har antagligen tänkt att vid första valet är det 4 luckor av 6 som har grön lampa, vid andra valet (efter ett lyckat första val) är det 3 luckor av 5, osv. Med hjälp av multiplikationsprincipen beräknar hon sedan sannolikheten för supervinsten.

- b) Sannolikheten är $\frac{1}{15}$

- c) $\frac{1}{\binom{6}{5}} = \frac{1}{6}$

- 9 a) 120 st
 b) 60 st

- 10 274 elever

- 11 $x = 5$

- 12 a) 256 sätt
 b) 33 st

- 13 1 792

- 14 • 1 element: 2 delmängder
2 element: 4 delmängder
3 element: 8 delmängder

• Det finns $\binom{n}{k}$ sätt att välja en delmängd med k element. Det beror på att man ska finna antalet kombinationer när man väljer k element från n stycken utan repetition och utan hänsyn till ordning. Summan av alla delmängder blir

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

• Varje element är antingen med i en delmängd eller så är det inte med i delmängden. Vi har alltså 2 val för varje element. Eftersom det är n stycken element, så ger det 2^n olika möjligheter och därmed lika många delmängder. Det kan också bevisas med hjälp av binomialsatsen genom

$$2n = (1 + 1)^n =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

3 Differential-ekvationer

3101 a) $VL = y' + y = 6x - 6 + 3x^2 - 6x = 3x^2 - 6$,
HL = $3x^2 - 6$, VL = HL v.s.v.

b) $VL = y' - 3y = 3e^{3x} - 3e^{3x} - 12 = -12$,
HL = -12 , VL = HL v.s.v.

3102 a) $F = ma$
b) $F = m \cdot v'(t)$

3103 a) $VL = y'' + 4y = -4 \sin 2x - 4 \cos 2x + 4(\sin 2x + \cos 2x) = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.

b) $VL = y'' + y' - 2y = 12e^{-2x} - 6e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$,
HL = 0, VL = HL v.s.v.

3104 $VL = y' - ay = aCe^{ax} - aCe^{ax} = 0$, HL = 0,
VL = HL v.s.v.

3105 $y(t)$ är antalet sålda förpackningar vid tiden t .

a) $y' = 0$
b) $y' = k\sqrt{y}$

3106 a) $VL = y'' - 2y' + 2y = 2e^x + xe^x - 2(e^x + xe^x) + 2xe^x = xe^x$, HL = xe^x ,
VL = HL v.s.v.

b) $VL = y'' + y = 10 \cos x - 5x \sin x + 5x \sin x = 10 \cos x$,
HL = $10 \cos x$,
VL = HL v.s.v.

3107 a) $B'(t) = 0,0035 \cdot B(t)$

b) Bakteriedodningens tillväxthastighet är 0,35 % per sekund av aktuell bakteriemängd.

c) Nej, för $B(0) = 0$ betyder att det inte finns några bakterier vid $t = 0$.

3108 a) $m'(t) = k \cdot m(t)$

b) Negativ (om ekvationen skrivs som ovan) eftersom mängden radium minskar.

3109 Text: $A = -2$ och $b = 2$.
(A kan vara vilket tal som helst men b kan bara vara 2 eller -2).

3110 $\omega = \pm \sqrt{k}$

3111 $y' = -k(y - r)$ då $0 \leq r \leq y$ och där y är teets temperatur vid tiden t och r rummets temperatur.

3112 a) $y = x^2 - x + C$
b) $y = x^3 + e^x + C$
c) $y = 2 \ln x + C$

d) $y = \frac{\sin 2x}{2} + C$

3113 a) $y = \frac{x^3}{3} + Cx + D$
b) $y = e^{-3x} + Cx + D$

3114 a) $y = x^2 + x + 3$
b) $y = 2x^3 + 5$

3115 $v(t) = at + v_0$

3116 25 m

3117 a) 19,6 m/s
b) 19,6 m

3118 a) $y = \frac{1}{x} + C$
b) $y = C$

3119 a) $y = \frac{5x^3}{3} - 13$
b) $y = \frac{x^3}{2} + \frac{7x}{2} - \frac{3}{2}$
c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x + 3$

3120 a) $y = -4 \sin \frac{x}{2} + Cx + D$
b) $y = \sqrt{x} + C$

3121 a) $y' = x^2 - 6x + 5$
b) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + C$

3122 A: 1, B: $\frac{1}{2}$, C: $\frac{1}{4}$

3123 a) (1, 2)
b) (2, 4)
c) 4

3124 8

3125 4

3126 a) 1,97
b) 1,39

3127 a) 2
b) 1,98

3128 a) 3
b) -3

3129 0,02

3130 a) $\frac{dv}{dt} = 9,82 - \frac{14}{78} v^2$
b) Eulers stegmetod med $h = 0,1$ ger 7,6 m/s.

3201 a) $y = Ce^{-2x}$
b) $y = Ce^{3x}$
c) $y = Ce^{7x}$

3202 a) $y = -5e^{-3x}$
b) $y = e^{8-3x}$
c) $y = e^{4-3x}$

3203 a) $N' = 0,05N$
b) $N = Ce^{0,05t}$
c) $N = 1\,500e^{0,05t}$
d) 2 100 st

3204 a) $M = 175e^{0,03t}$
b) Ca 200 st (203)

3205 a) $N' = 0,04N$; $N(0) = 3\,000$
b) $N = 3\,000e^{0,04t}$

3206 a) $y = 14e^{0,097t}$
b) 3,7 h

3207 a) $N' = k \cdot N$
b) Ca 9 st

3208 a) $N' = k \cdot N$
b) $N = 20e^{0,11t}$

3209 $y' + 3y = 0$

3210 $y = 5e^{-2x}$ eller $y \approx 5 \cdot e^{-0,4x}$

3211 $f(x) = 5e^{x/3}$

3212 a) $y' = ky$ ger $y = Ce^{kx}$
b) $k \approx -0,13$

3213 a) $N' = -0,02N$
b) 38 000 st

3214 a) $y = 3e^{2x}$
b) $y = 5e^{(\ln 2/5)x} = 5\left(\frac{2}{5}\right)^x$
c) $y = \frac{4}{3} \cdot e^{(\ln 3/2)x} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

3215 a) $N' = -k \cdot N$
b) $N = 6,5 \cdot 10^{10} \cdot e^{-1,2 \cdot 10^{-4}t}$
c) Ca 11 000 år (10 559)
d) Ungefär mellan 9 800 år och 11 400 år.

3216 a) $y = Ce^{-0,023t}$
b) 30 år
c) 130 år

3217 a) $q = Qe^{-t/RC}$
b) 3,5 μ s

3218 a) $y' = 0,003y$
b) 490 kg
c) $y' = 0,003y - a$
d) 0,6 kg/min

3219 36 °C

3220 a) (1) Minskningstakten för antalet mottagliga för en sjukdom är proportionell mot produkten av antalet mottagliga för sjukdomen och antalet infekterade av sjukdomen.

(2) Tillväxthastigheten för antalet infekterade av en sjukdom är proportionell mot produkten av antalet mottagliga för sjukdomen och antalet infekterade av sjukdomen samt mot antalet infekterade av sjukdomen.

(3) Tillväxthastigheten för antalet tillfrisknade (eller antalet döda) i en sjukdom är proportionellt mot antalet infekterade.

b) Summan $S + I + R$ motsvarar hela populationen, det vill säga de som är, kan bli, eller redan har varit smittade av sjukdomen.

3221 a) $VL = y' + 4y = 4 + 4(4x - 1) = 16x$,
HL = $16x$, VL = HL v.s.v.

b) $VL = y' - 2y = 2x + 1 - 2(x^2 + x) = 1 - 2x^2$, HL = $1 - 2x^2$,
VL = HL v.s.v.

3222 A - y_4 , B - y_1 , C - y_3

3223 a) $y_h = Ce^{9x}$
b) $y_p = -\frac{2x}{3} - \frac{2}{27}$
c) $y = Ce^{9x} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{27}$

3224 a) $y = Ce^{-5x} + 2$
b) $y = Ce^{3x} - 3x - 1$
c) $y = Ce^{3x} + x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}$
d) $y = Ce^{-x} + e^{2x}$

3225 $y = \frac{11}{3}e^{3x} + x + \frac{1}{3}$

3226 Elisabeth har rätt; man kan inte utelämna x -termen.

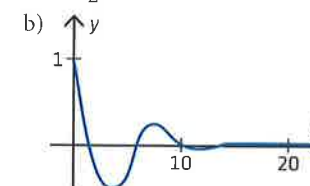
3227 a) $k \approx -0,065 \text{ min}^{-1}$
b) 28 min

3228 $y = -3x^2 - 3x + 1$

3229 $y_p = 0,16 \sin x + 0,12 \cos x$

3230 Nej, lösningen till motsvarande homogena ekvation ger $k = 1$ och $y' + y = x^2$ kan inte ha partikulärlösningen $x^2 + 1$.

3231 a) $y = \frac{1}{2}e^{-0,5t}(\sin t + 2 \cos t)$



3232 a) $\frac{dN}{dt} = 0,05N$

b) Befolkningsökningen vid en viss tidpunkt är 5 % per år av den aktuella befolkningsmängden.

c) Ca 17,8 miljoner invånare skulle kommunen ha om 100 år enligt denna modell.

d) Den exponentiella modellen förutsätter det orimliga, att antalet människor kan öka obegränsat.

3233 a) $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$

b) $\lambda = \frac{\ln(1/2)}{T_{1/2}} = 1,210 \cdot 10^{-4}$

c) Differentialekvationen har lösningen $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$. Efter en halveringstid har vi $\frac{N(0)}{2}$ radioaktiva kärnor kvar.

Det ger ekvationen

$$\frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda T_{1/2}}$$

som i sin tur har lösningen

$$\lambda = \frac{\ln(1/2)}{-T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

3234 Ja, om $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3235 a) $y = A \cos 3x + B \sin 3x$
b) $y = 2 \sin 3x$

3236 $k = 25$
($y = 2x + Ce^{-5x} + De^{5x}$ satisfierar ekvationen $y'' - 25y = -50x$)

3237 a) $y = -\sin 2t$

b) $t = 1,6$ s

c) 2 cm/s

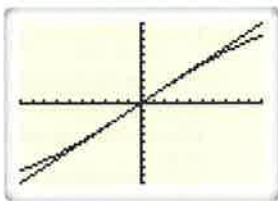
- 3238 a) $\frac{dN}{dt} = 0,025N$
 b) $N(3) = 40e^{0,025 \cdot 36} \approx 98$
 c) Under en längre tidsperiod är det orimligt att populationen ökar exponentiellt, eftersom den i så fall antas kunna växa obegränsat och bli hur stor som helst.
 d) $\frac{dN}{dt} = kN(700 - N)$
 e) 350 kaniner

- 3239 a) $VL = e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}$
 $HL =$
 $= 2 + 2\left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t} - 1\right)$
 $HL = VL;$
 $y = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t} - 1$ är alltså en lösning till differentialekvationen

b) 1,6 s

- 3240 Ca 41 °C

- 3241 a) Vi ritar $y_1 = \sin y$ och $y_2 = y$ i samma koordinatsystem och ser att $y \approx \sin y$ för små värden på y (observera att y mäts i radianer och här avsätts efter den horisontella koordinataxeln).



- b) $y(x) = C_1 \sin(3,00x) + C_2 \cos(3,00x)$
 c) $y(x) = 0,66 \sin(3,00x) + 0,5 \cos(3,00x)$

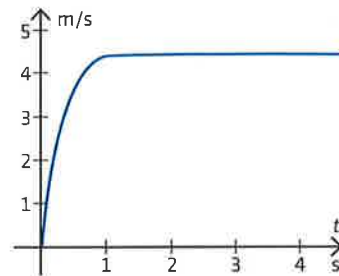
- 3242 Nej, koncentrationen var som mest 0,014 mg/ml.

- 3243 För $b < 0$ ökar svängningens amplitud med tiden och för $b > 0$ minskar svängningens amplitud med tiden. För $b = 0$ är amplituden konstant.

3244 a) $\frac{dv}{dt} = 9,82 - \frac{0,25v^2}{0,5}$
 $v(0) = 0$

b) 4,3 m/s

c) Enligt grafen blir största hastighet ca 4,4 m/s.



d) 20 m/s (19,6)

B Blandade uppgifter

1 $VL = y' + 2y = -4e^{-2x} + 2 \cdot 2e^{-2x} = HL$ v.s.v.

2 $VL = y'' + y' = -2 \cos x + 2 \cos x - x = -x,$
 $HL = -x, VL = HL$ v.s.v.

3 $N'(t) = k \cdot N(t)$

4 Mängden radioaktivt ämne minskar med 0,21 % per tidsenhet av aktuell mängd.

5 a) $y = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x^2}{2} + C$

b) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$

c) $y = 2 \ln x + C$

d) $y = -\frac{3 \cos 4x}{4} + C$

6 a) $y = 3x^2 - 2x + 3$

b) $y = -\cos x + 3$

c) $y = \ln x$

7 Antalet celler minskar med en hastighet som är 1 % per år av aktuellt antal celler.

8 a) $y = Ce^{-3x}$

b) $y = Ce^{-x}$

c) $y = Ce^{3x}$

d) $y = \frac{e^{4x}}{2} + 3x + C$

9 a) $y = 2e^{5x}$

b) $y = e^{-4x}$

c) $y = e^{-3x}$

10 $K' = -0,04K$ och $K(0) = 5\,000$ kr, där K är kapitalet i kronor.

11 a) $y = Ce^{-2x} + 2$

b) $y = Ce^{-5x} + \frac{x}{5} - \frac{1}{25}$

c) $y = Ce^{3x} - 2$

d) $y = Ce^{3x} - \frac{2x}{3} - \frac{5}{9}$

12 $y = \frac{3e^{2x}}{2} - x - \frac{1}{2}$

13 $y = 11e^{-x} + 3x - 4$

14 $VL = y'' - a^2y = -a^2C \sin ax - a^2D \cos ax + a^2(C \sin ax + D \cos ax) = 0 = HL$ v.s.v.

15 a) (1, 0)

b) (2, -1)

c) $y(2) = -1$

16 $y(3) = 2,5$

17 a) $k = -\frac{1}{2}$

b) $C = -10$

18 a) $y' = ky$

b) 1,9 bar

19 $y = Ce^{2x} - 2x^2 - 2x - 1$

20 22,8

21 $k = \frac{1}{2}$

22 a) $K(t) = -3\,900e^{-0,1t} + 4\,500$

b) 1 890 000 €

23 Ca 60 liter

24 $t = \frac{\ln 2}{k}$ dygn

25 a) 1 °C

b) 1 °C/min

c) 0,7 °C/min

d) Skillnaden beror på olika avrundning. Per mäter vattnet till 19,5 °C vilket ger 36 minuter. Stina använder temperaturen 19,95 °C vilket ger tiden 59 minuter.

26 a) $y = Ce^{-1,21 \cdot 10^{-4}t}$

b) $4,2 \cdot 10^{16}$ st

c) 5 730 år

27 $mv' = mg - kv$, där k är någon proportionalitetskonstant.

28 a) $y = 4e^{-(3/2)x}$

b) $y = 2e^{-(3/2)x}$

c) Lösningen är av formen $y = Ce^{-1,5x}$. $y \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \infty$. Alltså kan B inte vara en lösning till ekvationen.

29 a) Varje år förändras mängden föroreningar i sjön genom att 100 kg föroreningar tillförs från fabriken och 10 % av den aktuella mängden föroreningar följer med vattnet ut ur sjön.

b) $y = -500e^{-0,1t} + 1\,000$

c) Massan föroreningar går mot 1 000 kg.

30 19,6 °C

31 Fel, ansatsen måste innehålla en konstantterm. En lämplig ansats kan till exempel vara $y_p = ax^2 + b$.

32 a) $v' + \frac{5}{11}v = 9,82$

b) $v = -21,604e^{-5t/11} + 21,604$

c) 7,9 m/s

33 a) $\frac{dA}{dt} = -0,32A; \frac{dC}{dt} = 0,15B$

b) Talliummängdens förändringshastighet är noll vid den tidpunkt då mängden tallium är maximal. Sönderfallshastigheten hos vismut är lika med bildningshastigheten hos bly vid denna tidpunkt.

34 a) $x(t) = A \sin \sqrt{k}t$

b) $A \cdot \sqrt{k}$ m/s

? Kapiteltest

1 $y' = ky$

2 $VL = y'' + y' + y = 10 + 10x - 10 + 5x^2 - 10x = 5x^2,$
 $HL = 5x^2, VL = HL$ v.s.v.

3 a) $y = 3x^3 + x + C$

b) $y = \frac{e^{3x}}{9} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$

4 a) $y = Ce^{7x}$

b) $y = Ce^{-x/3} + 6x - 18$

5 a) $s(t) = t^2 + v_0t + s_0$

b) 130 m

6 a) $N' = 0,04N$

b) Tillväxthastigheten för djurpopulationen är hela tiden 4 % per tidsenhet av den aktuella populationen.

c) $N = 40e^{0,04t}$

7 Förutsättningarna enligt texten ger att funktionsuttrycket $I(x) = I_0e^{-kx}$ beskriver strålningens intensitet. Här är I_0 strålningens intensitet utan absorberande material.

När intensiteten halverats är den $\frac{I_0}{2}$.

Det ger ekvationen $\frac{I_0}{2} = I_0e^{-kx_{1/2}}$

som ger att $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$.

8 166 m

9 a) 1

b) $y(2) \approx 3,25$

10 47 000 st

11 290 mbar

12 • $\frac{dM}{dt} = k - aM; M(0) = C$

• $M(t) = \left(C - \frac{k}{a}\right)e^{-at} + \frac{k}{a}$

• Medicinmängden i blodet kommer att närma sig det konstanta värdet $\frac{k}{a}$ mg.

Register

A

allmän lösning **110**
andra ordningens differentialekvation **106**
ansätta **123**
aritmetikens fundamentalsats **9**
aritmetisk summa **25**
aritmetisk talföljd **25**

B

binomialkoefficient **76**
binomialsatsen **75, 76**

C

Caesarkrypto **40**
cykel **85**

D

dekryptera **41**
delare **8**
delbarhet **8**
delbarhetsregler **12**
delmängd **51**
differens **53, 56**
differentialekvation **106**

- allmän lösning **110**
- andra ordningen **106**
- första ordningen **106**
- homogen **117**
- inhomogen **123**
- lösning till **106**
- numerisk lösning **113**
- ordning av **106**
- partikulärlösning **123**
- riktningsfält **116**

direkt bevisföring **32**
Dirichlets lådprincip **62**
diskret matematik **8**
duvhålsprincipen **62**

E

element **22, 50**
en handelsresandes problem **86**
Euklides **92**
Euler, Leonard **81, 93**
Eulerkrets **88**
Eulers polyederformel **89, 92**
Eulers stegmetod **113**
Eulerväg **81**

F

faktor **8**
fakultet **64**
första ordningens differentialekvation **106**

G

geometrisk summa **28**
geometrisk talföljd **28**
grad **79**
grafteori **78**

H

Hamilton, William **85**
Hamiltoncykel **85**
Hamiltonstig **85**
homogen lösning **117**
hörm **78**

I

index **22**
indirekta bevis **32**
induktion **32**
induktionsantagande **32**
induktionsbas **32**
induktionsbevis **32**
induktionssteg **32**
inhomogen lösning **123**

J

Julius Caesar **40**

K

kant **78**
kardinalitet **53**
kartesisk produkt **60**
kedjelinje **164**
kombinationer **67, 70**
kombinatorik **60**
kombinatoriska modeller **71**
kombinatoriska problem **70**
komplement **53, 56**
kongruens **16**
kongruensér, räkneregler **19**
kongruensräkning **8**
kongruenta tal **17**
kontinuerlig funktion **8**
kryptering **39, 40**
kvot **13**
Königsbergs broar **81**

L

logistisk tillväxtmodell **130**
lådprincipen **62**
lösningskurva **113**

M

Malthusiansk modell **134**
mantelarea **168**
multiplikationsprincipen **60**
mängd **50**
mängdlära **50**

N

Navier, Louis **135**
Newtons avvalningslag **136, 154**
Newton-Raphsons metod **157**
närmaste granne-metoden **86, 96**

P

partiell integration **166**
partikulärlösning **123**
Pascals triangel **76**
permutationer **64**
plan sammanhängande graf **89**
Platon **92**
platonska kroppar **92**
Pólya, George **146**
polyeder **89**
primtal **9**
primtalsfaktorisering **9**
principal rest **13**
problemlösning **146**

R

rekursiv formel **22**
rest **13**

riktningsfält **116**
RSA-kryptering **41**

S

sammanhängande graf **89**
sammansatt tal **9**
separabla differentialekvationer **165**
Simpsons formel **149**
skalmetoden **160, 162**
skivmetoden **160, 162**
sluten formel **22**
snitt **53, 56**
Sophie Germain-primtal **7**
stig **85**
Stokes, Gabriel **135**
summatecknet $\sum$ **23**
summa **23**

T

talföljd **22**
tomma mängden **50**
trivial delare **9**
träd **80, 95**

U

union **53, 56**
universalmängd **53**
uppspännande träd **95**

V

vandring **81**
Venndiagram **56**
Vigenèrekrypto **40**
viktad graf **86**
väg **81**
väntevärde **166**

Ä

äkta delmängd **51**

Ö

ögla **79**